LES DROIDES A L'ATTAQUE

Année 2020 – 2021

Léo RACLOT, Noa MOULIN, élèves de classe de Terminale

Encadrés par GUICHETEAU Denis, et TROTTA Jean-Philippe.

Établissements : Lycée Raynouard à Brignoles (VAR)

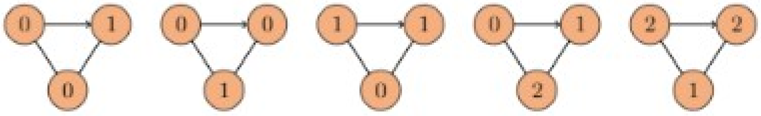
Chercheurs : Thierry CHAMPION, Laboratoire Imath.
Frédéric HAVET, Inria.

1. Présentation du sujet

Dans la galaxie TF-J-1000, la technologie est bien plus avancée que dans la nôtre : des robots auto-réplicateurs ont été mis au point, et ils se propagent de planète en planète.

La galaxie est constituée d'un ensemble de planètes. Chacune peut-être atteinte depuis certaines autres et, tous les siècles, chaque robot produit un robot pour chaque planète accessible depuis sa planète, les envoie puis s'autodétruit.

Voici un exemple d'évolution de robot sur 4 siècles. Dans cet exemple, la planète en haut à droite est accessible depuis la planète en haut à gauche, mais pas l'inverse.



1) Que se passerait-il si les planètes étaient alignées et que chaque planète ne pouvait accéder qu'à la planète devant ou derrière elle. On supposerait qu'au départ il n'y aurait qu'un seul robot sur une seule planète.

2) Existe-t-il des configurations de planètes qui amènent à l'extinction des robots ?

3) Existe-t-il des configurations de planètes qui rendent stable le nombre de robots dans les planètes ?

4) On suppose que dès qu'il y a 2 robots ou plus sur une planète, la guerre éclate et 2 robots se détruisent (ainsi s'il y a 3 robots, à la fin de la guerre il en reste encore 1). Que cela change-t-il dans les configurations étudiées ?

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

1) Notes préliminaires

On se donne, pour l'ensemble de notre étude, la modélisation discrète suivante.
Soit une galaxie à m planètes. On numérote chacune de ces planètes de 1 à m. A toute planète numérotée i (avec $i \in N ; i \in [1;m]$), on associe la suite $(a_{i_n})_{n \in N}$, où n est le nombre de siècles écoulés et a_{i_n} le

nombre de droïdes présents à cette date.
Cette modélisation trouve tout son intérêt dans les relations de récurrences entre les différentes suites que l'on peut établir. En effet, le nombre de droïdes présents a_{i_n} sur une planète à un siècle n ne dépend que du nombre de droïdes présents au siècle $n-1$ sur les planètes qui peuvent l'atteindre.

2) Conjectures et résultats obtenus

Conjecture 1 :
Dans le cas de planètes alignées et liées uniquement avec celles qui la suivent ou la précédent, nous avons conjecturé la formule suivante :
Pour tout nombre de planète $m$le nombre de droïdes sur une planète i après $n \geq m$ siècles est :

$$a_{i,n} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^{k+1} \binom{m-k}{k} a_{i,n-2k}$$

Résultat 2 (proposition 2a) :
Une configuration de planètes n'amène jamais à l'extinction des robots si et seulement si un des sommets liés admet un droïde après un certain nombre de siècles.

Résultat 3 (proposition 2b) :
Une configuration de planètes rend stable le nombre de robots dans ses planètes si :
(i) Chacune d'entre elles est une, et une seule, fois extrémité initiale d'un arête et extrémité terminale d'une autre.
(ii) Toutes les planètes contiennent initialement le même nombre de droïdes

Résultat 4 :
Si les robots font la guerre dès qu'il y a plus de 2 robots sur une planète, alors dans la configuration des planètes alignées, il n'y aura pas d'extinction sauf s'il y a une seule planète ou s'il y en a trois.

3. Texte de l'article

I) Etude d'un cas particulier

Que se passerait-il si les planètes étaient alignées et que chaque planète ne pouvait accéder qu'à la planète devant ou derrière elle. On supposerait qu'au départ il n'y aurait qu'un seul robot sur une seule planète.

Pour cette question, nous utilisons presque exclusivement la modélisation discrète introduite. Nous forçons une numérotation de proche en proche attribuant à la planète de gauche 1et m à celle la plus à droite. En effet, dès lors, par les hypothèses de la question, on a le système (S) suivant:

$$\begin{cases} a_{1_{n+1}} = a_{2_n} \\ a_{2_{n+1}} = a_{1_n} + a_{3_n} \\ a_{3_{n+1}} = a_{2_n} + a_{4_n} \\ \quad \dots \\ a_{m-1_{n+1}} = a_{m-2_n} + a_{m_n} \\ a_{m_{n+1}} = a_{m-1_n} \end{cases}$$

Cela se traduit matriciellement par l'égalité:

$$\begin{pmatrix} a_{1_n+1} \\ a_{2_n+1} \\ a_{3_n+1} \\ \vdots \\ a_{m-3_n+1} \\ a_{m-2_n+1} \\ a_{m-1_n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1_n} \\ a_{2_n} \\ a_{3_n} \\ \vdots \\ a_{m-3_n} \\ a_{m-2_n} \\ a_{m-1_n} \end{pmatrix}$$

On en déduit, par une récurrence immédiate:

$$\begin{pmatrix} a_{1_n} \\ a_{2_n} \\ a_{3_n} \\ \vdots \\ a_{m-3_n} \\ a_{m-2_n} \\ a_{m-1_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_{1_0} \\ a_{2_0} \\ a_{3_0} \\ \vdots \\ a_{m-3_0} \\ a_{m-2_0} \\ a_{m-1_0} \end{pmatrix}$$

Une formule de la puissance n-ième de la matrice mise en jeu nous permettrait ainsi d'obtenir une expression donnant le nombre de droïdes à n'importe quelle année, pour tout nombre de planètes, sur n'importe quelle planète, seulement en fonction de la position du premier droïde sur la galaxie.

Des calculs numériques, de type tableur, sont très rapides et très visuels pour ces planètes alignées. Précisons tout de même que nous n'évoquerons pas les cas $m=1$et $m=2$ respectivement dégénérés et triviaux.

On s'intéresse d'abord aux cas $m=3$ et $m=4$, dont les propriétés offrent de jolies curiosités. On peut d'ailleurs remarquer que ce sont les plus grands m pour lesquels la planète sur laquelle se trouve le premier droïde n'a pas d'importance.

- $m=3$: Un processus d’explicitation

B2 =A1+C1

	A	B	C
1	1	0	0
2	0	1	0
3	1	0	1
4	0	2	0
5	2	0	2
6	0	4	0
7	4	0	4
8	0	8	0
9	8	0	8
10	0	16	0
11	16	0	16
12	0	32	0
13	32	0	32
14	0	64	0
15	64	0	64
16	0	128	0
17	128	0	128
18	0	256	0
19	256	0	256
20	0	512	0
21	512	0	512
22	0	1024	0
23	1024	0	1024
24	0	2048	0
25	2048	0	2048
26	0	4096	0
27	4096	0	4096
28	0	8192	0
29	8192	0	8192
30	0	16384	0

Figure 1 :
Utilisation du tableur pour calculer le nombre de droïdes dans une configuration de 3 planètes alignées en fonction du nombre de siècle.

On constate rapidement qu'un terme sur deux est nul (observation valable pour n’importe quel nombre de planètes par ailleurs) et que les autres sont les puissances de 2 successives.
On conjecture aisément que

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}\begin{cases} \text{si } n \text{ est pair } a_{1_n} = a_{3_n} = 0 \text{ et } a_{2_n} = 2^{\frac{n-2}{2}} \\ \text{si } n \text{ est impair } a_{1_n} = a_{3_n} = 2^{\frac{n-3}{2}} \text{ et } a_{2_n} = 0 \end{cases}$$

D'autre part, on remarque que $\frac{(-1)^n+1}{2}$ est nul si n est impair et vaut 1 si n est pair.

De même, $\frac{1-(-1)^n}{2}$ est nul si n est pair et vaut 1 si n est impair.

d'où les formules explicites

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}\begin{cases} a_{1_n} = a_{3_n} = 2^{\frac{n-5}{2}}(1-(-1)^n) \\ a_{2_n} = 2^{\frac{n-4}{2}}((-1)^n+1) \end{cases}$$

que l'on peut également prouver facilement par récurrence double, en utilisant le système (S) appliqué à $m=3$.

- $m=4$: Etablir une formule récurrente

C2 | f_x Σ = | =B1+D1

	A	B	C	D
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	1	0	1	0
4	0	2	0	1
5	2	0	3	0
6	0	5	0	3
7	5	0	8	0
8	0	13	0	8
9	13	0	21	0
10	0	34	0	21
11	34	0	55	0
12	0	89	0	55
13	89	0	144	0
14	0	233	0	144
15	233	0	377	0
16	0	610	0	377
17	610	0	987	0
18	0	1597	0	987
19	1597	0	2584	0
20	0	4181	0	2584
21	4181	0	6765	0
22	0	10946	0	6765
23	10946	0	17711	0
24	0	28657	0	17711
25	28657	0	46368	0
26	0	75025	0	46368
27	75025	0	121393	0
28	0	196418	0	121393
29	196418	0	317811	0
30	0	514229	0	317811

Figure 2 :
Utilisation du tableur pour le cas m=4

On remarque que tous les termes non-nuls de chacune des suites appartiennent à la suite de Fibonacci.

Le système (S) donne ici

$$\begin{cases} a_{1_{n+1}} = a_{2_n} \\ a_{2_{n+1}} = a_{1_n} + a_{3_n} \\ a_{3_{n+1}} = a_{2_n} + a_{4_n} \\ a_{4_{n+1}} = a_{3_n} \end{cases}$$

Sa résolution amène à

$$\begin{cases} a_{1_n} = 3a_{1_{n-2}} - a_{1_{n-4}} \\ a_{2_n} = 3a_{2_{n-2}} - a_{2_{n-4}} \\ a_{3_n} = 3a_{3_{n-2}} - a_{3_{n-4}} \\ a_{4_n} = 3a_{4_{n-2}} - a_{4_{n-4}} \end{cases}$$

avec le résultat (de prime abord assez surprenant) que toutes les suites représentant le nombre de droïdes sur une planète vérifient la même formule récurrente. On verra par la suite que cette observation se généralise à n'importe quel nombre de planètes.

On peut alors se proposer d'expliciter ces formules en passant par le polynôme caractéristique de cette formule (et étant donné que les premiers termes ne sont pas variables). Le polynôme obtenu n'est alors que de degré 4 ce qui permet de trouver ses racines.

1) Quelques derniers cas particuliers:

M2 =G5-G3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	0	0	1	0	0		1	0	0	0	0		
2	0	1	0	1	0		0	1	0	0	0		1
3	1	0	2	0	1		1	0	1	0	0		0
4	0	3	0	3	0		0	2	0	1	0		3
5	3	0	6	0	3		2	0	3	0	1		0
6	0	9	0	9	0		0	5	0	4	0		9
7	9	0	18	0	9		5	0	9	0	4		0
8	0	27	0	27	0		0	14	0	13	0		27
9	27	0	54	0	27		14	0	27	0	13		0
10	0	81	0	81	0		0	41	0	40	0		81
11	81	0	162	0	81		41	0	81	0	40		0
12	0	243	0	243	0		0	122	0	121	0		243
13	243	0	486	0	243		122	0	243	0	121		0
14	0	729	0	729	0		0	365	0	364	0		729
15	729	0	1458	0	729		365	0	729	0	364		0
16	0	2187	0	2187	0		0	1094	0	1093	0		2187
17	2187	0	4374	0	2187		1094	0	2187	0	1093		0
18	0	6561	0	6561	0		0	3281	0	3280	0		6561
19	6561	0	13122	0	6561		3281	0	6561	0	3280		0
20	0	19683	0	19683	0		0	9842	0	9841	0		19683
21	19683	0	39366	0	19683		9842	0	19683	0	9841		0
22	0	59049	0	59049	0		0	29525	0	29524	0		59049
23	59049	0	118098	0	59049		29525	0	59049	0	29524		0
24	0	177147	0	177147	0		0	88574	0	88573	0		177147
25	177147	0	354294	0	177147		88574	0	177147	0	88573		0
26	0	531441	0	531441	0		0	265721	0	265720	0		531441
27	531441	0	1062882	0	531441		265721	0	531441	0	265720		0
28	0	1594323	0	1594323	0		0	797162	0	797161	0		
29	1594323	0	3188646	0	1594323		797162	0	1594323	0	797161		
30	0	4782969	0	4782969	0		0	2391485	0	2391484	0		

Figure 3 : utilisation du tableur dans le cas m=5 avec 2 configurations initiales différentes

On remarque, pour $m=5$, que, si le premier droïde part de la planète centrale, alors, les quatre autres planètes ont, pour tous les termes non-nuls, une puissance de 3 en nombre de droïdes.
Si le premier droïde part de l'une des quatre autres planètes, alors les termes non-nuls de la colonne centrale sont des puissances de 3 et, pour les autres colonnes la différence entre deux termes consécutifs (sans tenir compte des termes nuls) est une puissance de 3 (colonne M sur le tableur).

NB: Ce sont les dernières relations numériques intéressantes que nous parvenons à trouver. Avec plus de planètes, la progression semble nettement moins régulière.

En résolvant le système (S) pour $m=5$, on trouve

$$\begin{cases} a_{1_n} = 4a_{1_{n-2}} - 3a_{1_{n-4}} \\ a_{2_n} = 4a_{2_{n-2}} - 3a_{2_{n-4}} \\ a_{3_n} = 4a_{3_{n-2}} - 3a_{3_{n-4}} = 3a_{3_{n-2}} \\ a_{4_n} = 4a_{4_{n-2}} - 3a_{4_{n-4}} \\ a_{5_n} = 4a_{5_{n-2}} - 3a_{5_{n-4}} \end{cases}$$

Avec $m=6$,

$$\begin{cases} a_{1_n} = 5a_{1_{n-2}} - 6a_{1_{n-4}} + a_{1_{n-6}} \\ a_{2_n} = 5a_{2_{n-2}} - 6a_{2_{n-4}} + a_{2_{n-6}} \\ a_{3_n} = 5a_{3_{n-2}} - 6a_{3_{n-4}} + a_{3_{n-6}} \\ a_{4_n} = 5a_{4_{n-2}} - 6a_{4_{n-4}} + a_{4_{n-6}} \\ a_{5_n} = 5a_{5_{n-2}} - 6a_{5_{n-4}} + a_{5_{n-6}} \\ a_{6_n} = 5a_{6_{n-2}} - 6a_{6_{n-4}} + a_{6_{n-6}} \end{cases}$$

A partir de maintenant, ce ne sont que des conjectures, grandement vérifiées par tableur, il ne faudrait qu'un peu de courage pour y résoudre le système (S) associé.

$m=7: a_{i_n}=6a_{i_{n-2}}-10a_{i_{n-4}}+4a_{i_{n-6}}$
$m=8: a_{i_n}=7a_{i_{n-2}}-15a_{i_{n-4}}+10a_{i_{n-6}}-a_{i_{n-8}}$

Avec ces quelques calculs, en observant les diagonales du triangle de Pascal, on conjecture, pour tout nombre de planète m le nombre de droïdes sur une planète i après $n \geq m$ siècles est

$$a_{i,n} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^{k+1} \binom{m-k}{k} a_{i,n-2k}$$

<u>Idées de preuve:</u>

- Cette formule doit pouvoir être démontrable grâce au système (S), avec de puissants outils d'algèbre linéaire
- Des arguments combinatoires plus accessibles sont cependant envisageables, comme le laisse imaginer le coefficient binomial.

<u>II) Approche par la théorie des graphes</u>

Principe de la modélisation

(i) La galaxie est représentée par un graphe orienté.
(ii) Une planète est un sommet du graphe.
(iii) L'extrémité terminale d'une arête orientée est accessible depuis l'extrémité initiale pour les droïdes.

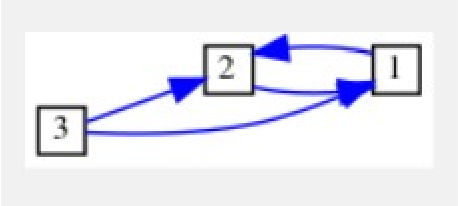


Figure 4 : Exemple de configuration de planètes.

Sauf mention contraire, les configurations de planètes seront telles que leur graphe associé soit connexe.

a) Existe-t-il des configurations de planètes qui amènent à l'extinction des robots?

On introduit le concept de "sommets liés".

Définition: Deux sommets A et B sont liés si et seulement si:
(i) Il existe une chaîne orientée reliant A à B
(ii) Il existe une chaîne orientée reliant B à A

Proposition 2.a (Caractérisation): Une configuration de planètes n'amène jamais à l'extinction des robots si et seulement si un des sommets liés admet un droïde après un certain nombre de siècles.

Preuve:

Sens direct:⇒

Supposons qu'un sommet A lié à B admette un droïde. Il le transmet aux planètes qui lui sont directement reliées. De proche en proche, par définition des sommets liés, après un certain nombre de siècles, le sommet B possédera un droïde (descendant plus ou moins lointain de celui en A). Par le même raisonnement, on en trouvera un en A après un autre certain nombre de siècles. Par itération, il est clair qu'on a un algorithme sans fin, il existera toujours un robot sur la galaxie.

Idée alternative: Par récurrence, en mettant en évidence les planètes intermédiaires dans la chaîne entre A et B, et la présence successive des descendants du robot sur chacune d'entre elles, siècle après siècle.

Sens réciproque: ⇐

Idée de preuve: Prouver dans un premier temps qu'il existe des planètes telles que, quelque soit le nombre n de siècles écoulés, il existe un entier naturel p tel que après $n+p$ siècles la planète contiennent des droïdes. Pour ce faire, argumenter sur la finitude de toute configuration.
Puis, montrer que ces robots viennent forcément d'une autre planète, à intervalles réguliers, et donc qu'il existe deux sommets liés.

Comme la question porte sur l'existence, on donne ici une configuration menant à l'extinction des robots pour tout nombre de planètes et pour n'importe quel nombre de droïdes initialement sur ces planètes.

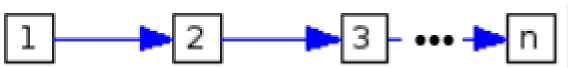


Figure 5 : Exemple de configuration menant à l'extinction.

b) Existe-t-il des configurations de planètes qui rendent stable le nombre de robots dans les planètes?

Proposition 2.b (Existence, construction): Une configuration de planètes rend stable le nombre de robots dans ses planètes si :
(i) Chacune d'entre elles est une, et une seule, fois extrémité initiale d'un arête et extrémité terminale d'une autre.
(ii) Toutes les planètes contiennent initialement le même nombre de droïdes

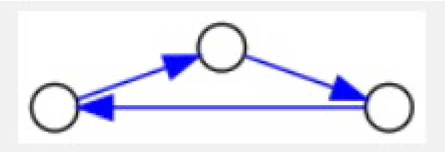


Figure 6 : Exemple de configuration à 3 planètes rendant stable le nombre de robots.

Démonstration:

On cherche à prouver que sur les configurations données, peu importe le siècle, le nombre de droïdes est le même.
Par (i), il est clair que le nombre de droïdes sur une planète m à un rang k est le nombre de droïdes au rang $k-1$ de la planète qui lui est reliée en tant qu'extrémité initiale (numérotée de manière intuitive $m-1$). Pour peu que le nombre de droïdes sur chaque planète soit le même pour tout siècle fixé, le nombre de droïdes sur chacune d'entre elles est alors bien constant. Cette dernière condition est satisfaite par (ii), par récurrence en utilisant (i).

Ces configurations (constructibles pour n'importe quel nombre de planètes) ne sont évidemment pas uniques. Tout d'abord, le nombre de droïdes égal entre les planètes peut être atteint seulement à partir d'un rang n. Cela permet des constructions avec des planètes ne contenant des droïdes que dans les premiers siècles, pour les amener à la configuration circulaire finale qui gardera la constance. De plus, différents types d'ajouts permettent de conserver la constance tout en complexifiant la configuration. Par exemple, on peut ajouter des planètes extrémités terminales d'une arête partant d'une planète appartenant à la configuration.

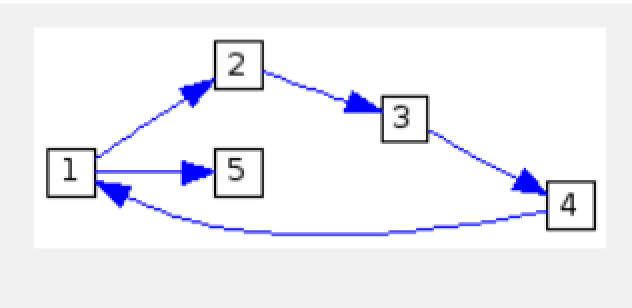


Figure 7 : Exemple de configurations comportant des ajouts (planète 5) rendant stable le nombre de robots.

III) Introduction d'un nouveau paramètre

On suppose que dès qu'il y a 2 robots ou plus sur une planète, la guerre éclate et 2 robots se détruisent (ainsi s'il y a 3 robots, à la fin de la guerre il en reste encore 1).
Que cela change-t-il dans les configurations étudiées?

Dans les configurations étudiées en partie I, cet ajout donne lieu à un nombre de robots (pour n'importe quelle planète à n'importe quel siècle) toujours inférieur à 1, mais pas à une extinction des robots.

Prouvons la majoration par 1. On s'inspire du principe dit "de la descente infinie". Supposons qu'il existe un nombre de robots supérieur à 2 sur une planète. Clairement, le nombre de robots au siècle précédent sur les planètes directement voisines est inférieur. En "remontant" les siècles, on se rend donc compte qu'il a existé une planète comportant 2 robots. Absurde, puisque ces deux-ci auraient immédiatement disparu à la suite d'une guerre. Ce raisonnement peut s'effectuer de manière rigoureuse par récurrence forte.

Expliquons la non-extinction. Il apparaît que la seule manière qu'une extinction arrive est d'avoir la configuration suivante

1	0	1	0	1	0	1

qui se généralise et se formalise en posant la condition que sur les *n* planètes, celles numérotées par un nombre impair possède un robot et les autres pas. Si le nombre de planètes est pair, il est immédiat que la configuration susmentionnée ne peut pas apparaître. Dans le cas opposé on peut déduire l'unique ligne de robots possible au siècle précédent.

0	1	0	0	0	1	0

soit plus généralement un robot sur une planète paire sur deux et aucun sur les planètes impaires.
En remontant encore d'un siècle il vient:

1	0	0	0	0	0	1

avec la contradiction voulue car il est clair que cette configuration est impossible: le robot à l'extrémité gauche (par exemple) vient forcément de la planète adjacente à droite, qui en aurait alors également envoyé un sur la planète se trouvant à sa droite, ce qui n'est pas le cas.

De cette démonstration, on retient tout de même que les cas avec un nombre de planètes égal à 1 ou 3 font exception et amènent à une extinction.

On remarque donc que les cas d'extinction sont beaucoup plus fréquents avec cette condition. L'exemple suivant montre un tel cas, alors même qu'il suivait une orientation totalement différente sans ce paramètre.

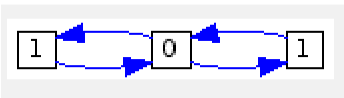


Figure 8 : Exemple d'extinction des robots dans le cas de 3 planètes alignées. Le chiffre indiqué sur chaque sommet donne ici le nombre de droïdes initialement présents.

De la même manière, il existe beaucoup plus de configurations rendant stable le nombre de robots sur les planètes. Nous en donnons à nouveau un exemple.

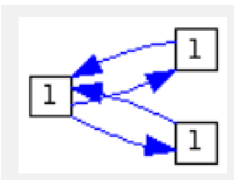


Figure 9 : Exemple de configuration stable avec 3 planètes.

En effet, une fois le premier siècle passé, on s'aperçoit que les deux planètes de droite comporteront toujours 1 droïde tandis que celle de gauche 0 (après en avoir reçu 2 la guerre conduit à leur destruction).