Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Les têtes chercheuses

Année 2022 – 2023

Élèves de 4è : Aurélien Petit, Louise Romelot, Inès Trancoso.

Établissements : Collège Alain-Fournier et Collège Alexander Fleming.

Enseignantes : Florence Ferry et Delphine Fillion.

Chercheurs : Emmanuel KAMMERER, Ecole polytechnique Paris-Saclay et Balthazar Flechelles à l'IHES à Bures sur Yvette.

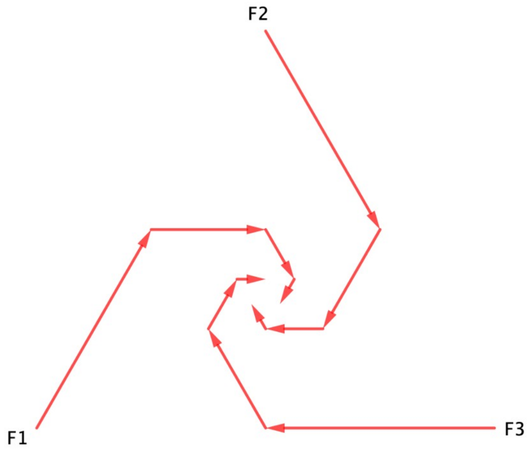
Le sujet : Trois fusées sont disposées sur les sommets d'un triangle équilatéral de deux kilomètres de côté. La première pointe sur la deuxième, la deuxième sur la troisième et la troisième sur la première. En une seconde, les trois fusées avancent d'un kilomètre le long du triangle vers leur cible. Puis elles se rendent compte que leur cible s'est déplacée et se réajustent. En une demi-seconde, elles parcourent 0,5 km dans la nouvelle direction, elles réajustent encore leur direction, etc.

- **A quoi ressemble la trajectoire des fusées ?**
- **Que se passe-t-il au bout de 2 secondes ?**
- **Et si le triangle n'est pas équilatéral ?**

Dans la suite de l'article, nous nommerons F1, F2 et F3 les trois fusées et on suppose qu'elle vont toutes à la même vitesse.

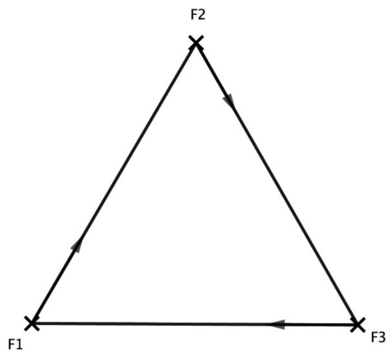
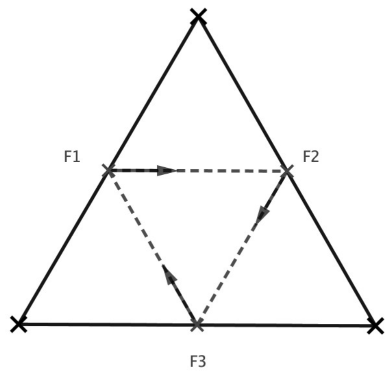
I - A quoi ressemble la trajectoire des fusées

Voici un premier tracé :

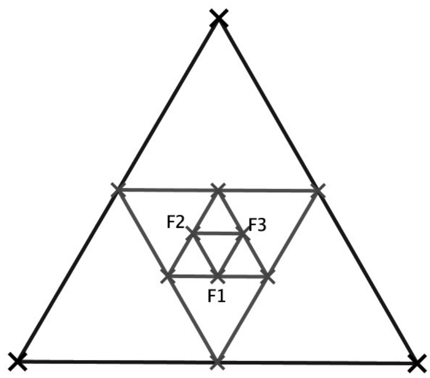


Il semble que les fusées se rapprochent de plus en plus ; elles forment une sorte de spirale.

Regardons les triangles sur lesquelles la trajectoire s’appuie :

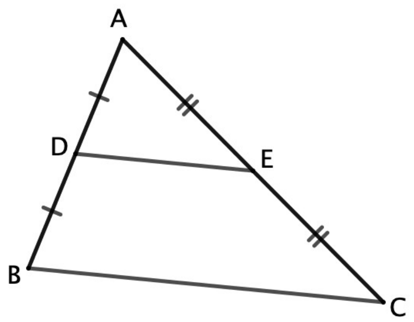
<table>
<tr>
<td>Étape 1

Les fusées avancent jusqu’au milieu des côtés du triangle.</td>
<td>Étape 2

Arrivées au milieu des côtés, elles se réajustent.</td>
</tr>
</table>

Au bout de quatre étapes, nous remarquons que les triangles “complétant” la trajectoire semblent être équilatéraux :



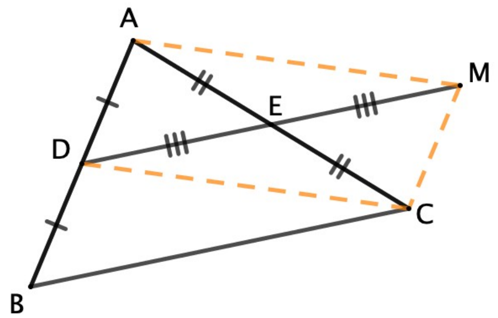
Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin d'une propriété.

Propriété des milieux d'un triangle : La droite passant par le milieu de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et, le segment joignant ces deux milieux, mesure la moitié du troisième côté.



Ici, la propriété des milieux d'un triangle permet de dire que : (DE)//(BC) et DE = BC/2.

Démonstration :



On donne le triangle ABC et D et E les milieux respectifs de [AB] et [AC]. Soit M le symétrique de D par rapport à E. AMCD a ses diagonales qui se coupent en leur milieu donc c'est un parallélogramme et donc ses côtés opposés sont égaux et parallèles.

On a ainsi : (AD)//(MC) or A, B et D sont alignés donc (BD)//(MC) ; BD = AD = MC.

Le quadrilatère BDMC a donc deux côtés de même mesure et parallèles, c'est donc un parallélogramme et donc : (DM)//(BC) et DM = BC or E est le milieu de [AC] donc DE = BC/2.

Deuxième façon de démontrer cette propriété :

AB/AD = AC/AE = 2 donc d'après la réciproque du théorème de Thalès : (DE)//(BC) et ainsi on a :

AB/AD = AC/AE = BC/DE. Donc : BC/DE = 2. (1)

Revenons à notre trajectoire : nous venons de démontrer qu'à chaque étape les fusées se trouvent sur les sommets d'un triangle équilatéral dont les côtés ont une longueur moitié moins grande qu'à l'étape précédente.

Quelle est la longueur L(n) d'un côté de ce triangle à l'étape *n* ? L'unité est le km;

Au départ : L(0) = 2 Étape 1 : L(1) = 2/2 = 1 Étape 2 : L(2) = 1/2

Étape 3 : L(3) = $\frac{1}{2}:2=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$ Étape 4 : L(4) = $\frac{1}{4}:2=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$

Ainsi à l'étape *n*, *n* entier strictement positif : $L(n)=\frac{1}{2^{n-1}}$

A chaque étape, les fusées parcourent la moitié de cette longueur. A l'étape *n*, les fusées parcourent : $\frac{1}{2^{n-2}}$ km avant de se réajuster.

Lorsque *n* devient très grand, cette distance se rapproche de 0 ; les fusées se rapprochent de plus en plus, ce que nous avions observé sur la spirale.

II - Que se passe-t-il au bout de deux secondes ?

On appelle *t*(*n*) le temps que la fusée met pour arriver à l'étape *n*. L'unité est la seconde.

Au départ : *t*(0) = 0 Étape 1 : *t*(1) = 1 Étape 2 : *t*(2) = 1 + 1/2 = 1,5

Étape 3 : *t*(3) = $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=1{,}75$ Étape 4 : *t*(4) = $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=1{,}875$

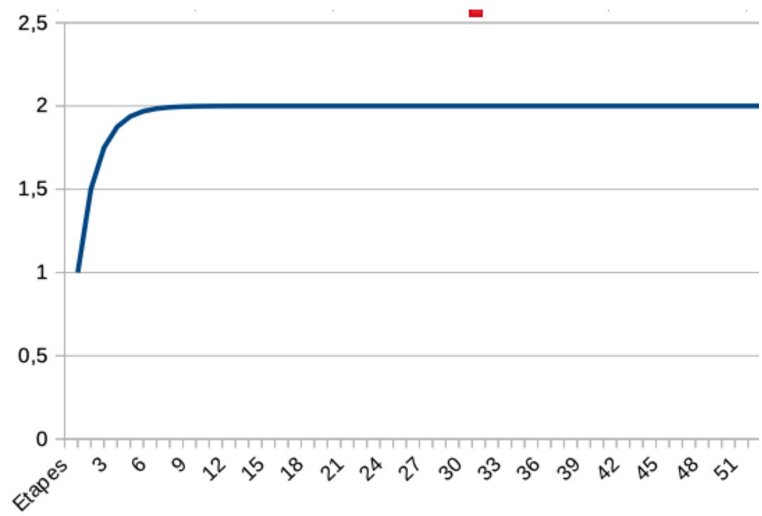
Ainsi à l'étape *n*, *n* entier strictement positif : $t(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}$

En prenant des valeurs de *n* assez grandes, on a l'impression que le temps, même s'il augmente toujours, ne pourra jamais dépasser deux secondes.

Pour essayer de comprendre, nous avons utilisé un tableur.
Dans la première colonne est indiquée l'étape et dans la deuxième, le temps en secondes.

	A	B
2	1	1
3	2	1,5
4	3	1,75
5	4	1,875
6	5	1,9375
7	6	1,96875
8	7	1,984375
9	8	1,9921875
10	9	1,99609375
11	10	1,998046875
12	11	1,9990234375
13	12	1,99951171875
14	13	1,999755859375
15	14	1,9998779296875
16	15	1,99993896484375
17	16	1,99996948242188
18	17	1,99998474121094
19	18	1,99999237060547
20	19	1,99999618530273
21	20	1,99999809265137
22	21	1,99999904632568
23	22	1,99999952316284
24	23	1,99999976158142
25	24	1,99999988079071
26	25	1,99999994039536
27	26	1,99999997019768
28	27	1,99999998509884
29	28	1,99999999254942
30	29	1,99999999627471
31	30	1,99999999813736
32	31	1,99999999906868
33	32	1,99999999953434
34	33	1,99999999976717
35	34	1,99999999988358
36	35	1,99999999994179
37	36	1,9999999999709
38	37	1,99999999998545
39	38	1,99999999999272
40	39	1,99999999999636
41	40	1,99999999999818
42	41	1,99999999999909
43	42	1,99999999999955
44	43	1,99999999999977
45	44	1,99999999999989
46	45	1,99999999999994
47	46	1,99999999999997
48	47	1,99999999999999
49	48	1,99999999999999
50	49	2
51	50	2
52	51	2
53	52	2

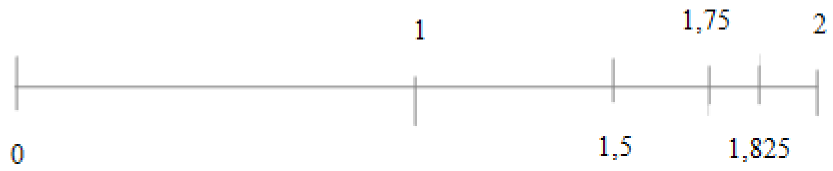
Voici le graphique correspondant qui montre le temps mis par la fusée en fonction de l’étape :



Aucun des deux ne nous permet de conclure. La fusée semble atteindre 2 et rester bloquée sur ce temps, ce qui n’est pas possible puisque le temps augmente toujours. Peut-on dépasser 2 ? La réponse est non.

Démonstration :

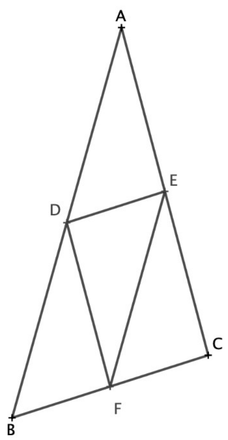
On place notre temps sur une droite graduée.

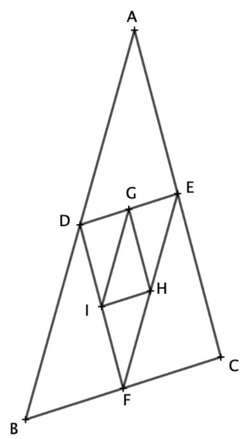


Le temps augmente à chaque étape de la moitié de la durée qu'à mis la fusée pour parcourir l'étape précédente ; ce qui se traduit sur la droite par la moitié de la distance qu'il reste entre la dernière graduation et 2. On ajoute à chaque étape la moitié du reste, on ne pourra donc jamais dépasser 2. (2)

III - Si le triangle n'est pas équilatéral

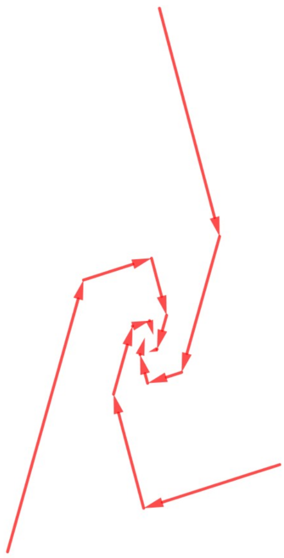
Les trois fusées sont maintenant placées sur les sommets A, B et C d'un triangle quelconque.



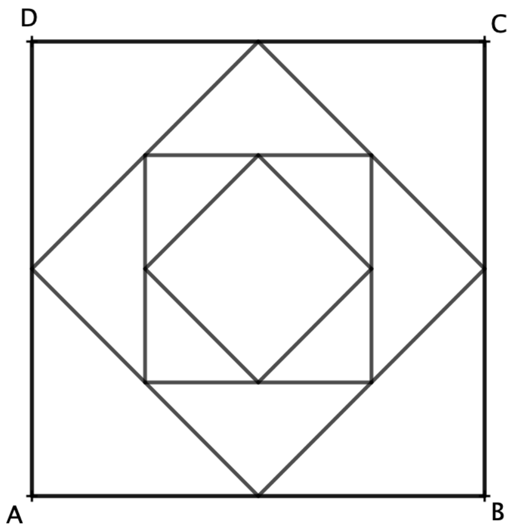
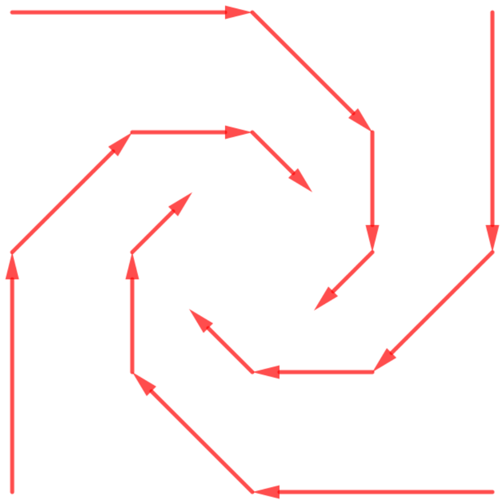
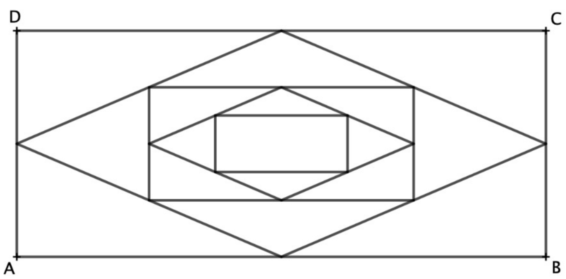
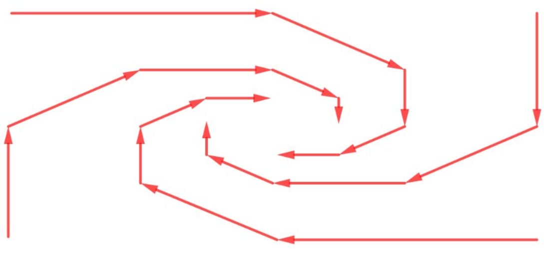


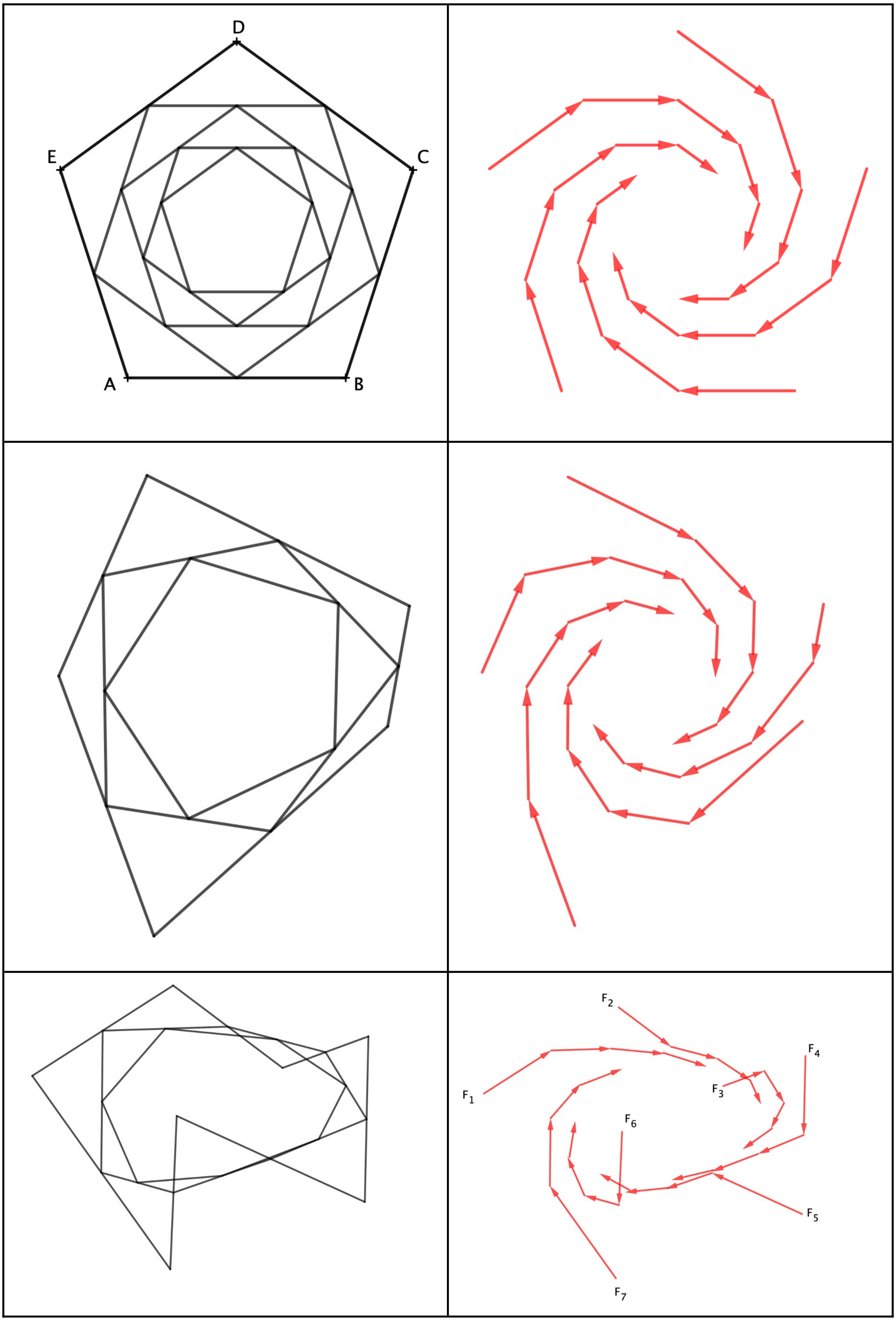
D'après la propriété des milieux d'un triangle vue ci-dessus, les côtés du triangle sur lequel vont se déplacer les fusées à une certaine étape, sont moitié moins grands que ceux du triangle de l'étape précédente : on obtient alors un triangle qui est une réduction de rapport 2 du triangle précédent ; les triangles sont donc tous semblables.

Voici la trajectoire des fusées :



Voici quelques trajectoires obtenues en faisant varier la figure de départ et donc, le nombre de fusées.

Figure de départ - support de la trajectoire sur quelques étapes.	Trajectoire
	
	

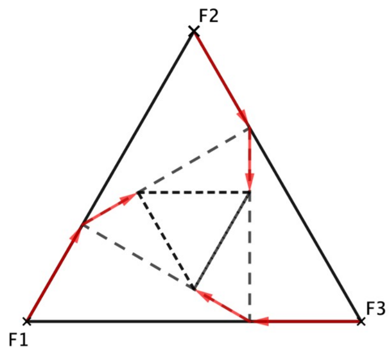

D
E
C
A
B
F1
F2
F3
F4
F5
F6
F7

Pour chaque exemple, une spirale se forme, plus ou moins régulière et les fusées se rapprochent petit à petit les unes des autres.

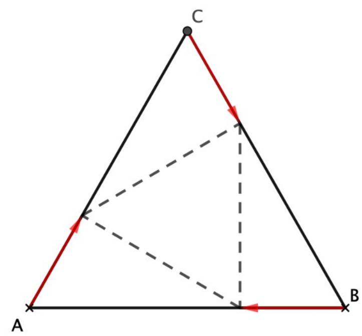
IV - Si les fusées avancent de ⅓ sur le segment de départ

1) Triangle équilatéral

Nous prenons à nouveau un triangle équilatéral au départ. A chaque étape, chaque fusée parcourt le tiers de la distance qui la sépare de celle sur laquelle elle pointe avant de se réajuster.

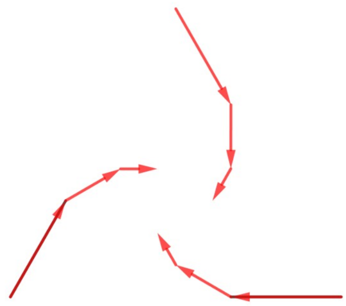


On se demande si à une étape donnée, le triangle est semblable à celui de l'étape précédente.

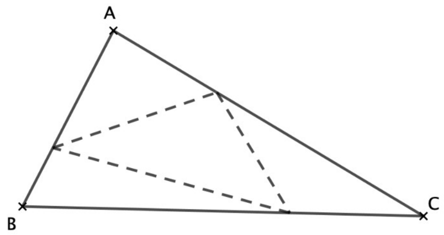


A l'étape 2, les trois triangles formés ayant chacun un sommet A ou B ou C, ont un angle de même mesure (60° en A, B ou C) compris entre deux côtés de même longueur ; donc ces trois triangles sont des triangles égaux et donc leur troisième côté est de la même longueur. Le triangle formé au centre de la figure est encore un triangle équilatéral. Ainsi, en répétant ce raisonnement, à chaque étape, on obtient un triangle équilatéral.

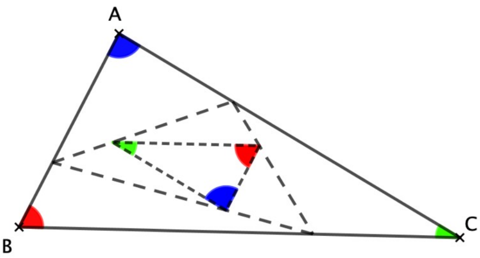
Voici la trajectoire des fusées :



2) Triangle quelconque

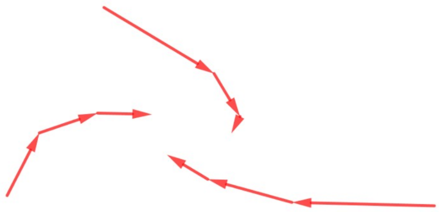


Les triangles, à chaque étape, sont-ils semblables ?
Géogebra nous a permis d'afficher une valeur approchée des angles sur deux étapes consécutives ce qui nous a permis d'affirmer que la réponse est non.



En augmentant le nombre d'étapes, il semble qu'à une étape donnée, le triangle formé est semblable à celui deux étapes avant (Sur la figure ci-dessus, les angles qui semblent de même mesure sont de la même couleur). .
Ainsi, à toutes les étapes paires, les triangles sont semblables ; on a de même des triangles semblables à toutes les étapes impaires. Nous n'avons pas réussi à démontrer ce résultat. (3)

Voici la trajectoire des fusées :



Nos recherches continuent !

Notes d'édition :

(1) L'égalité des rapports de longueur ne suffit pas à obtenir le parallélisme. Il faut soit travailler avec des mesures algébriques (ce n'est plus fait au collège), soit préciser que les points sont dans « le bon ordre ».

(2) Au lycée on pourrait voir que la suite des temps, qui est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 1/2, est strictement croissante de limite égale à 2. Cela justifierait l'affirmation des auteurs.

(3) Pour prouver cette affirmation, on peut calculer le deuxième itéré IJK du triangle initial ABC.

On obtient que I=(4A+4B+C)/9, J=(A+4B+4C)/9 et K=(4A+B+4C)/9. On peut ainsi vérifier la similitude des deux triangles, non pas en comparant leurs angles respectifs mais en vérifiant que les deux triangles ont leurs côtés toujours dans la même proportion (un tiers), quand on passe de ABC à JKI.