Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

La suite de Fibonacci et la suite de Perrin

Année 2023-2024

Matthéo Yang, Bruno Siniciali

Établissement(s) : Lycée Français Gustave Eiffel de Budapest
Enseignant·e(s) : Clotilde Gizart, Alain Surdyk
Chercheur·Chercheuse(s) : Sylvie Roelly, Université de Potsdam

6 juillet 2024

Table des matières

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

Notre sujet d'étude comportait deux axes, une sur la suite de Fibonacci qui servait d'introduction aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2, l'autre sur la suite de Perrin. Les suites étaient accompagnées de quelques questions, telles que "conjecturez puis démontrez quelques propriétés de ces suites", "que se passe-t-il si on change les termes initiaux?"... C'est donc un sujet plutôt ouvert qui nous a laissé une grande liberté quant à ce qu'on souhaitait chercher. Nous avons cherché ce qui nous semblait intéressant. Nous avons commencé par étudier les propriétés de la suite de Fibonacci, qui a pris la majorité de notre étude, puis la suite de Perrin, ce à quoi nous avons consacré beaucoup moins de temps.
Ce document s'adresse à des élèves de Terminale ayant choisi la spécialité mathématiques, si possible mathématiques expertes.

1.2. Résultats

Nous avons trouvé que la suite de Fibonacci est 3-périodique modulo 2.
De plus, sa formule explicite est, pour tout entier naturel n :

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}(\varphi')^n,$$

avec $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or, et $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Les suites de la forme $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, avec n dans $\mathbb{N}$, de premiers termes v_0, v_1 des réels quelconques, ont pour formule explicite, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\frac{\sqrt{5}}{5} v_1 \left(\varphi^n - \left(\varphi'\right)^n\right) + v_0 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}(\varphi')^n\right).$$

Pour la suite de Perrin, nos recherches ont été moindres, et le programme python destiné à émettre un résultat n'a pas fonctionné. Nous voulions contredire la conjecture "si n divise P_n alors n est premier". Le premier contre-exemple étant $n = 271441$, et P_{271441} a plus de 30 000 chiffres, il est possible que nos ordinateurs ne soient pas assez puissants pour trouver ce résultat, d'où le fait que le programme n'a pas fonctionné.

2. La Suite de Fibonacci

2.1. Généralités

La suite de Fibonacci est une suite définie ainsi :

$$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} \forall n \geq 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_0 = 1\,;\, F_1 = 1 \end{cases}$$

Premiers termes de (F_n) :
$F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$, $F_6 = 13$, $F_7 = 21$, $F_8 = 34$, $F_9 = 55$, $F_{10} = 89$.

Définition. *On dit que l'addition est stable pour un ensemble $\mathbb{E}$ si et seulement si pour tous $x, y \in \mathbb{E}$, $x + y \in \mathbb{E}$.*

L'addition étant stable pour $\mathbb{N}$, tous les termes de la suite de Fibonacci sont strictement positifs et entiers.

Proposition. *La suite de Fibonacci est strictement croissante à partir du rang $n = 1$.*

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} F_{n+1} - F_n &= F_n + F_{n-1} - F_n \\ &= F_{n-1}, \end{aligned}$$

qui est strictement positif pour tout $n \geq 1$. Alors :

$$\forall n \geq 1, F_{n+1} > F_n,$$

c'est-a-dire que la suite est strictement croissante à partir du rang $n = 1$. □

2.2. Quelques Propriétés

2.2.1 Périodicité

Nous avons remarqué un motif récurrent concernant la parité des termes. En effet, nous observons l'apparition du motif suivant pour les premiers termes de la suite :
$F_0 = 1$ est impair, $F_1 = 1$ est impair, $F_2 = 2$ est pair, $F_3 = 3$ est impair, $F_4 = 5$ est impair, $F_5 = 8$ est pair.
Ici, on a deux motifs, car un motif représente l'enchaînement terme impair, terme impair, terme pair.
Montrons que ce motif se répète toujours.

Définition (Division euclidienne dans $\mathbb{N}$)**.** *La division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b s'écrit $a = bq + r$ avec q un entier naturel et r le reste de la division, qui est un entier tel que $0 \leq r < b$. On écrira $a \equiv r \pmod b$, qui se lit "a est congru à r modulo b".*

Remarque. Quand b divise a, on a $r = 0$. On écrira donc $a \equiv 0 \pmod b$ ou $b \mid a$.

Proposition. *La suite de Fibonacci est 3-périodique modulo 2. Plus précisément, pour tout entier naturel k, on a : $F_{3k} \equiv F_{3k+1} \equiv 1 \pmod 2$ et $F_{3k+2} \equiv 0 \pmod 2$.*

Lemme 1. *Soient $a' \in \mathbb{N}$ et $r' \in \mathbb{N}$. Si $a \equiv r \pmod b$ et $a' \equiv r' \pmod b$, alors $a + a' \equiv r + r' \pmod b$.*

Preuve du lemme. Les expressions $a \equiv r \pmod b$ et $a' \equiv r' \pmod b$ sont équivalentes à $a = bq + r$ et $a' = bq' + r$, avec q et q' dans $\mathbb{N}$. En sommant les deux côtés, on a $a + a' = bq + r + bq' + r' = b(q + q') + r + r'$. Comme $q + q'$ et $r + r' \in \mathbb{N}$, cette dernière expression est équivalente à $a + a' \equiv r + r' \pmod b$. □

Preuve de la proposition. Soient $k \in \mathbb{N}$ et P_k : « $F_{3k} \equiv F_{3k+1} \equiv 1 \pmod 2$ et $F_{3k+2} \equiv 0 \pmod 2$. » Démontrons P_k par récurrence.

Initialisation, pour $k = 0$:
$F_0 = F_1 = 1 \equiv 1 \pmod 2$ et $F_2 = 2 \equiv 0 \pmod 2$. P_0 est vraie.

Hérédité :
Supposons P_k vraie à un rang k fixé, montrons que F_{k+1} est vraie. On veut donc montrer :
$F_{3(k+1)} \equiv P_{3(k+1)+1} \equiv 1 \pmod 2$ et $F_{3(k+1)+2} \equiv 0 \pmod 2$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $F_{3k} \equiv F_{3k+1} \equiv 1 \pmod 2$ et $F_{3k+2} \equiv 0 \pmod 2$.
Or, $F_{3(k+1)} = F_{3k+2} + F_{3k+1}$. En appliquant le lemme, il vient : $F_{3k+1} \equiv 1 + 0 \equiv 1 \pmod 2$.
De plus : $F_{3(k+1)+1} = F_{3(k+1)} + F_{3k+2} \equiv 0 + 1 \equiv 1 \pmod 2$.
Dernièrement : $F_{3(k+1)+2} = F_{3(k+1)} + F_{3(k+1)+1} \equiv 1 + 1 \equiv 0 \pmod 2$. Ces trois congruences prouvent que P_{k+1} est vraie.

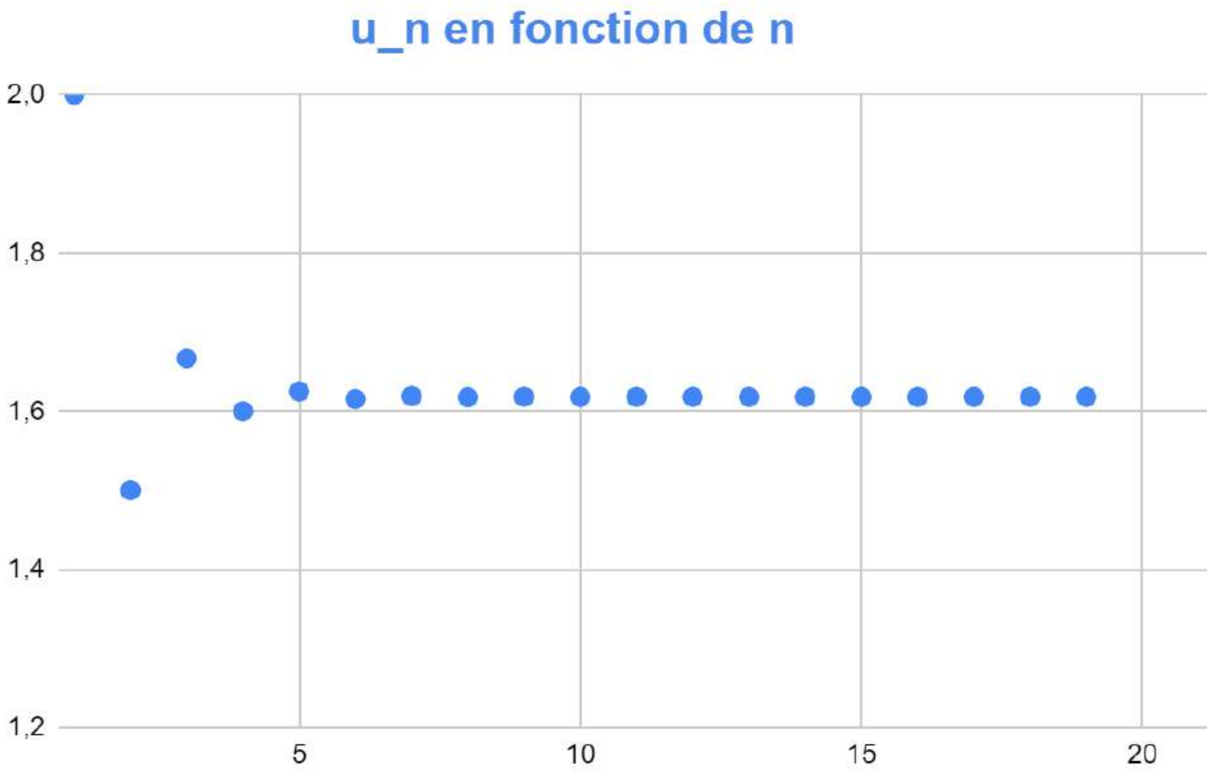
Conclusion :
P_k étant vraie au rang $k = 0$ et héréditaire, en appliquant le principe de récurrence, pour tout entier naturel k, $F_{3k} \equiv F_{3k+1} \equiv 1 \pmod 2$ et $F_{3k+2} \equiv 0 \pmod 2$. En somme, (F_n) est 3-périodique modulo 2. □

2.2.2 Rapport entre deux termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite

$$u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Proposition. *La suite (u_n) converge vers $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or.*



Graphiquement, on observe que la suite semble converger.

Définition. *On dit que deux suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes si et seulement si* (a_n) *est croissante,* (b_n) *est décroissante, et* $\lim_n |a_n - b_n| = 0$.

Lemme 2. *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite* $\ell \in \mathbb{R}$.

Preuve du lemme 2. On étudie le signe de la suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$b_{n+1} - a_{n+1} - b_n + a_n \leq 0$$

En effet, les suites (b_n) et (a_n) sont respectivement décroissante et croissante, ce qui se traduit par, pour tout entier naturel n :

$$b_{n+1} - b_n \leq 0 \;\; a_{n+1} - a_n \geq 0,$$

alors $-a_{n+1} + a_n \leq 0$. Donc par somme de nombres négatifs, $b_{n+1} - a_{n+1} - b_n + a_n$ est bien toujours négatif pour tout entier naturel n. Par conséquent, (a_n) est majorée par n'importe quel terme de (b_n) (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$), donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. Le raisonnement est identique pour (b_n). On note l et l' les valeurs limites respectives des suites (a_n) et (b_n). Par définition des suites adjacentes, $\lim_n |a_n - b_n| = 0$, soit $l - l' = 0$ d'où $l = l'$. □

Lemme 3 (Identité de Vajda)**.** *Pour tous* i, j, k *entiers naturels,*

$$F_{k+i}F_{k+j} - F_k F_{k+i+j} = (-1)^k F_i F_j.$$

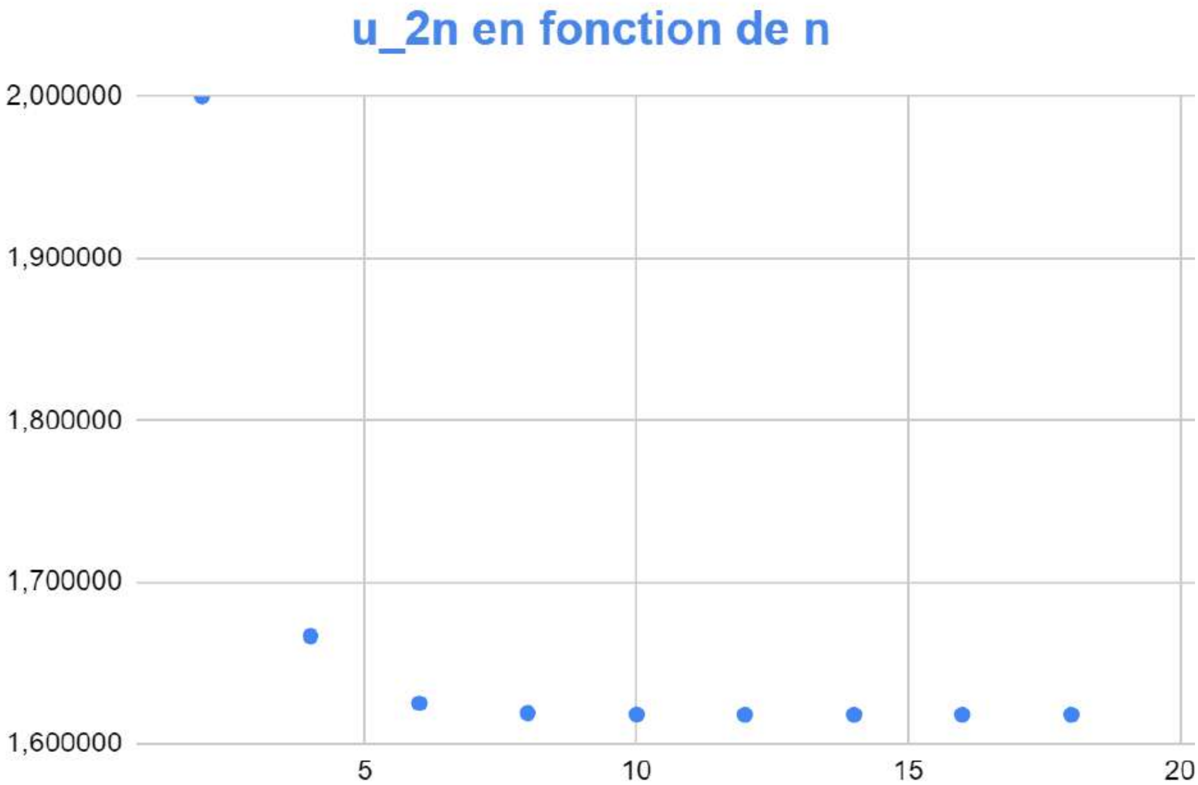
Cette identité s'appelle l'identité de Vajda, que l'on admet.

Lemme 4 (Identité de Cassini)**.** *Pour tout entier naturel* n, $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$. *Cette identité s'appelle l'identité de Cassini, que l'on admet.*

Lemme 5 (théorème du point fixe)**.** *Soit* f *une fonction continue de* $I \subset \mathbb{R}$ *dans* I. *Si la suite* (u_n) *converge vers* ℓ, $u_{n+1} = f(u_n)$, *et* $u_0 \in I$, *alors* ℓ *est solution de* $f(x) = x$.

Preuve de la proposition. On montre que (u_n) converge. On procède en prouvant que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puisque $\{2n\} \cup \{2n+1\} = \mathbb{N}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Montrons d'abord que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. On veut montrer :

$$u_{2(n+1)} - u_{2n} < 0.$$



En utilisant le fait que $u_{2(n+1)} = \dfrac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}}$ et $u_{2n} = \dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$, on peut réécrire :

$$\begin{aligned} u_{2(n+1)} - u_{2n} &= \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}} - \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} \\ &= \frac{F_{2n+3}F_{2n} - F_{2n+1}F_{2n+2}}{F_{2n+2}F_{2n}}. \end{aligned}$$

Il vient, en appliquant l'identité de Vajda au numérateur :

$$\begin{aligned} \frac{F_{2n+3}F_{2n} - F_{2n+1}F_{2n+2}}{F_{2n+2}F_{2n}} &= \frac{-F_{k+i}F_{k+j} + F_kF_{k+i+j}}{F_{2n+2}F_{2n}} \quad (k = 2n,\ i = 1,\ j = 2) \\ &= \frac{-(-1)^{2n}F_1F_2}{F_{2n+2}F_{2n}} \end{aligned}$$

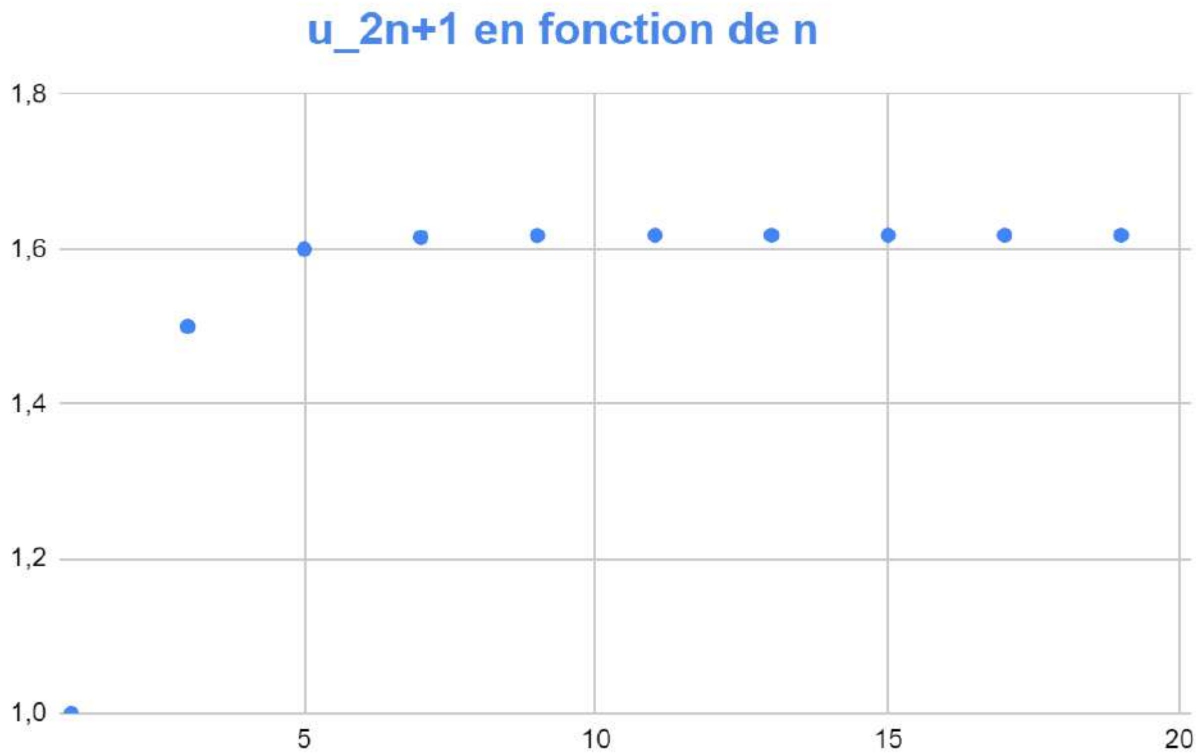
Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n} = 1$. Il en résulte que :

$$\frac{-(-1)^{2n}F_1F_2}{F_{2n+2}F_{2n}} = \frac{-F_1F_2}{F_{2n+2}F_{2n}}.$$

Notons maintenant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F_k > 0$, d'où $\dfrac{-F_1F_2}{F_{2n+2}F_{2n}}$ est strictement négatif et donc $u_{2(n+1)} - u_{2n}$ est, lui aussi, strictement négatif. Alors (u_{2n+1}) est strictement décroissante.

Montrons que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. On veut montrer :

$$u_{2n+3} - u_{2n+1} > 0.$$



En utilisant le fait que $u_{2(n+3)} = \dfrac{F_{2n+4}}{F_{2n+3}}$ et $u_{2n+1} = \dfrac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}$, on peut réécrire :

$$\begin{aligned} u_{2(n+3)} - u_{2n+1} &= \frac{F_{2n+4}}{F_{2n+3}} - \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} \\ &= \frac{F_{2n+4}F_{2n+1} - F_{2n+3}F_{2n+2}}{F_{2n+3}F_{2n+1}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Vajda au numérateur, on a :

$$\begin{aligned} \frac{F_{2n+4}F_{2n+1} - F_{2n+3}F_{2n+2}}{F_{2n+3}F_{2n+1}} &= \frac{-F_{k+i}F_{k+j} + F_kF_{k+i+j}}{F_{2n+3}F_{2n+1}} \quad (k = 2n+1,\ i = 2,\ j = 1) \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}F_2F_1}{F_{2n+3}F_{2n+1}} \end{aligned}$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n+1} = -1$, d'où :

$$\frac{-(-1)^{2n+1}F_2F_1}{F_{2n+3}F_{2n+1}} = \frac{1 \cdot F_1F_2}{F_{2n+3}F_{2n+1}}.$$

Notons maintenant que le numérateur est positif et le dénominateur aussi. Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+3} - u_{2n+1} > 0.$$

Donc la suite (u_{2n+1}) est strictement croissante.

Montrons que $|u_{2n+1} - u_{2n}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned} u_{2n+1} - u_{2n} &= 1 + \frac{1}{u_{2n}} - 1 - \frac{1}{u_{2n-1}} \\ &= \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} - \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} \\ &= \frac{F_{2n}^2 - F_{2n-1}F_{2n+1}}{F_{2n+1}F_{2n}}. \end{aligned}$$

En appliquant l'identité de Cassini, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{F_{2n}^2 - F_{2n-1}F_{2n+1}}{F_{2n+1}F_{2n}} &= \frac{-(-1)^{2n}}{F_{2n+1}F_{2n}} \\ &= \frac{-1}{F_{2n+1}F_{2n}}. \end{aligned}$$

Puisque la suite de Fibonacci est strictement croissante et dans $\mathbb{N}$, par produit de limites :

$$F_{2n+1}F_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lim_n \left| \frac{-1}{F_{2n+1}F_{2n}} \right| &= \lim_n \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\iff \lim_n |u_{2n+1} - u_{2n}| = 0.$$

Alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes, (u_n) converge.

Maintenant, on cherche à déterminer $\lim_n u_n$. On peut réécrire u_n :

$$u_n = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n}$$

$$\iff u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}.$$

On utilisera le théorème du point fixe pour déterminer $\lim_n u_n$.
Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+ \\ x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x} \end{cases}$.
f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et $(u_n)_n$ converge.
Donc d'après le théorème du point fixe, $\lim_n u_n$ est solution de l'équation $f(x) = x$. Résolvons cette équation.

$$f(x) = x$$

$$\iff 1 + \frac{1}{x} = x$$

$$\iff x^2 - x - 1 = 0 \ (*)$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, avec $a = 1, b = -1, c = -1$.
Il vient $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5$.

Comme $\Delta > 0$, cette équation admet deux solutions. Soient x_1 et x_2 les deux solutions de cette équation. Comme $x^2 - x - 1$ est un polynôme du second degré, alors :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

En substituant les valeurs de Δ, a, b et c dans ces deux équations, on a :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Puisque $x_2 < 0$, $\lim_n u_n$ est différent de x_2, car tous les termes de la suite de Fibonacci sont strictement positifs, donc :

$$\lim_n u_n = x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \text{ (le nombre d'or !).}$$

On a bien prouvé la proposition. □

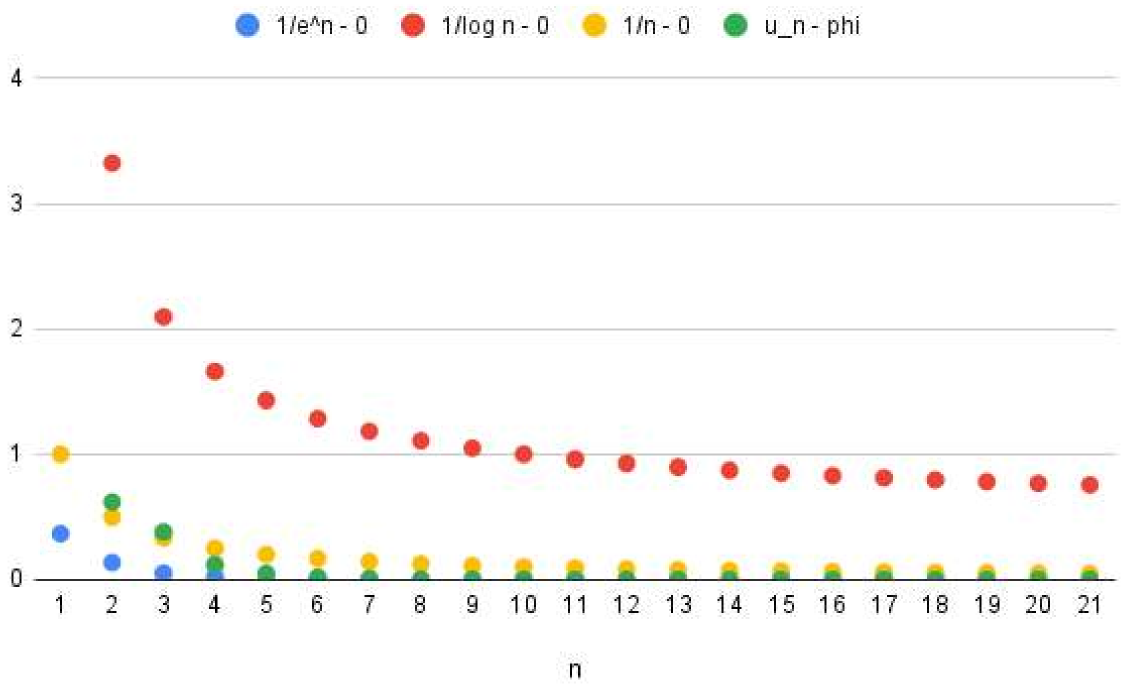
2.2.3 Vitesse de convergence de u_n vers φ

On s'intéresse à la question suivante : à quelle vitesse u_n converge-t-elle vers φ ? Nous allons dans un premier temps "intuiter" la vitesse de convergence de u_n puis nous en tenterons d'en donner une définition rigoureuse. Nous avons comparé sa vitesse de convergence à celles des suites suivantes, qui convergent vers 0 :

$a(n) = \dfrac{1}{\exp(n)}$

$b(n) = \dfrac{1}{\log n}$

$c(n) = \dfrac{1}{n}$



Pour les comparer, on peut déterminer le rang n_0 à partir duquel un terme de la suite est à une distance de la limite, qu'on choisit arbitrairement.

Les limites des trois suites étant 0, on peut déterminer le rang n_0 à partir duquel tous les termes sont à une distance plus petite que 0,05 de 0.

Pour $\frac{1}{\exp(n)}$: $\frac{1}{\exp(n)} - 0 \leq 0,05$ pour $n \geq 3$.

Pour $\frac{1}{n}$: $\frac{1}{n} - 0 \leq 0,05$ pour $n \geq 20$.

Pour $\frac{1}{\log n}$: $\frac{1}{\log n} - 0 \leq 0,05$ pour $n \geq 10^{20}$.

En pratique, pour (u_n), en prenant $\lim u_n = \varphi \approx 1,618$: $u_n - \varphi \leq 0,05$ pour $n \geq 5$.

On remarque que la vitesse de convergence de u_n est similaire à celle de $\dfrac{1}{\exp(n)}$. Nous disons similaire, car les deux suites sont à une distance de 0,05 de leurs limites respectives à partir de rangs qui sont relativement proches l'un de l'autre ($n = 3$ pour $(\exp(n))_n$ et $n = 5$ pour $(u_n)_n$). Cela devient encore plus flagrant en prenant une distance de 10^{-5}.

Pour $\frac{1}{\exp(n)}$: $\frac{1}{\exp(n)} - 0 \leq 10^{-5}$ pour $n \geq 12$.

Pour $\frac{1}{n}$: $\frac{1}{n} - 0 \leq 10^{-5}$ pour $n \geq 10^5$.

Pour $\frac{1}{\log n}$: $\frac{1}{\log n} - 0 \leq 10^{-5}$ pour $n \geq 10^{50}$.

Pour (u_n), en prenant $\lim u_n = \varphi \approx 1,618$: $u_n - \varphi \leq 10^{-5}$ pour $n \geq 10$. Il devient raisonnable de penser que (u_n) converge vers φ à une vitesse de l'ordre de $\frac{1}{\exp(n)}$.

Nous voulions poursuivre en étudiant plus formellement la vitesse de convergence de la suite (u_n) mais nous avons abandonné par manque de temps.

2.3. Formule explicite de la suite de Fibonacci

Au lycée, on ne traite que des formules explicites de suites arithmétiques et géométriques. Pour un lycéen, il peut paraître étonnant qu'il existe une formule explicite pour la suite de Fibonacci. Nous allons prouver qu'elle existe, mais il faudra introduire un nombre considérable de nouveaux objets mathématiques.

Définition (Matrice)**.** *Une matrice est un tableau de nombres, que l'on appelle les coefficients de la matrice. Une matrice carrée est une matrice qui a autant de lignes que de colonnes. Une matrice colonne est une matrice qui n'a qu'une seule colonne. Une matrice diagonale est une matrice dont tous les coefficients sont nuls à part ceux sur la diagonale.*
Une matrice carrée : $\begin{pmatrix} 1 & \pi \\ -\sqrt{29} & -9 \end{pmatrix}$. *Une matrice colonne :* $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Une matrice diagonale :* $\begin{pmatrix} -3,9 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{pmatrix}$.

Remarque. On dira plus simplement qu'une matrice carrée ayant n lignes et n colonnes est de dimension (ou de taille) n.

Définition (Multiplication d'une matrice par une autre)**.** *Soit une matrice A qui a i lignes et j colonnes. De plus, soit une matrice B de i' lignes et j' colonnes. La multiplication AB n'est définie que si $j = i'$. La matrice AB est alors de dimension (i, j').*
Supposons $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \end{pmatrix}$, *alors, par définition :*

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} \end{pmatrix}.$$

Si $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$*, alors :*

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,2} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Remarque. La multiplication de deux matrices n'est pas toujours commutative, c'est-à-dire que $AB \neq BA$, sauf dans des cas particuliers. Par exemple, on a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, mais $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Il faudra donc faire attention de quel côté on multiplie par une matrice.

Définition (Matrice identité de taille n)**.** *La matrice identité de taille n, notée* I_n*, est la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux sur la diagonale, qui sont des 1. Pour toute matrice carrée Q de taille n, on a :* $QI_n = I_nQ = Q$ *et* $I_n^n = I_n$*.*

Définition (Déterminant d'une matrice carrée de dimension 2.)**.** *Soit* $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, avec les coefficients des réels quelconques. On définit le déterminant de C par* $det(C) = ad - bc$*.*

Définition (Inverse d'une matrice carrée de dimension 2)**.** *Dans* $\mathbb{R}$*, on note* x^{-1} *l'inverse d'un réel* x*, qui vérifie* $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$*, l'élément neutre de la multiplication. Pour toute matrice carrée C de taille* 2*, on note* C^{-1} *son inverse et il vérifie* $CC^{-1} = C^{-1}C = I_2$*. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Par exemple, le déterminant de la matrice* $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *est* $3 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 = 10 \neq 0$*, donc elle admet un inverse. On ne s'intéressera pas au calcul de la matrice inverse dans ce document, on se contentera d'utiliser la calculatrice. La calculatrice nous donne* $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$ *et on a bien* $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} = I_2$

Les matrices peuvent nous être utiles pour calculer la formule explicite de la suite de Fibonacci en utilisant une astuce, qui est la suivante.

On pose $\vec{F_n} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$.

On peut réécrire, d'après la définition de F_{n+1} : $\vec{F_n} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$.

Ce qui équivaut à : $\vec{F_n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{F_{n-1}}$.

On pose de nouveau $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{F_n} = M\vec{F_{n-1}} = M^2\vec{F_{n-2}} = \cdots = M^n\vec{F_0} = M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

M^n étant une matrice carrée, car produit de matrices carrées, $M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sera un vecteur. Or, deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales, donc par identification des coordonnées des vecteurs, on aura F_n = la deuxième coordonnée de $M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'objectif est donc de calculer M^n pour tout entier $n \geq 1$. Seulement, $M^n \neq \begin{pmatrix} 1^n & 1^n \\ 1^n & 0^n \end{pmatrix}$. Il faut donc voir cette matrice un peu différemment.

Définition (Base canonique du plan)**.** *On appelle la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *(ou du plan) la base du plan usuelle* $B = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$*, avec O l'origine du repère.*

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Pour tout vecteur $\vec{u}$, soit :

$$T(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}.$$

On peut voir T comme une fonction, mais qui, au lieu de transformer un nombre en un autre nombre, transforme un vecteur en un autre vecteur. Certaines transformations effectuent des rotations, des homothéties, T est l'application qui prend un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et renvoie le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}$.

Définition (Vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice)**.** *Un vecteur propre d'une matrice carrée M est un vecteur $\vec{v_p}$ du plan qui vérifie (dans le cas de la matrice étudiée pour la suite de Fibonacci) :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v_p} = \lambda \vec{v_p},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

λ est appelé valeur propre de M associé à $\vec{v_p}$.

Remarque. Les vecteurs propres, de manière visuelle, sont les vecteurs dont l'image par l'application T est colinéaire à eux-mêmes. Cf l'animation suivante, sur laquelle on représente les images de vecteurs du plan par l'application T.
https ://drive.google.com/file/d/1muGzTqUCIIpRNqUecRnT_pS75rUWZ1rQ/view?usp=drive_link .
On remarque qu'il y a deux vecteurs qui sont colinéaires à leur image, ce sont deux vecteurs propres de M. En réalité, il y a une infinité de vecteurs propres de M. En effet, l'ensemble des vecteurs colinéaires a un vecteur propre sont des vecteurs propres de M. On admet que pour notre matrice M, il n'existe que deux ensembles de vecteurs propres tels que les vecteurs propres d'un ensemble ne sont pas colinéaires aux vecteurs propres de l'autre ensemble.

Proposition. *Deux vecteurs propres non colinéaires de M sont*

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} \varphi' \\ 1 \end{pmatrix},$$

de valeurs propres respectives φ et φ'.

Preuve de la proposition. Nous avons vu que les vecteurs propres sont deux vecteurs dont les images par T leur sont colinéaires. Traduit mathématiquement, cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M\vec{V_1} = \lambda v_1$ (ou $\vec{v_2}$), avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ deux vecteurs propres de M non colinéaires entre eux (comme on veut trouver une base de vecteurs propres, il faut trouver deux vecteurs propres non colinéaires entre eux). Calculons $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$, on cherche donc X et Y tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X \\ \lambda Y \end{pmatrix}$$

En multipliant les matrices de gauche entre elles et par identification des coordonnées des vecteurs, il vient :

$$\begin{cases} X + Y = \lambda X \\ X = \lambda Y \end{cases}$$

En substituant X par λY dans la première équation, on obtient :

$$\lambda^2 Y - \lambda Y - Y = 0$$

Si l'on cherche des vecteurs propres dont la coordonnée Y est différente de 0, on peut diviser par Y :

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Les deux racines de ce polynôme sont

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

On a donc les deux valeurs propres de M. Pour $\lambda = \varphi$, on a

$$\begin{cases} X + Y = \varphi X \\ X = \varphi Y \end{cases}$$

On peut donc prendre n'importe quel X et trouver Y tel que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ soit propre puisque le système nous dit que X et Y sont liés entre eux. En effet, il y a une infinité de solutions, ce qui n'est pas étonnant car on avait dit que M avait une infinité de vecteurs propres. Par exemple, on peut prendre $X = \varphi$ donc $Y = 1$, ce vecteur que l'on note $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre de M. En faisant de même avec $X = \varphi'$, on trouve un vecteur propre $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} \varphi' \\ 1 \end{pmatrix}$, qui n'est pas colinéaire à $\vec{v}_1$ comme il le fallait. □

Définition (Matrice de passage)**.** *Soient B et B' deux bases du plan. Soit un vecteur du plan de coordonnées X_B dans la base B et $X_{B'}$ dans la base B'. La matrice de passage permet de relier les coordonnées dans les deux bases entre elles. La matrice de passage de B' vers B, notée $P_{B',B}$, vérifie :*

$$X_B = P_{B',B} X_{B'}.$$

On peut comprendre la matrice de passage comme un simple traducteur de coordonnées, disons du "français vers l'espagnol".

Définition (Application linéaire)**.** *On dit qu'une application f définie sur le plan est linéaire si et seulement si elle vérifie*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

pour tous réels λ, μ et x, y vecteurs du plan.

Lemme 6. *T est une application linéaire.*

Preuve du lemme 6. Soient λ, μ deux réels quelconques, et soient deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Montrons que l'égalité suivante est vraie :

$$T\left(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}\right) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v}).$$

On a :

$$\begin{aligned} T\left(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda a + \mu c \\ \lambda b + \mu d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a + \mu c + \lambda b + \mu d \\ \lambda a + \mu c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda b \\ \lambda a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu c + \mu d \\ \mu c \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a + b \\ a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} c + d \\ c \end{pmatrix} \\ &= \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v}) \end{aligned}$$

T est bien une application linéaire. □

Proposition (Formule explicite de la suite de Fibonacci)**.** *Pour tout entier naturel n,*

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi'^n.$$

Lemme 7. *On dispose des égalités suivantes :*

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} \varphi & \varphi' \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; P_{B',B} = \begin{pmatrix} \varphi & \varphi' \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Preuve du lemme 7. Notons $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur $\vec{OM}$ du plan quelconque dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de ce même vecteur dans la base de vecteurs propres de M. Alors on a :

$$\vec{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j} \;\; \vec{OM} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2.$$

Or dans la base canonique du plan, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \varphi' \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\vec{v}_1 = \varphi\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v}_2 = \varphi'\vec{i} + \vec{j}$. On a alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$:

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x\left(\varphi\vec{i} + \vec{j}\right) + y\left(\varphi'\vec{i} + \vec{j}\right) \\ &= \left(x\varphi + y\varphi'\right)\vec{i} + \left(x + y\right)\vec{j} \end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, on a $X = x\varphi + y\varphi'$ et $Y = x + y$, d'où :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi & \varphi' \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a bien prouvé que $P_{B,B'} = \begin{pmatrix} \varphi & \varphi' \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Par définition : $P_{B',B} = P_{B,B'}^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi & \varphi' \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ □

Preuve de la proposition. Que faire si nous avons un vecteur dont les coordonnées sont dans une base différente que la base canonique de $\mathbb{R}^2$? Par exemple, que faire si on souhaite appliquer T à un vecteur dont les coordonnées sont exprimées dans la base de vecteurs propres de M ? N'oublions pas que l'objectif reste de calculer M^n.

On notera B' la base de vecteurs propres $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Notons que dans la base B', $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nous allons désormais nous intéresser à l'application de T à un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} X_{B'} \\ Y_{B'} \end{pmatrix}$ dans la base B'. Nous allons donc utiliser les matrices de passage, pour traduire les coordonnées $\begin{pmatrix} X_{B'} \\ Y_{B'} \end{pmatrix}$ dans la base B, on pourra ensuite appliquer T. Pour passer des coordonnées dans la base B' à la base B, on effectue la multiplication suivante :

$$P_{B,B'} \begin{pmatrix} X_{B'} \\ Y_{B'} \end{pmatrix}$$

Géométriquement parlant, on a le même vecteur, seulement ses coordonnées ont changé, car nous avons changé de base.
Maintenant, on peut appliquer T :

$$MP_{B,B'} \begin{pmatrix} X_{B'} \\ Y_{B'} \end{pmatrix}$$

Mais nous voulons les coordonnées de l'image du vecteur par T dans la base B', on multiplie donc par la matrice de passage inverse, qui consiste à faire la traduction dans l'autre sens :

$$P_{B',B} M P_{B,B'} \begin{pmatrix} X_{B'} \\ Y_{B'} \end{pmatrix}$$

Donc si on veut appliquer la transformation T à un vecteur dont les coordonnées sont dans la base B', il faut utiliser la formule ci-dessus. Mais on remarque qu'elle n'est pas vraiment optimale puisqu'il faut passer par un algorithme qui traduit, applique T, puis traduit dans l'autre sens. On aimerait bien trouver une formule pour appliquer T, mais directement dans la base B'.
On part du fait que tout vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} X_{B'} \\ Y_{B'} \end{pmatrix}$ du plan s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans la base B', soit :

$$\vec{v} = X_{B'}\vec{v}_1 + Y_{B'}\vec{v}_2$$

Si on applique T, on obtient :

$$T(\vec{v}) = T(X_{B'}\vec{v}_1 + Y_{B'}\vec{v}_2)$$

Or T est une application linéaire, d'où :

$$T(\vec{v}) = X_{B'}T(\vec{v}_1) + Y_{B'}T(\vec{v}_2)$$

Mais appliquer T à un vecteur propre de M revient à le multiplier par sa valeur propre, alors :

$$T(\vec{v}) = X_{B'}\begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + Y_{B'}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi' \end{pmatrix}$$

En réécrivant le membre de droite, on a :

$$T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{B'} \\ Y_{B'} \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{B'} \\ Y_{B'} \end{pmatrix} = P_{B',B} M P_{B,B'} \begin{pmatrix} X_{B'} \\ Y_{B'} \end{pmatrix}$$

En posant $D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi' \end{pmatrix}$, on obtient la formule plus compacte :

$$D = P_{B',B} M P_{B,B'}$$

Ce qui donne, en multipliant par les inverses des matrices :

$$M = P_{B,B'} D P_{B',B}$$

Il vient :

$$M^n = P_{B,B'} D P_{B',B} P_{B,B'} D P_{B',B} \dots P_{B,B'} D P_{B',B}$$

Or, $P_{B,B'}P_{B',B} = I_2$, car ces matrices sont les inverses l'une de l'autre. Il ne restera que les extrémités et les D au milieu qui vont se multiplier entre eux :

$$M^n = P_{B,B'} D^n P_{B',B}$$

D^n étant une matrice diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \varphi'^n \end{pmatrix}$, on peut donc calculer M^n :

$$\begin{aligned}
M^n &= \begin{pmatrix} \varphi & \varphi' \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \varphi'^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & \varphi' \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} & \varphi'^{n+1} \\ \varphi^n & \varphi'^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi'^{n+1} & \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^{n+1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi'^{n+1} \\ \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi^{n} - \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi'^{n} & \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^{n} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi'^{n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mais ce qui nous intéresse, c'est $\vec{F_n}$:

$$\begin{aligned}
\vec{F_n} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi'^{n+1} & \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^{n+1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi'^{n+1} \\ \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi^{n} - \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi'^{n} & \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^{n} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi'^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi'^{n+1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^{n+1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi'^{n+1} \\ \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi^{n} - \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi'^{n} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^{n} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi'^{n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi^{n+1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi'^{n+1} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi^{n} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi'^{n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par identification de la deuxième coordonnée des vecteurs, on obtient :

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi'^n$$

En fin de compte :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi'^n.}$$

□

Il aurait pu être intéressant de démontrer les identités admises, voire étudier la vitesse de convergence de la suite (u_n) avec la formule explicite de la suite de Fibonacci. Par manque de temps, nous sommes passés à autre chose.

3. Suites de la forme $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$

Après avoir étudié la suite de Fibonacci, une suite récurrente linéaire d'ordre 2 particulière, nous nous sommes intéressés aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2 en général.

3.1. Formule explicite, avec $\alpha = \beta = 1$

Existe-t-il une formule explicite pour toutes les suites de la forme $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ quels que soient les premiers termes u_0 et u_1 ?
Pendant cette lecture, nous invitons le lecteur à se référer à la partie *1.2.4 Formule explicite de la suite de Fibonacci*, afin de mieux comprendre la démarche qui suit.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n \geq 2$, par la relation de récurrence $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, de premier terme v_0 et de deuxième terme v_1, avec $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$. Trouvons la formule explicite de (v_n).

On pose $\vec{v_n} = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} v_1 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
Puisqu'on a déjà calculé $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$, on a directement :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi'^{n+1} & \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^{n+1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi'^{n+1} \\ \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi^{n} - \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi'^{n} & \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^{n} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\varphi'^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_1\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\varphi^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi'^{n+1}\right) + v_0\left(\frac{5\sqrt{5}}{10}\varphi^{n+1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}(\varphi')^{n+1}\right) \\ v_1\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\varphi^{n} - \frac{\sqrt{5}}{5}(\varphi')^{n}\right) + v_0\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^{n} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}(\varphi')^{n}\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Par identification de la deuxième coordonnée des vecteurs :

$$\begin{aligned}
v_n &= v_1\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\varphi^{n} - \frac{\sqrt{5}}{5}(\varphi')^{n}\right) + v_0\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^{n} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}(\varphi')^{n}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}v_1\left(\varphi^n - (\varphi')^n\right) + v_0\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^{n} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}(\varphi')^{n}\right)
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{\sqrt{5}}{5}v_1\left(\varphi^n - (\varphi')^n\right) + v_0\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^{n} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}(\varphi')^{n}\right).}$$

Nous avons essayé de simplifier cette expression sans succès. De plus, nous aurions pu continuer en déterminant la formule explicite des suites de la forme $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$, pour tout couple fixé de paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et de premiers termes u_0, u_1 des réels quelconques.

4. La Suite de Perrin

4.1. Généralités

La suite de Perrin est définie ainsi :

$$(P_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} \forall n \geq 3, P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \\ P_0 = 3, P_1 = 0, P_2 = 2 \end{cases}.$$

Premiers termes de (P_n) : $P_0 = 3, P_1 = 0, P_2 = 2, P_3 = 3, P_4 = 2, P_5 = 5, P_6 = 5, P_7 = 7, P_8 = 10, P_9 = 12, P_{10} = 17$.
C'est une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$, et qui est strictement croissante pour $n \geq 6$.

En effet, les termes initiaux étant dans $\mathbb{N}$, et l'addition étant stable pour $\mathbb{N}$, on en déduit que tous les termes de la suite de Perrin sont strictement positifs, hormis le cas $n = 1$.
De plus :

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= P_{n-1} + P_{n-2} - P_{n-2} - P_{n-3} \\ &= P_{n-1} - P_{n-3} \\ &= P_{n-3} + P_{n-4} - P_{n-3} \\ &= P_{n-4}, \end{aligned}$$

qui est toujours strictement positif pour $n \geq 6$. Donc pour tout $n \geq 6$, (P_n) est strictement croissante.

4.2. Formule explicite de la suite de Perrin

Après avoir étudié la suite de Fibonacci sans la formule explicite, nous nous sommes rendu compte que l'étudier avec la formule explicite est bien plus simple. Nous allons donc commencer notre étude de la suite de Perrin par le calcul de sa formule explicite.

On pose $\vec{P_n} = \begin{pmatrix} P_{n+2} \\ P_{n+1} \\ P_n \end{pmatrix}$ Il vient, par définition de la suite de Perrin :

$$\vec{P_n} = \begin{pmatrix} P_n + P_{n-1} \\ P_{n+1} \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n+1} \\ P_n \\ P_{n-1} \end{pmatrix}.$$

De plus posons $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$\vec{P_n} = M' \vec{P_{n-1}} = (M')^2 \vec{P_{n-2}} = \cdots = (M')^n \vec{P_1} = (M')^n \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc de calculer M^n afin de déterminer une expression de P_n.

Proposition. *Les valeurs propres de M' sont*

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}}, \; x_1 = \frac{-x_0 - i\sqrt{-4 + 3x_0^2}}{2}, \; x_2 = \frac{-x_0 + i\sqrt{-4 + 3x_0^2}}{2}$$

Définition (Polynôme caractéristique d'une matrice carrée de taille n)**.** *On définit le polynôme caractéristique d'une matrice carrée C de taille n par $\chi_C(X) = \det(XI_n - C)$. Les valeurs propres de C sont les solutions du polynôme caractéristique.*

Définition (Déterminant d'une matrice carrée de taille 3)**.** *Le déterminant d'une matrice carrée $E = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est :*

$$\det(E) = aei + dhc + bfg - gec - dbi - ahf.$$

Lemme 8 (Formule de Cardan)**.** *Pour calculer une solution d'une équation de la forme $X^3 = pX + q$, avec p et q des réels quelconques, on peut utiliser la formule de Cardan (admise) qui dit qu'une solution de cette équation est*

$$\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}$$

Preuve de la proposition. On calcule les racines de $\chi_{M'}(X)$, qui sont les valeurs propres de M'.

$$\chi_{M'}(X) = 0$$

$$\iff \det(XI_3 - M') = 0$$

$$\iff \det\left(\begin{pmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\iff X^3 - X - 1 = 0$$

On a ici une équation de la forme $X^3 = pX + q$, avec $p = q = 1$. D'après la formule de Cardan, une solution de cette équation est :

$$x_0 = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1^2}{4} - \frac{1^3}{27}} + \frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1^2}{4} - \frac{1^3}{27}} - \frac{1}{2}}$$

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}}$$

Ce nombre irrationnel, qui vaut environ $1,3247$, s'appelle le nombre plastique. Étant donné que $\chi_M(X)$ est un polynôme de degré 3, il se factorise ainsi :

$$\chi_M(X) = (X - x_0)P(X)$$

avec $P(X)$ un polynôme de degré 2. On veut donc trouver $P(X)$ pour trouver les 2 autres racines (qui sont complexes) de $\chi_M(X)$.
On utilise la méthode de la potence :

$$\begin{array}{l|l}
X^3 - X - 1 & X - X_0 \\ \hline
-(X^3 - X_0X^2) & X^2 + X_0X + (-1 + X_0^2) \\ \cline{1-1}
X_0X^2 - X - 1 & \\
-(X_0X^2 - X_0^2X) & \\ \cline{1-1}
-X + X_0X_0^2 - 1 & \\
-(-X + X_0 + XX_0^2 - X_0^3) & \\ \cline{1-1}
-1 - X_0 + X_0^3 = 0 &
\end{array}$$

Cela revient exactement à :

$$X^3 - X - 1 = (X - x_0)(X^2 + x_0X - 1 + x_0^2)$$

Il en découle que les deux autres racines de $\chi_M(X)$ sont les racines de $X^2 + x_0X - 1 + x_0^2$. Ce polynôme étant du second degré, ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \quad (a = 1, b = x_0, c = -1 + x_0^2)$$

$$x_1 = \frac{-x_0 - i\sqrt{-4+3x_0^2}}{2}, \quad x_2 = \frac{-x_0 + i\sqrt{-4+3x_0^2}}{2}$$

On a bien prouvé la proposition, puisque les racines de $\chi_{M'}(XI_3 - M')$ sont les valeurs propres de M'. □

Le polynôme caractéristique de la matrice M n'admet qu'une seule racine réelle, et deux racines complexes. Par conséquent, elle n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Nous aurions pu essayer de la diagonaliser dans $\mathbb{C}$, mais par manque de temps, nous allons admettre la formule explicite de la suite de Perrin :

$$\boxed{\forall n \geq 0, P_n = x_0^n + x_1^n + x_2^n.}$$

4.3. Propriétés de primalité

La suite de Perrin a des propriétés de primalité intéressantes. En effet, il semblerait à première vue que si P_n est divisible par n, alors n est premier. Par exemple, $2 \mid P_2 = 2$ et 2 est premier. $3 \mid P_3 = 3$ et 3 est premier. $5 \mid P_5 = 5$ et 5 est premier... On peut trouver un très grand nombre d'exemples, mais est-ce toujours vrai ? Pour répondre à cette question, nous avons écrit un programme python, dans le but de trouver un contre-exemple.

Conjecture 1. Si n divise P_n, alors n est premier.

```
from math import*
def perrin(n):
    x=(1/2 + (69)**1/2 / 18)**1/3 + (1/2 - (69)**1/2 /18)**1/3
    y=(-x-1j*(-4+3*x**2)**1/2)/2
    z=(-x+1j*(-4+3*x**2)**1/2)/2
    return x**n+y**n+z**n
```

Cette partie du programme définit la suite de Perrin, avec la formule explicite. La suite du programme demande le théorème suivant.

Théorème 1 (Test de primalité)**.** *Soit n dans $\mathbb{N}$. Si aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ ne divise n, alors n est premier.*

Preuve du théorème. Supposons par l'absurde qu'aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$ ne divise $\sqrt{n}$, mais que n n'est pas premier. Alors, il existe deux entiers a et b tels que $n = ab$. Montrons que forcément, soit $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$. Si $a, b > \sqrt{n}$, alors $ab = n > n$, ce qui est absurde. Donc forcément, on a a ou b qui est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$. □

En ce qui concerne la prochaine partie du programme, nous avons défini deux fonctions. La deuxième va tester si le nombre entré est premier. D'abord, si le nombre vaut 1, alors il n'est évidemment pas premier. Sinon, le programme va utiliser le test de primalité ci-dessus pour voir si n est premier. Il va prendre tous les entiers inférieurs à $\sqrt{n}$ (même ceux qui ne sont pas premiers, car nous ne savons pas sélectionner que les entiers premiers), et regarder s'ils divisent n avec la première fonction, qui regarde le reste de la division de n par d. Si le reste est nul, c'est que d divise n. Alors le programme dira que n n'est pas premier. Sinon, on réessaye avec l'entier suivant, jusqu'à ce que d est égal à $\sqrt{n}$. Si d ne divise jamais n, alors n est premier, d'après le théorème ci-dessus.

```python
def est_compose(n,d):
    return n % d == 0
def primalite(n):
    if n < 2 :
        return False
    d=2
    while d <= n**1/2:
        if est_compose(n,d):
            return False
        d=d+1
    return True
```

Ensuite, cette partie du programme a pour but de trouver un contre-exemple à la conjecture que nous voulions vérifier. Un entier pseudo-premier est un entier n tel que n divise P_n mais n n'est pas premier. Nous avons créé une liste, appelée pseudopremiers, qui contient ces entiers. Quand un utilisateur entre une limite, c'est-à-dire la dernière valeur de n testée par le programme, le programme prend tous les entiers de 2 à la limite, et vérifie si n est un pseudo-premier. De plus, nous avons créé une autre liste, conjecturevrai, qui contient les entiers qui vérifient la conjecture.
Nous nous sommes aussi questionnés quant à la probabilité de tomber sur un nombre pseudo-premier quand on prend un entier n tel que n divise P_n, en choisissant un nombre fini de termes de la suite de Perrin. Par exemple, en considérant les termes 1000 premiers termes de la suite, quelle est la probabilité que l'on tombe sur un nombre premier quand on prend un entier n tel que n divise P_n ? Nous avons donc ajouté deux lignes au programme, qui permettent de renvoyer cette probabilité, en faisant le calcul

$$P(\text{pseudo-premier}) = \frac{\text{nombre de pseudo-premiers}}{\text{nombre d'entiers } n \text{ tels que } n \text{ divise } P_n}$$

Il faut bien comprendre que cette probabilité doit être calculée pour un nombre fini de termes de la suite de Perrin. En effet, si l'on considère l'ensemble des termes de la suite de Perrin, il est possible qu'il y ait une infinité de nombres pseudo-premiers et d'entiers n tels que n divise P_n. Le calcul poserait donc problème.

```python
def quasiprimalite(limite):
    pseudopremiers = []
    conjecturevrai = []
    for n in range(2, limite + 1):
        P_n = perrin(n)
        if P_n % n == 0 and not primalite(n):
            pseudopremiers.append(n)
        if P_n % n == 0 and primalite(n):
            conjecturevrai.append(n)
    prob_pseudopremier = len(pseudopremiers) / (len
        (conjecturevrai) +len(pseudopremiers))
    return pseudopremiers, conjecturevrai, prob_pseudopremiers
```

Malheureusement, le programme n'a jamais réellement fonctionné, car il tournait pendant des heures sans jamais renvoyer de pseudo-premier. En réalité, 271 441 est le premier entier pseudo-premier, trouvé en 1982 par Adams et Shanks selon Wikipédia. En effet, 271441 divise P_{271441} (qui a 33 150 chiffres), mais $271441 = 521^2$. Il est possible que nos ordinateurs ne soient pas assez puissants pour obtenir ce résultat. Par conséquent, notre conjecture est fausse.

5. Contact

Pour tout commentaire, question, conseil, veuillez me contacter à l'adresse : yangmattheo@gmail.com .