

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Caractériser les graphes à n sommets sans P_n induit

année 2021-2022

Alba Guerriero–Mareigner, Théa Mercadier, Charlotte Parsy, Alice Fraysse, (en 4ème) Loïs Roche, Jan Vaissière, Gallen Marcq, Mailis Poux, Sophie Pradel (en 1ère).

Enseignants: A.Bédurier, P.Labit, L.Thomas, C.Bousquet

Établissements: Collège Georges Pompidou, Cajarc et Lycée Raymond Savignac, Villefranche de Rouergue.

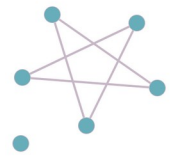
Chercheur: Bertrand Jouve

1-Sujet:

Après avoir introduit la notion de graphe, on définit celle de chemin induit. Un chemin induit de longueur $n-1$ sur un graphe est une succession de n sommets et $n-1$ arêtes du graphe pour lequel il n'existe pas dans le graphe et entre les sommets de ce chemin d'autres arêtes que celles du chemin. Un tel chemin est noté P_n . La question est alors de caractériser les graphes qui sont sans P_n . A ce jour, on ne connaît pas de caractérisation simple de tels graphes pour n quelconque. En revanche, le problème est solvable pour des petites valeurs de n : $n=2$, $n=3$, $n=4$. C'est l'objet de cette recherche.

2-L'essentiel à savoir:

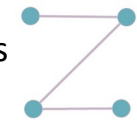
- **Graphe** : Un graphe est un ensemble de points appelés sommets reliés ou non.



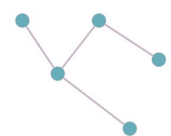
- **Arête** : Une arête est une liaison entre deux sommets.



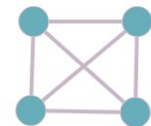
- **Chemin** : Un chemin est une combinaison d'une ou plusieurs arêtes.



- **Graphe connexe** : Un graphe connexe est un graphe en un seul morceau.



- **Graphe complet** : Un graphe complet est un graphe dans lequel tous les sommets sont reliés entre eux deux à deux.

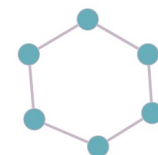


- **Graphes unions** : Un graphe union est un graphe qui est composé de plusieurs graphes complets.

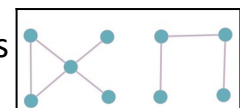
- **Feuille** : Une feuille est un point relié par une seule arête au graphe.



- **Cycle** : Un cycle est un graphe où les points sont tous reliés et forment une boucle.



- **P_n** : Un chemin dit " P_n " est un chemin avec n sommets distincts deux à deux.



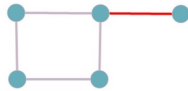
- **P_n induit** : Un chemin dit " P_n induit" est un chemin qui comporte n nombre de sommets, a une longueur de $n-1$ arêtes, où il n'existe pas d'autre chemin pour arriver au même sommet.

3-Notre stratégie

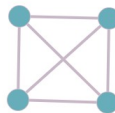
Pour trouver des graphes sans P_n induit, nous avons fait beaucoup d'exemples puis nous avons éliminé les graphes avec P_n induit.

4-Nos hypothèses

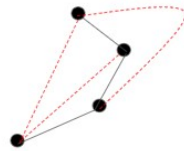
Premièrement, nous avons trouvé qu'un graphe connexe quelconque qui contient une feuille, contient au moins un P_2 induit et au moins un P_3 induit si le graphe admet au moins 3 sommets.



Ensuite, nous avons vu que si tous les points du graphe sont reliés, il n'y a pas de P_n induit pour $n \geq 3$.



Enfin, nous avons remarqué que si un graphe contient un P_n induit alors il contient un P_{n-1} induit ($n \geq 3$).



5-Nos résultats

Nous avons donc trouvé quelques caractéristiques pour chaque graphe sans P_n induit :

A-Sans P_2 induit :

Tout d'abord nous avons trouvé que dans un graphe sans P_2 induit, le graphe doit être sans arête.



B-Sans P3 induit :

Ensuite, pour les graphes sans P3 induit, il faut que le graphe n'aie pas d'arête et que les points soient isolés. Il n'y en a pas non plus si les points sont rattachés 2 à 2 ou s'il est complet. Il peut aussi être une union de graphes complets.



C-Sans P4 induit :

Nous avons trouvé que pour qu'un graphe soit sans P4 induit, il doit être soit sans arête, soit composé de moins de 3 points ou alors qu'il soit composé d'un graphe complet.

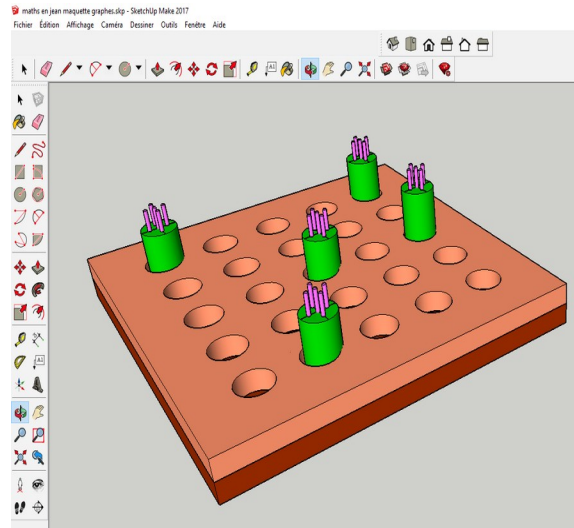
6-Règles pour la construction par répétition des graphes sans P4 induit

Pour construire des graphes sans P4 induit nous avons trois règles. Tout d'abord lorsqu'un graphe a un sommet il est forcément sans P4 induit. Ensuite lorsqu'un graphes n'a pas de P4 induit son complémentaire l'est lui aussi. Enfin l'union disjointe de graphes sans P4 induit est elle aussi sans P4 induit.



7-Réalisation d'une maquette

Nous avons réalisé une maquette pour représenter les graphes. Premièrement sur sketchup (un logiciel utilisé en technologie pour modéliser) en 2D, puis en grandeur nature en 3D.

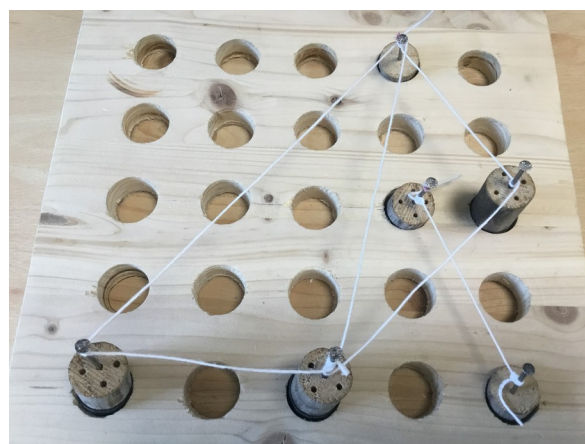


Pour cela, nous avons pris une planche dans laquelle nous avons fait des trous afin de pouvoir y mettre des petits plots en bois.

Nous avons créé un système avec des ficelles pour relier les plots entre eux et pouvoir faire des graphes.

8-Vérification de la connexité des graphes:

Avec cette maquette, on peut vérifier la connexité des graphes : si on soulève un plot, tous les autres doivent se soulever avec. S'il reste un ou plusieurs plots dans les trous, le graphe confectionné n'est pas connexe.





9-Conclusion

Nous avons trouvé quelques propriétés pour les graphes P_1 , P_2 , P_3 ou P_4 induits, mais le travail n'est pas terminé. Il reste sûrement des propriétés à trouver pour P_4 induit et les chemins plus longs.

Nous n'avons pas réussi à trouver des propriétés dont on est sûr.e.s qu'elles s'appliquent à n'importe quelle longueur de chemin et avec lesquelles on peut être sûr.e.s de construire un graphe sans P_n induit.