La vie d'un plancton

Année 2021 – 2022

Elèves de 4ème : Maxime Bakal, Donovan Charousset, Gabriel Gravel et Maxime Paralieu.
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignante : Florence FERRY.
Chercheur : Olympio HACQUARD.

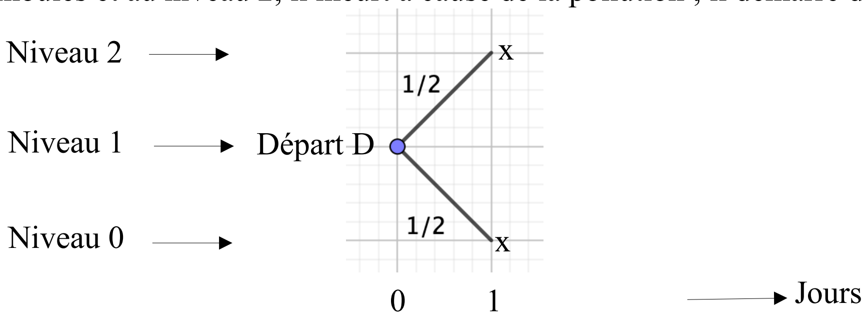
Le sujet : On considère un plancton qui se déplace verticalement dans la mer. Chaque jour, il ira soit d'une unité vers le haut, soit d'une unité vers le bas avec une probabilité de 1/2. Le fond de la mer (au niveau 0) est recouvert de moules, prédatrices de planctons. La surface (au niveau a) est recouverte d'une nappe de pollution qui tue le plancton dès qu'il s'en approche. Sachant que le plancton part d'une position *x* comprise entre 0 et a, est-il possible que le plancton survive indéfiniment ? Au bout de combien de temps en moyenne sera-t-il tué ? Selon *x*, est-ce qu'il a plus de chances que ce soit par les moules ou par la pollution ?

Nos résultats : Nous avons démontré que le plancton n'avait aucune chance de vivre quelque soit le nombre de niveaux entre 1 et 6 et son niveau de départ ; pour des niveaux plus grands nous pensons que le résultat reste le même mais ce n'est qu'une conjecture. Calculer le temps moyen de mort du plancton reste une question ouverte.

Notation : Dans la suite de l'article nous noterons P (M_i) et P (V_i) les probabilités respectives de mourir et de vivre à l'étape i. « x » au bout d'une branche des arbres de probabilités indiquera que le planton meurt. Nous commençons notre étude par un petit nombre de niveaux que nous augmentons ensuite.

I – Trois niveaux

Pour comprendre comment évolue le plancton, traçons un arbre de probabilités. Au niveau 0, le plancton est mangé par les moules et au niveau 2, il meurt à cause de la pollution ; il démarre donc du niveau 1.

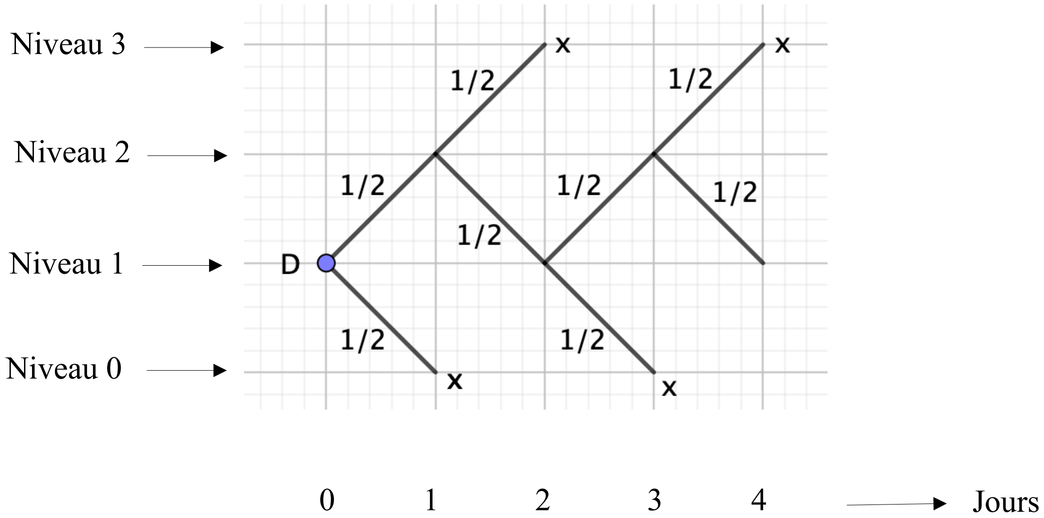


S'il monte, il arrive au niveau 2 et meurt de la pollution, s'il descend, il arrive au niveau 0 et est mangé par les moules. Donc au jour 1 : P (M_1) = 1 et P (V_1) = 0.

Conclusion : pour 3 niveaux, le plancton meurt le jour 1, il n'a aucune chance de vivre.

II – <u>Quatre niveaux</u>

Le plancton démarre du niveau 1.



Chaque jour, il n'y a qu'un seul chemin qui fait vivre le plancton, nous calculons donc la probabilité de vivre et nous en déduirons celle de mourir.

$P(V_1)=\frac{1}{2}$ Donc : $P(M_1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P(V_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$ Donc : $P(M_2)=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$

$P(V_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$ Donc : $P(M_3)=1-\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}$

$P(V_4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$ Donc : $P(M_2)=1-\frac{1}{2^4}=\frac{15}{16}$

Puisque chaque jour, un seul chemin mène à la vie, la probabilité de vivre est multipliée par 1/2 chaque jour. Ainsi au jour *n :*

$P(V_n)=\frac{1}{2^n}$ et $P(M_n)=1-\frac{1}{2^n}$

Pour visualiser l'évolution de la probabilité de vivre du plancton au fil des jours, nous avons réalisé un graphique avec en abscisses, le nombre de jours et en ordonnées, la probabilité de vivre.

Probabilité de vivre

Nombre de jours

Remarque : la courbe décroît très vite ; la probabilité de vivre du plancton se rapproche de zéro.

Voici quelques résultats qui confirment cette remarque :

$P(V_4) = 0{,}0625$ (6,25%) $P(M_4) = 0{,}9375$ (93,75%)
$P(V_7) = 0{,}007815$ (7,8%) $P(M_7) = 0{,}9921875$ (99%)
$P(V_{10}) = 0{,}0009765625$ (0,1%) $P(M_{10}) = 0{,}9990234375$ (99,9%)

Démonstration :

On a : $P(V_n)=\frac{1}{2^n}$

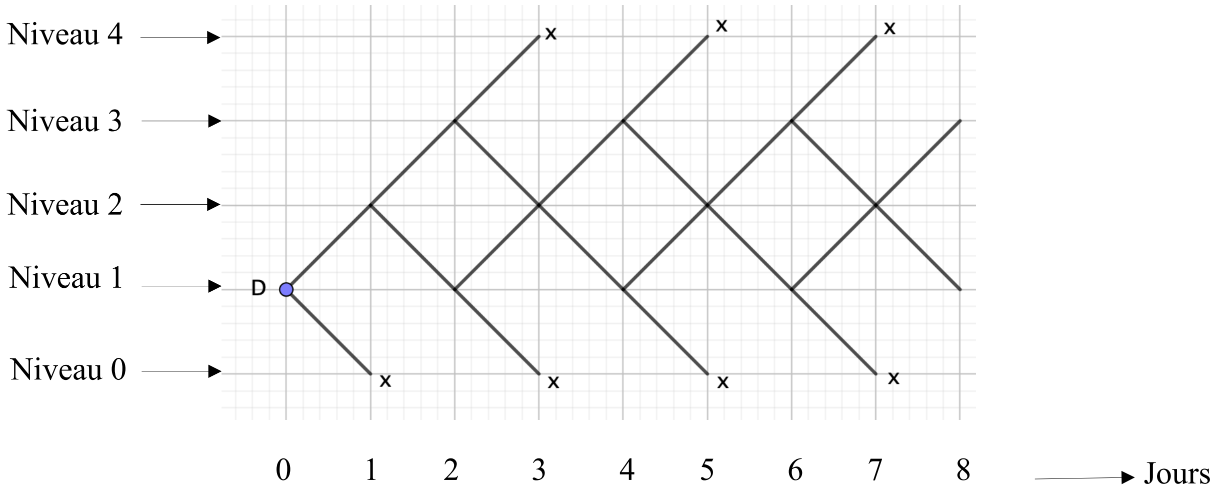
Lorsque n devient très grand, 2^n devient également très grand et la probabilité de vivre $\frac{1}{2^n}$ devient infime, elle se rapproche de zéro ; la probabilité de mourir $1-\frac{1}{2^n}$, elle, se rapproche donc de 1. Donc le plancton a toutes les chances de mourir, il ne vivra pas indéfiniment.

Remarque : le plancton pourrait démarrer au niveau 2 et ce serait la même situation, car l'arbre est symétrique. Cependant, si le plancton part plus près des moules, on conjecture qu'il mourra plus rapidement en étant mangé par les moules que par la pollution, et inversement s'il part d'un niveau plus près de la pollution.

Conclusion : Pour 4 niveaux, quel que soit le niveau de départ, le plancton mourra un jour.

III – Cinq niveaux

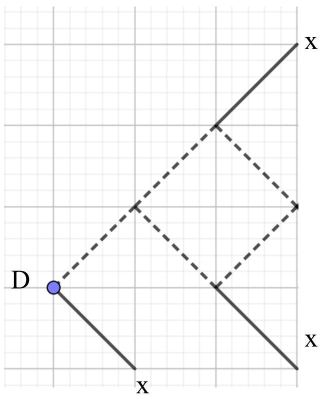
Le plancton démarre au niveau 1 ou au niveau 3 ; s'il démarre à 1, il mourra plus rapidement les moules et s'il part du niveau 3, la couche de pollution le tuera plus rapidement. Les probabilités se calculent de la même façon. Voici l'arbre de probabilités ; nous ne mettrons plus ces probabilités sur chaque branche (elle sont toutes de 1/2).



$P(V_1)=\frac{1}{2}$ (il n'y a qu'une branche sur les deux qui mène à la vie).

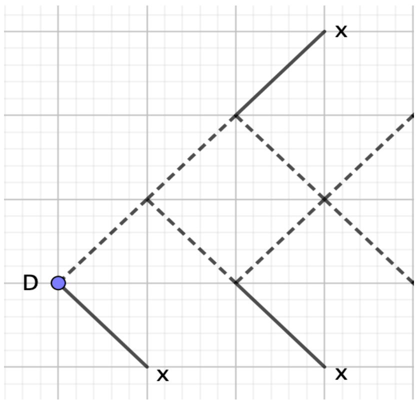
$P(V_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ (Deux chemins mènent à la vie).

Au jour 3, observons l'arbre.



Les chemins menant à la vie au jour 3 sont indiqués en pointillés : il y en a deux comme à l'étape précédente donc :

$$P(V_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2^2}$$



Les chemins menant à la vie double au jour 4, il y en a quatre donc :

$$P(V_4)=(\frac{1}{2})^4\times 4=\frac{1}{2^2}$$

Au jour 5, le nombre de chemins reste le même donc : $P(V_5)=(\frac{1}{2})^5\times 4=\frac{1}{2^3}$

Remarque :
- Lorsqu'on est à un jour pair, il y a deux fois plus de chemins menant à la vie qu'au jour précédent.
- Lorsqu'on est à un jour impair, le nombre de chemins menant à la vie reste identique par rapport au jour précédent.

Ceci nous permet de généraliser la probabilité de vivre au jour *n.* Soit *k* un entier strictement positif.

- Au jour $n = 2k$, il y a 2^k chemins menant à la vie : $P(V_{2k})=(\frac{1}{2})^{2k}\times 2^k=\frac{1}{2^k}$

- Au jour $n = 2k + 1$, il y a encore 2^k chemins menant à la vie : $P(V_{2k}+1)=(\frac{1}{2})^{2k+1}\times 2^k=\frac{1}{2^{k+1}}$

<u>**Conclusion**</u> : Lorsque *k* devient très grand, les probabilités de vivre $\frac{1}{2^k}$ et $\frac{1}{2^{k+1}}$ se rapprochent de plus en plus de 0 et donc le plancton mourra très certainement un jour.

<u>**Remarque**</u> : Pour 5 niveaux, si on démarre au niveau 2, le calcul des probabilités sera le même avec un décalage au début.
Ainsi : $P(V_1)=1$

$$P(V_2)=(\frac{1}{2})^2\times 2=\frac{1}{2}$$

$$P(V_3)=(\frac{1}{2})^3\times 2^2=\frac{1}{2}$$

$$P(V_4)=(\frac{1}{2})^4\times 2^2=\frac{1}{2^2}$$

$$P(V_5)=(\frac{1}{2})^5\times 2^3=\frac{1}{2^2}$$

Avec des remarques identiques sur le nombre de chemins qui double ou reste identique suivant le jour, on peut généraliser pour *k* entier strictement positif.

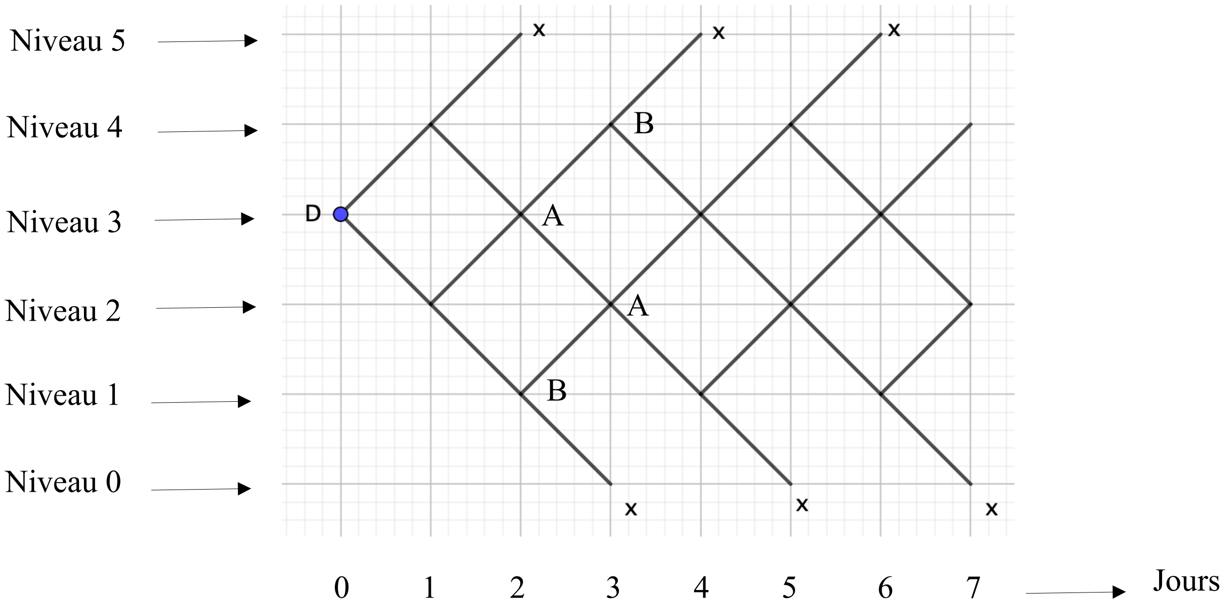
$$P(V_{2k})=\frac{1}{2^{2k}}\times 2^k=\frac{1}{2^k} \quad \text{et} \quad P(V_{2k+1})=(\frac{1}{2})^{2k+1}\times 2^{k+1}=\frac{1}{2^k}$$

La conclusion est donc la même, cette probabilité se rapproche de 0 lorsque *k* devient grand.

<u>**Conclusion**</u> : Pour 5 niveaux, quel que soit le niveau de départ du plancton, celui-ci mourra un jour.

IV – <u>Six niveaux</u>

Nous commençons par considérer un départ à deux ou à trois, les calculs de probabilités seront identiques.



On remarque qu'il n'y a que deux sortes de nœuds différents : ceux qui sont l'arrivée de deux chemins (notés A) et ceux qui ne sont l'arrivée que d'un chemin (notés B), comme vous pouvez le voir sur l'arbre ci-dessus. Chaque jour, à partir du jour 2, il y a un nœud A et un nœud B.

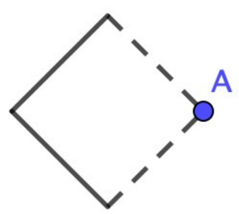
On compte , à chaque étape, le nombre de chemins menant à la vie.

Jour	Nombre de chemins
1	2
2	3
3	5
4	8
5	13
6	21

Les nombres de chemins vers la vie semblent suivre la suite de Fibonacci (à part les deux premiers termes qui en sont absents).

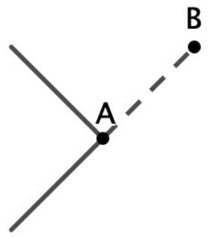
On peut démontrer ce résultat grâce à la remarque sur les nœuds A et B ci-dessus.
Un jour donné (supérieur à 1), il y a un nœud A et un nœud B. Pour connaître le nombre de chemins menant à la vie ce jour là, il faut ajouter ceux qui arrivent en A avec ceux arrivant en B.
- Le nombre de chemins menant à la vie qui arrivent à un nœud de type A correspond exactement au nombre de chemins menant à la vie à l'étape précédente. En effet, à l'étape précédente, une seule branche se rajoute à chaque chemin de vie.

Illustration :



- Le nombre de chemins menant à la vie qui arrivent à un nœud de type B correspond au nombre de chemins menant à la vie arrivant d'un nœud de type A à l'étape précédente, ce qui, d'après ce qu'on vient de dire correspond exactement au nombre de chemins menant à la vie à l'étape précédente.

Illustration :

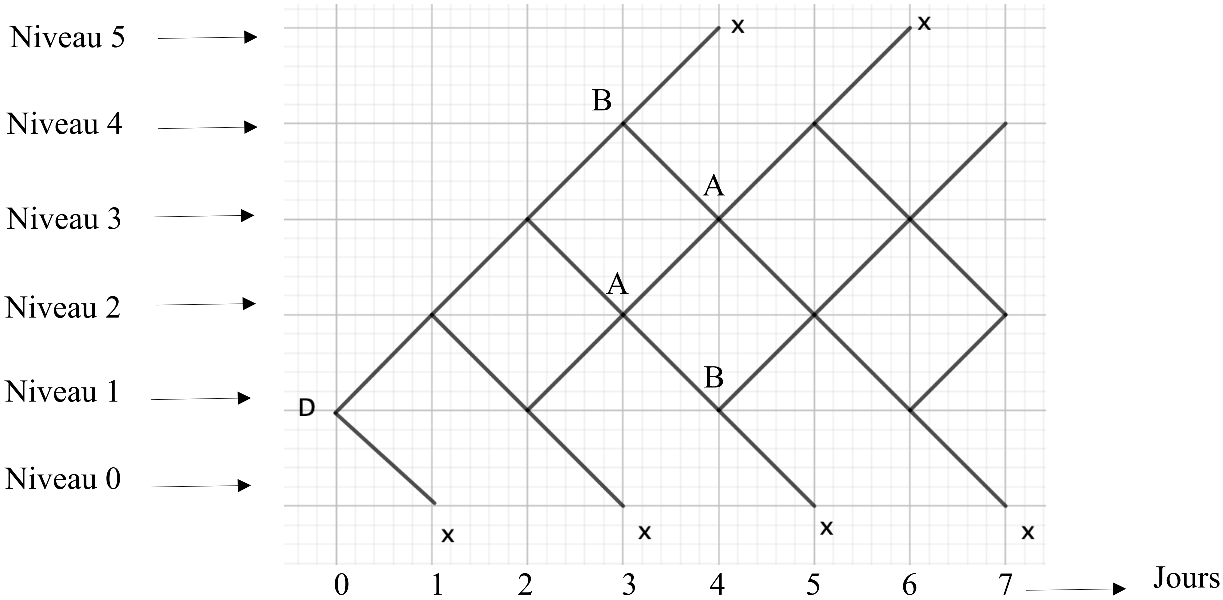


Donc le nombre de chemins suit bien la suite de Fibonacci et on peut donc poursuivre notre tableau et calculer les probabilités pour le plancton de rester en vie en augmentant le nombre de jours.

Jour	Nombre de chemins vers la vie	Calcul de la probabilité de vie	Probabilité de vie
1	2	$\frac{1}{2}\times 2$	1
2	3	$(\frac{1}{2})^2\times 3$	$\frac{3}{2^2}$
3	5	$(\frac{1}{2})^3\times 5$	$\frac{5}{2^3}$
4	8	$(\frac{1}{2})^4\times 8$	$\frac{8}{2^4}$
5	13	$(\frac{1}{2})^5\times 13$	$\frac{13}{2^5}$
6	21	$(\frac{1}{2})^6\times 21$	$\frac{21}{2^6}$
7	34	$(\frac{1}{2})^7\times 34$	$\frac{34}{2^7}$
8	55	$(\frac{1}{2})^8\times 55$	$\frac{55}{2^8}$
9	89	$(\frac{1}{2})^9\times 89$	$\frac{89}{2^9}$
10	144	$(\frac{1}{2})^{10}\times 144$	$\frac{144}{2^{10}}$

La probabilité de vie est le produit du nombre de chemin par 1/2 élevé à la puissance correspondant au nombre de jours. Le numérateur augmente mais on conjecture que le dénominateur augmente beaucoup plus vite que lui, car même si le numérateur augmente selon la suite de Fibonacci, le dénominateur augmente avec des puissances de 2, ce qui va beaucoup plus vite. Donc la probabilité de vivre se rapproche de 0 et donc le plancton mourra un jour.

Maintenant, on passe à un arbre toujours à 6 niveaux , mais avec un départ à 1 ou à 4.



Remarque : le calcul du nombre de chemins est le même ainsi que le calcul des probabilités.

Étape	Nombre de chemins menant à la vie	Probabilité de vie
1	1	$\frac{1}{2}$
2	2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{1}{2}$
3	3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 3 = \frac{3}{8}$
4	5	$\frac{5}{2^4}$
5	8	$\frac{8}{2^5}$
n	k	$\frac{k}{2^n}$

Le même raisonnement que le précédent s'applique ici : le dénominateur augmente plus vite que le numérateur donc la probabilité de vivre tendra vers 0 et le plancton mourra un jour.

IV – Conclusion

Au delà de 6 niveaux, les arbres et les calculs sont devenus fastidieux. Nous conjecturons que le principe reste le même :

- à chaque étape, il y a deux sortes de nœuds (chaque étape n'a pas forcément les mêmes nœuds

qu'à l'étape précédente ; par exemple, pour sept niveaux avec un départ au niveau 2, à partir du jour 3, les jours pairs il y a deux nœuds de type A et les jours impairs, deux nœuds de type B et un nœud de type A et nous pouvons donc calculer le nombre de chemins un jour *n* donné en fonction des nombres de chemins trouvés aux deux étapes précédentes ; ce calcul est une somme. Ce nombre de chemins, qui sera le dénominateur de la probabilité de vie calculée, augmente donc.
- Le dénominateur sera une puissance de 2 qui augmentera (ce n'est pas une croissance stricte) en fonction du nombre de jours.

Le dénominateur augmentera plus vite que le numérateur et donc le plancton mourra un jour quelle que soit la configuration de départ, nombre de niveaux et niveau de départ du plancton.

La dernière question posée, qui était « Au bout de combien de temps en moyenne le plancton sera-t-il tué ? » reste une question ouverte.