Un problème d'urnes et de boules

Année 2023 – 2024

Matthieu Diot, Agathe Figueras et Gaël Rousset, élèves de 4e.

Établissement : Collège Alain-Fournier, Orsay.

Enseignante : Florence Ferry.

Chercheur : Emmanuel Kammerer, Ecole Polytechnique.

Le sujet

On se donne deux urnes identiques, N boules blanches et N boules noires indistinguables au toucher. On répartit les boules blanches et les boules noires dans les deux urnes selon notre choix. Les yeux bandés, on tire ensuite une boule dans l'une des deux urnes au hasard.

- A-t-on autant de chances de tirer une boule blanche que de tirer une boule noire ?
- Comment maximiser ses chances de tirer une boule blanche ?
- Et si on augmente le nombre d'urnes ?
- Et si on n'a pas le même nombre de boules blanches que de boules noires ?

Résultats

Nous avons trouvé la meilleure répartition possible des boules dans les urnes pour maximiser les chances de tirer une boules blanche. Nous avons démontré que la configuration trouvée était la meilleure quelque soit le nombre de boules blanches, de boules noires et d'urnes.

Dans la suite de l'article nous supposerons qu'aucune urne n'est vide et nous utiliserons les notations suivantes :

P_b : la probabilité de tirer une boule blanche.

P_n : la probabilité de tirer une boule noire.

N : le nombre de boules blanches ou noires.

Voici aussi deux remarques qui permettront de faire nos calculs de probabilités :

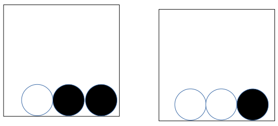
1 – Pour calculer P_b, on ajoute toutes les probabilités de tirer une boule blanche dans chaque urne puis on divise par le nombre d'urnes (car l'urne est d'abord choisie uniformément au hasard).

2 – $P_b + P_n = 1$.

I – Deux urnes

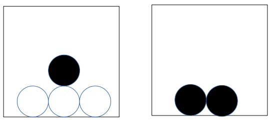
1 - Premiers exemples

Exemple 1 : $N = 3$

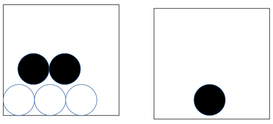


$$P_b = \frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{3}{3}}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{ainsi} \quad P_n = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = P_b$$

Voici d'autres répartitions possibles :

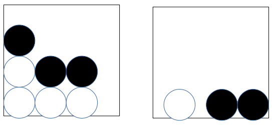


$$P_b = \frac{\frac{3}{4}+0}{2} = \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad P_n = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

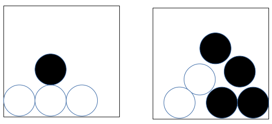


$$P_b = \frac{\frac{3}{5}+0}{2} = \frac{3}{10} \quad \text{et} \quad P_n = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

Exemple 2 : $N = 5$



$$P_b = \frac{\frac{4}{7}+\frac{1}{3}}{2} = \frac{19}{42} \quad \text{et} \quad P_n = \frac{23}{42}$$

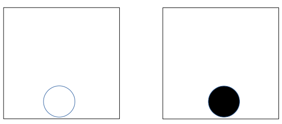


$$P_b = \frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{6}}{2} = \frac{13}{24} \quad \text{et} \quad P_n = \frac{11}{24}$$

Avec ces exemples, nous pouvons répondre à notre première question : P_b et P_n ne sont pas forcément égales.

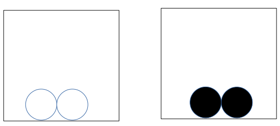
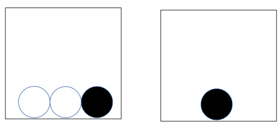
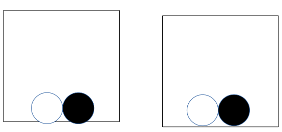
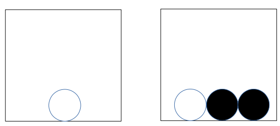
2 - Comment répartir les boules pour que P_b soit la plus grande possible ?

– Pour $N = 1$, il y n'y a qu'un cas puisqu'aucune urne ne doit être vide ; c'est donc la répartition cherchée.



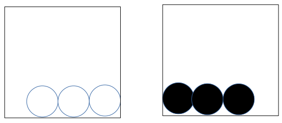
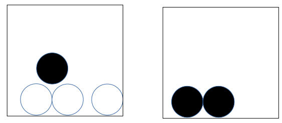
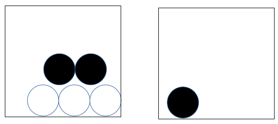
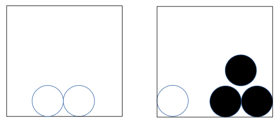
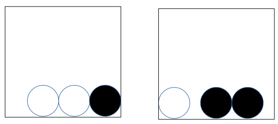
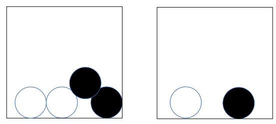
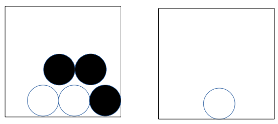
$$P_b = \frac{1}{2} = P_n$$

– Pour $N = 2$, on compte quatre cas.

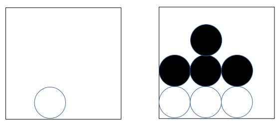
 $P_b = \frac{1}{2} = P_n$	 $P_b = \frac{1}{3}$
 $P_b = \frac{1}{2} = P_n$	 $P_b = \frac{2}{3}$

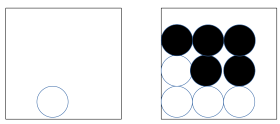
P_b est maximale dans le dernier cas.

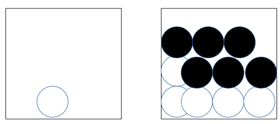
– Pour $N = 3$, il y a 7 cas.

 $P_b = \frac{1}{2} = P_n$	 $P_b = \frac{3}{8}$
 $P_b = \frac{3}{10}$	 $P_b = \frac{5}{8}$
 $P_b = \frac{1}{2} = P_n$	 $P_b = \frac{1}{2} = P_n$
 $P_b = \frac{7}{10}$ ⟶	P_b est maximale dans ce cas.

Voici les configurations où P_b est maximale pour un nombre N supérieur à 3.

$N = 4$  -------> $P_b = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

$N = 5$  -------> $P_b = \frac{13}{18}$

$N = 6$  -------> $P_b = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$

Nous pouvons grâce à tous ces cas, poser une conjecture : dans le cas de 2 urnes, il semble que P_b soit maximale lorsque les N boules noires sont dans une urnes avec $N - 1$ boules blanches ; la 2ème urne contient une seule boule blanche.
On peut comprendre cette répartition optimale : si dans une urne il n'y a qu'une boule blanche ou 2 ou 3..., P_b dans cette urne sera toujours 1 ; donc il faut n'en mettre qu'une et augmenter P_b dans la deuxième urne.

Démontrons que cette configuration donne P_b maximale.

Supposons qu'on est dans cas que l'on pense être la solution pour que P_b soit maximale.

Dans ce cas :

$$P_{bmax} = P_b = \frac{1+\frac{N-1}{2N-1}}{2} = \frac{\frac{2N-1+N-1}{2N-1}}{2} = \frac{3N-2}{2\times(2N-1)} = \frac{3N-2}{4N-2} = 1-\frac{N}{4N-2}$$

Nous devons poser de nouvelles notations :

b_i est le nombre de boules blanches dans l'urne i

et n_i, le nombre de boules noires dans l'urne i.

Si les boules sont réparties au hasard $P_b=\frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{b_1+n_1}+\frac{b_2}{b_2+n_2}\right)$.

Démontrons alors que $\frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{b_1+n_1}+\frac{b_2}{b_2+n_2}\right) \leq \frac{3\times N-2}{4N-2}$, c'est à dire que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{b_1+n_1}+\frac{b_2}{b_2+n_2}\right) \leq 1-\frac{N}{4N-2}$$

Pour démontrer que la probabilité maximale d'avoir une boule blanche est $1-\frac{N}{4N-2}$, nous allons démontrer que la probabilité minimale d'avoir une boule noire est de $\frac{N}{4N-2}$.

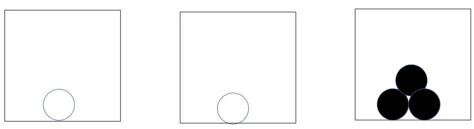
La probabilité d'avoir une boule noire en particulier parmi toutes les boules dans l'urne i est $\frac{1}{2(n_i+b_i)}$ (1). Ainsi la probabilité minimale d'avoir une boule noire en particulier parmi toutes les boules est de $\frac{1}{2(2N-1)}$ puisque $n_i+b_i \leq 2N-1$ (dans l'autre urne, il doit y avoir au moins une boule).

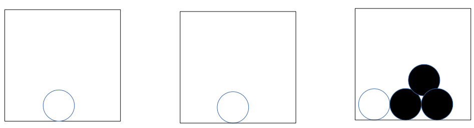
En multipliant la probabilité minimale d'avoir une boule noire en particulier par le nombre de boules noires, on obtient que la probabilité minimale d'avoir une boule noire est $\frac{1}{2(2N-1)}\times N = \frac{N}{4N-2}$ et donc que la probabilité maximale d'avoir une boule blanche est $1-\frac{N}{4N-2}$.

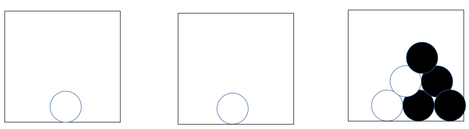
Conclusion : P_b est maximale dans la configuration décrite ci-dessus, dans notre conjecture.

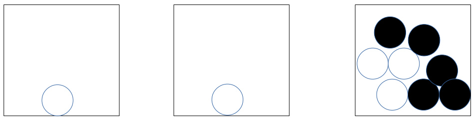
II – On augmente le nombre d'urnes

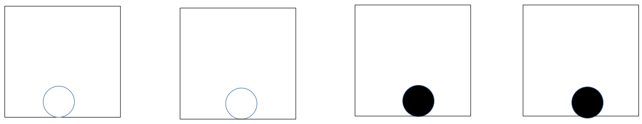
Voici des configurations trouvées où P_b est maximale ; on fait varier le nombre d'urnes et N.

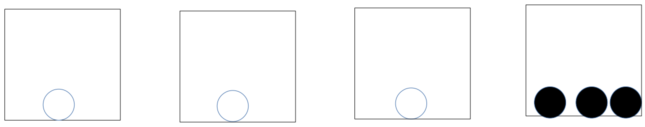
3 urnes - N = 2  -------> $P_b=\frac{2}{3}$

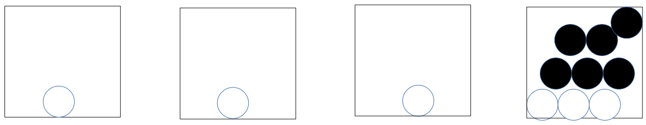
3 urnes - N = 3  -------> $P_b=\frac{3}{4}$

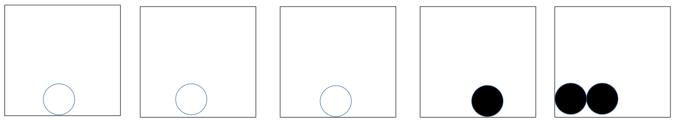
3 urnes - N = 4  -------> $P_b=\frac{7}{9}$

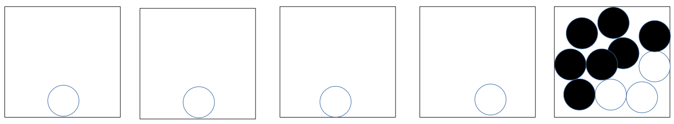
3 urnes - $N = 5$  -------> $P_b = \frac{19}{24}$

4 urnes - $N = 2$  -------> $P_b = \frac{1}{2}$

4 urnes - $N = 3$  -------> $P_b = \frac{3}{4}$

4 urnes - $N = 6$  -------> $P_b = \frac{7}{8}$

5 urnes - $N = 3$  -------> $P_b = \frac{3}{5}$

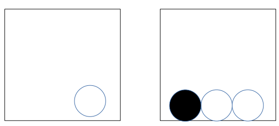
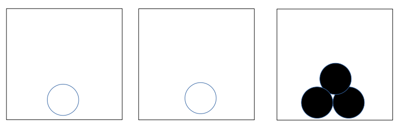
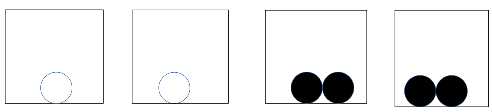
5 urnes - $N = 7$  -------> $P_b = \frac{43}{50}$

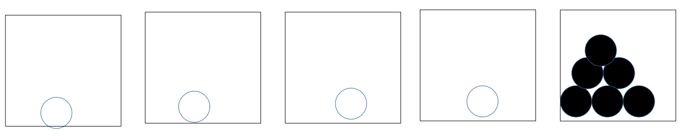
Conjecture : *pour avoir P_b maximale, on place une boule blanche seule dans autant d'urnes que possibles ; s'il en reste, on les place toutes dans la dernière urne avec toutes les boules noires. Sinon, on remplit les dernières urnes avec les boules noires peu importe comment*.

Cette conjecture sera démontrée dans le III.

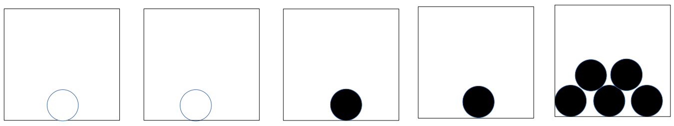
III – Le nombre de boules blanches n'est pas forcément le même que le nombre de boules noires.

Voici des configurations trouvées où P_b est maximale.

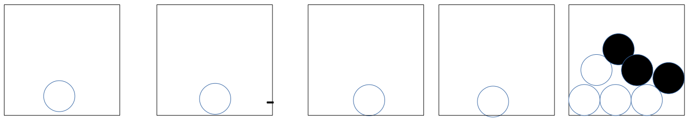
$x = 2$ $b = 3$ $n = 1$ 	$x = 3$ $b = 2$ $n = 3$ 
$x = 4$ $b = 2$ $n = 4$ 	

$x = 5$; $b = 4$ et $n = 6$ 

$x = 5$; $b = 2$ et $n = 7$



$x = 5$; $b = 8$ et $n = 3$



Conjecture : *la probabilité optimale d'avoir une boule blanche est de mettre une boule blanche dans les $x - 1$ premières urnes et de mettre le reste dans la dernière urne avec toutes les boules noires. Si le nombre de boules blanches n'est pas suffisant, on en place une dans les b premières urnes et on remplit les autres urnes avec les boules noires placées indifféremment.*

<u>Démonstration</u>

Nous noterons :

- x le nombre total d'urnes.
- t le nombre total de boules.
- n le nombre total de boules noires ; n_i : le nombre de boules noires dans l'urne i.
- b le nombre total de boules blanches ; b_i : le nombre de boules blanches dans l'urne i.
- i est un entier tel que $1 \leq i \leq x$.

– Premier cas : $b \geq x-1$

$$\begin{aligned}
P_b &= \frac{x-1+\dfrac{b-x+1}{t-x+1}}{x} = \frac{x-1}{x}+\frac{b-x+1}{x(t-x+1)} = \frac{(t-x+1)(x-1)}{x(t-x+1)}+\frac{b-x+1}{x(t-x+1)} \\
&= \frac{(t-x+1)(x-1)+b-x+1}{x(t-x+1)} = \frac{tx-t-x^2+x+x-1+b-x+1}{x(t-x+1)} = \frac{tx+x+b-x^2-t}{x(t-x+1)} \\
&= \frac{tx+x+b-x^2-b-n}{x(t-x+1)} = \frac{tx+x-x^2-n}{x(t-x+1)} = \frac{x(t-x+1)-n}{x(t-x+1)} \\
&= \frac{x(t-x+1)}{x(t-x+1)}-\frac{n}{x(t-x+1)} = 1-\frac{n}{x(t-x+1)}
\end{aligned}$$

Pour démontrer que cette probabilité est maximale nous démontrons que la probabilité minimale d'avoir une noire est de $\frac{n}{x(t-x+1)}$.

En effet, la probabilité d'avoir une boule noire particulière parmi toutes les boules dans l'urne i est de $\frac{1}{x(n_i+b_i)}$. Ainsi la probabilité minimale d'avoir une boule noire en particulier est de $\frac{1}{x(t-x+1)}$ puisque $n_i+b_i \leq t-x+1$ (dans les $x - 1$ autres urnes il doit y avoir au moins une boule pour chacune de ses urnes).

En multipliant la probabilité d'avoir une boule noire en particulier par le nombre de boules noires, on a la probabilité minimale d'avoir une boule noire : $\frac{1}{x(t-x+1)} \times n = \frac{n}{x(t-x+1)}$.

Ainsi, la probabilité maximale d'avoir une boule blanche dans le cas où $b \geq x-1$ est bien de $1-\frac{n}{x(t-x+1)}$.

– Deuxième cas : $b < x - 1$

Nous devons démontrer que la probabilité optimale d'avoir une boule est obtenue lorsque il y a une boule blanche dans les b premières urnes et une boule noire dans les $x - b - 1$ suivantes et le reste dans la dernière urne (2).

Dans la configuration de notre conjecture $P_b = \frac{b}{x}$.

Démontrons que cette probabilité est maximale. Nous savons que la probabilité d'avoir une boule blanche en particulier est inférieure ou égale à $\frac{1}{x}$.

Or au total il y a b boules blanches. Comme $b < x–1$, la probabilité maximale d'avoir une boule blanche est inférieure ou égale à $\frac{1}{x} \times b = \frac{b}{x}$.

Notre conjecture est démontrée.

Conclusion

Nous avons trouvé comment répartir les boules blanches et noires, peu importe leur nombre, dans un nombre d'urnes donnés, pour que la probabilité de tirer une boule blanche soit maximale.

Notes d'édition

(1) Plus précisément : La probabilité d'avoir une boule noire en particulier est égale à $\frac{1}{2(n_i+b_i)}$ *si elle se trouve dans l'urne i.*

Dans le raisonnement suivant, on montre que $1/(4N–2)$ et $N/(4N\text{-}2)$ sont inférieurs ou égaux aux probabilités d'obtenir une boule noire donnée et d'obtenir une boule noire quelle qu'elle soit, mais pas que ce sont les probabilités minimales. C'est parce que de plus on trouve ces valeurs dans le cas où toutes les boules noires sont dans la même urne que ce sont bien les probabilités minimales.

(2) Comme énoncé dans la conjecture, après avoir placé une boule blanche dans b urnes, on peut répartir indifféremment les boules noires dans les $x – b$ urnes restantes, avec au moins une boule dans chacune.