Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Les (*presque*) 1 001 surprises de la suite de Stern

Année 2021-2022

Auteurs : Alexis BAUMANN, François BOSIO, Alban CAMPIONI, Alan QUEMERAIS.
(élèves de Terminale générale)
Établissement : Lycée Paul Guérin, Niort (79).
Encadrés par : Fabien AOUSTIN, Thomas FORGET.
Chercheur : Abdallah EL HAMIDI, Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement, LaSIE, UMR CNRS 7356, La Rochelle Université.

Dans cet article, nous nous intéresserons à l'étude d'une suite qui recèle de très nombreuses propriétés assez surprenantes, qui n'ont été établies qu'assez récemment pour la première fois. Certaines des démonstrations proposées sont basées sur les pistes exposées dans un article de M. Jean-Paul Delahaye, publié dans un article de la revue « Pour la science ».

Dans cet article, nous étudierons différentes propriétés de la suite, dite (***diatomique***) ***de Stern***, qui est définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{2n}=u_n$ et $u_{2n+1}=u_n+u_{n+1}$.

Dans un premier temps, nous avons commencé par programmer une liste affichant tous les termes de cette suite, jusqu'à un certain rang saisi par l'utilisateur.

Cet algorithme peut s'écrire de plusieurs manières comme, par exemple :

```
max=int(input("Rang limite "))

u=[0,1]

for n in range(2,max+2):
    if n%2==0:
        u.append(u[n//2])
    else:
        u.append(u[n//2]+u[n//2 + 1])
```

```
max=int(input("Rang limite "))

u=[0,1]

n=2
while n<max+2:
    u.append(u[n//2])
    u.append(u[n//2]+u[n//2 + 1])
    n=n+2
```

(*Ils calculent un terme de trop, à cause d'autres suites qui seront étudiées à la fin de l'article.*)

Remarque : L'hypothèse $u_0=0$ est superflue, car $u_1=u_{2\times 0+1}=u_0+u_1$ implique ce choix.

Quelques propriétés (immédiates) importantes de la suite de Stern :

- $\forall\, p\in\mathbb{N}$, $u_{2^p}=1$. Et réciproquement, si $u_n=1$, alors il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=2^p$.
  (*récurrence immédiate pour l'implication directe.*)
  (*pour la réciproque : On raisonne par l'absurde en supposant qu'un terme égal à* 1 *à un rang qui n'est pas une puissance de* 2*. Comme* $u_{2n}=u_n$ *, on « redescend » alors jusqu'à un terme de la suite égal à* 1*, et de rang impair distinct de* 1*. Ce qui est absurde, par construction de ces termes qui sont des sommes de deux termes chacun supérieur ou égal à* 1*.*)

- $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_{2n+1}=u_n+u_{n+1}=u_{2n}+u_{2n+2}=u_{(2n+1)-1}+u_{(2n+1)+1}$, d'où le résultat fondamental :

Résultat fondamental : Pour tout entier naturel k ***impair*** ($k = 2\,n + 1$), $u_k=u_{k-1}+u_{k+1}$.

(*On devine ici une première similarité avec la suite de Fibonacci, reprise dans les parties* 3) *et* 4).)

1) Présentation « en ligne » de la suite de Stern :

En observant les termes de la suite (u_n), on note une forme de symétrie des nombres autour de chaque « 2 », entre deux « 1 » successifs. Afin de visualiser cette symétrie, nous avons affiché les termes de la suite (u_n) en ligne, en effectuant un retour à la ligne à chaque « 1 », sauf u_1.
En anticipant ce qui suit, nous affichons ce même « 1 » au début de la ligne suivante.
Un « 1 » situé en début de ligne est donc le même terme de la suite que le « 1 » situé à la fin de la ligne précédente : Bien que l'on en ai affiché deux, nous considérerons que c'est le même terme.

Voici le programme qui a été utilisé, qui prend le parti de ne pas afficher $u_0=0$:

```
k=1
L=[1]

while k<max+1:
    while u[k]!=1 and k<max+1:
        L.append(u[k])
        k=k+1
    L.append(1)
    k=k+1
    print(L)
    L=[1]
```

Ce programme donne cet affichage pour les premières lignes :

```
[1, 1]
[1, 2, 1]
[1, 3, 2, 3, 1]
[1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1]
[1, 5, 4, 7, 3, 8, 5, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 5, 1]
[1, 6, 5, 9, 4, 11, 7, 10, 3, 11, 8, 13, 5, 12, 7, 9, 2, 9, 7, 12, 5, 13, 8, 11, 3, 10, 7, 11, 4, 9, 5, 6, 1]
```

Chaque ligne semble effectivement suivre le schéma [1 … 2 … 1], avec une disposition des nombres qui semble symétrique par rapport au « 2 » .
Ce que l'on résume en qualifiant chaque ligne de ***palindrome***.

Remarquons que nous avons numéroté les lignes de la manière suivante :
La ligne [1 1], qui est composée de $u_1=1$ puis de $u_2=1$, est considérée comme la ligne 0.
La ligne 1 est donc [1 2 1], qui est composée de la redite de $u_2=1$, puis $u_3=2$, et $u_4=1$.
Comme $u_n=1 \Leftrightarrow \exists p\in\mathbb{N} ; n=2^p$, alors la ligne *n* contient 2^n termes de la suite (sans compter le « 1 » de début de ligne qui est une répétition du « 1 » situé à la fin de la ligne précédente, à partir de la ligne 1.). Par exemple, la ligne 3, qui est [1 4 3 5 2 5 3 4 1], est composée de $2^3=8$ termes (sans comptabiliser son « 1 » initial).

<u>Plus précisément, pour les valeurs contenues dans la ligne *n* :</u>
Le « 1 » tout à la fin de la ligne *n* a pour rang dans la suite (u_n) : $1+2^0+2^1+...+2^n$ (le « 1+ » initial pour comptabiliser le terme u_1 .).
Cette somme est égale à $1+\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=1+\frac{1-2^{n+1}}{-1}=1+2^{n+1}-1=2^{n+1}$.
Et le « 1 » situé au début de ligne *n* (répétition du « 1 » précédent) est donc de rang 2^n .

Nous remarquons aussi que les « 2 » sont toujours au centre d'une ligne seulement, et ont pour rang $2^n+\frac{2^n}{2}=2^n+2^{n-1}$. (rang du « 1 » initial ajouté à la moitié du nombre de termes de la ligne.)
Ce qui revient à $u_n=2 \Leftrightarrow \exists p\in\mathbb{N}^* ; n=2^p+2^{p-1}=2^{p-1}\times 3$. *(car $u_3=2$, et les autres « 2 » de la suite ne peuvent être obtenus que par $u_{2^p\times 3}=u_3=2$ (raisonnement par l'absurde).)*

Plus généralement, nous avons le résultat suivant :

Propriété.

u_n est pair, si et seulement si n est un multiple de 3.

Preuve :

Nous démontrons par récurrence forte que $\forall k \in \mathbb{N}$, u_{3k} est pair, u_{3k+1} et u_{3k+2} sont impairs

Initialisation : Pour $k = 0$, on a bien $u_{3\times 0}=u_0=0$ qui est pair.
Tandis que $u_{3\times 0+1}=u_1=1$ et $u_{3\times 0+2}=u_2=1$ sont bien impairs
Hérédité : On suppose que pour un certain entier $k_0 \geqslant 1$:
$\forall k \in [\![0\,;k_0-1]\!]=[0\,;k_0-1]\cap\mathbb{N}$, u_{3k} est pair, u_{3k+1} et u_{3k+2} sont impairs.
Et on cherche à établir que u_{3k_0} est pair, u_{3k_0+1} et u_{3k_0+2} sont impairs.

- Si k_0 est pair, alors $k_0=2l$ avec $l\in[\![0\,;k_0-1]\!]$. Ainsi :
$u_{3k_0}=u_{6l}=u_{2\times 3l}=u_{3l}$ est pair, par hypothèse de récurrence forte.
$u_{3k_0+1}=u_{6l+1}=u_{2\times(3l)+1}=u_{3l}+u_{3l+1}$ est impair (somme d'un nombre pair et d'un nombre impair), par hypothèse de récurrence forte.
$u_{3k_0+2}=u_{6l+2}=u_{2\times(3l+1)}=u_{3l+1}$ est impair, par hypothèse de récurrence forte.

- Si k_0 est impair, alors $k_0=2l+1$ avec $l\in[\![0\,;k_0-1]\!]$. Ainsi :
$u_{3k_0}=u_{6l+3}=u_{2(3l+1)+1}=u_{3l+1}+u_{3l+2}$ est pair (somme de deux nombres impairs), par hypothèse de récurrence forte.
$u_{3k_0+1}=u_{6l+4}=u_{2\times(3l+2)}=u_{3l+2}$ est impair, par hypothèse de récurrence forte.
$u_{3k_0+2}=u_{2(3l+2)+1}=u_{3l+2}+u_{3l+3}=u_{3l+2}+u_{3(l+1)}$ est impair (somme d'un nombre pair et d'un nombre impair), par hypothèse de récurrence forte.

Ce qui valide l'étape d'hérédité, et conclut donc la démonstration.

Propriété.

La symétrie constatée revient à montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![1\,;2^{n-1}]\!]$, $u_{2^n+2^{n-1}+k}=u_{2^n+2^{n-1}-k}$.

Preuve :

Cette propriété se démontre par récurrence sur l'entier n, et repose sur les propriétés « fondamentales » de la suite (u_n) qui ont été données en page 1 :
Initialisation : Pour $n = 1$, on doit tester tous les entiers $k\in[\![1\,;2^0]\!]=\{1\}$. Donc seulement $k = 1$.
On remarque que l'on a bien $u_4=1=u_2$, ce qui valide l'initialisation.
Hérédité : On suppose que pour un certain entier $n > 0$: $\forall k\in[\![1\,;2^{n-1}]\!]$, $u_{2^n+2^{n-1}+k}=u_{2^n+2^{n-1}-k}$.
Et on cherche à établir que $\forall k\in[\![1\,;2^n]\!]$, $u_{2^{n+1}+2^n+k}=u_{2^{n+1}+2^n-k}$.

- Si k est pair ($k = 2p$), alors les deux indices $2^{n+1}+2^n+k$ et $2^{n+1}+2^n-k$ sont pairs.
Par suite, $u_{2^{n+1}+2^n+k}=u_{2\times(2^n+2^{n-1}+p)}=u_{2^n+2^{n-1}+p}=u_{2^n+2^{n-1}-p}$, par hypothèse de récurrence.
Et ainsi $u_{2^{n+1}+2^n+k}=u_{2\times(2^n+2^{n-1}-p)}=u_{2^{n+1}+2^n-k}$, par définition de la suite (u_n) .
- Si k est impair ($k = 2p + 1$), alors les deux indices $2^{n+1}+2^n+k$ et $2^{n+1}+2^n-k$ sont impairs.
Par suite, $u_{2^{n+1}+2^n+k}=u_{2^{n+1}+2^n+2p+1}=u_{2\times(2^n+2^{n-1}+p)+1}=u_{2^n+2^{n-1}+p}+u_{2^n+2^{n-1}+p+1}$;
D'où $u_{2^{n+1}+2^n+k}=u_{2^n+2^{n-1}-p}+u_{2^n+2^{n-1}-p-1}$, par hypothèse de récurrence
Et ainsi, $u_{2^{n+1}+2^n+k}=u_{2^n+2^{n-1}-p-1}+u_{2^n+2^{n-1}-p}=u_{2^{n+1}+2^n+(2(-p-1))+1}=u_{2^{n+1}+2^n+(-2p-1)}=u_{2^{n+1}+2^n-k}$.
Ce qui valide l'étape d'hérédité, et conclut donc la démonstration.

Nous pouvons étudier, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $S_p=\sum_{k=0}^{p} u_k=\sum_{k=1}^{p} u_k$ (car $u_0=0$) la somme des p premiers termes de la suite de Stern. Nous nous intéressons à cette somme de termes jusqu'à un « 1 » de la suite.C'est à dire S_{2^n} , que l'on peut voir aussi comme la somme cumulée des n premières lignes (sans compter les « 1 » de début de ligne, répétition de la fin de ligne précédente).

Pour y parvenir, nous étudierons au préalable la somme des éléments de la ligne n : $\sigma_n=\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} u_k$:

Propriété.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sigma_n=3^n+1$, et $S_{2^n}=\dfrac{3^n+1}{2}$.

Preuve :

1) On a $\sigma_{n+1}=\sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+2}} u_k=\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} (u_{2k}+u_{2k+1})-u_{2^{n+2}+1}$, en séparant en deux groupes le terme principal.

$$\Leftrightarrow \sigma_{n+1}=\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} (u_k+u_k+u_{k+1})-u_{2^{n+2}+1}=2\left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} u_k\right)+\left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} u_{k+1}\right)-u_{2^{n+2}+1}=2\left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} u_k\right)+\left(\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}+1} u_k\right)-u_{2^{n+2}+1}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{n+1}=2\left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} u_k\right)+\left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} u_k+u_{2^{n+1}-1}-u_{2^n}\right)-u_{2^{n+2}+1}=3\left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} u_k\right)+u_{2^{n+1}-1}-u_{2^n}-u_{2^{n+2}+1}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{n+1}=3\sigma_n+u_{2^{n+1}-1}-u_{2^n}-(u_{2^{n+1}}+u_{2^{n+1}+1})=3\sigma_n-u_{2^n}-u_{2^{n+1}}=3\sigma_n-1-1=3\sigma_n-2 \; .$$

La suite (σ_n) est donc arithmético-géométrique. De plus, comme $(x=3x-2)\Leftrightarrow(x=1)$, on montre que la suite (t_n) définie par $t_n=\sigma_n-1$ est une suite géométrique de raison 3.

Pour tout entier naturel n, on en déduit que $t_n=t_0\times3^n=1\times3^n$, et donc $\sigma_n=t_n+1=3^n+1$.

2) Par construction, $S_{2^{n+1}}=S_{2^n}+\sigma_n-u_{2^n}$ (on retire le $u_{2^n}=1$ qui est répété en début de ligne).

Ainsi $S_{2^{n+1}}=S_{2^n}+3^n+1-1=S_{2^n}+3^n$. Par suite, $S_{2^n}=S_{2^0}+\sum_{k=0}^{n-1} 3^k=S_1+\dfrac{1-3^{n+1-1}}{1-3}=1+\dfrac{3^n-1}{2}=\dfrac{3^n+1}{2}$

2) La suite de Stern cachée dans la suite de Stern :

Cette présentation par retour à la ligne conduit aussi à un autre constat :

Chaque colonne ainsi obtenue est une suite arithmétique.

Comme la première colonne de « 1 », vue comme colonne 0, contient les termes de rang 2^n :
Nous en déduisons que les termes de la colonne k ont pour rang 2^n+k (cette colonne commençant à la ligne n à partir de laquelle $k<2^n \Leftrightarrow n>\dfrac{\ln k}{\ln 2}$, qui est noté $\log_2(k)$ ou lb (k).).

(*Par raccourci, nous nous autoriserons à sous-entendre l'écriture* $\log_2(c)$ *avec* c = 0.)

Détails pour les colonnes 1 et 2 :

- Étude de la suite (a_n) définie, pour tout entier naturel n, par $a_n=u_{2^n+1}$:

On a $a_{n+1}=u_{2^{n+1}+1}=u_{2^{n+1}}+u_{2^{n+1}+1+1}=u_{2^{n+1}}+u_{2^{n+1}+2}=u_{2\times2^n}+u_{2\times(2^n+1)}=u_{2^n}+u_{2^n+1}=1+u_{2^n+1}=1+a_n$.

La suite (a_n) est donc arithmétique de raison R =1.

- Étude de la suite (b_n) définie, pour tout entier naturel n, par $b_n=u_{2^n+2}$:

On a $b_{n+1}=u_{2^{n+1}+2}=u_{2\times(2^n+1)}=u_{2^n+1}=u_{2^n}+u_{2^n+2}=1+b_n$.

La suite (b_n) est donc arithmétique de raison R =1.

En observant les colonnes suivantes (pour lesquelles le raisonnement se complique), on remarque que les raisons des différentes suites arithmétiques en colonne forment la suite de Stern (u_n).
Plus précisément, il semble que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout entier n tel que $k < 2^{n-1}$, la suite (a_n) définie par $a_n = u_{2^n+k}$ est arithmétique de raison u_k :
C'est à dire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $k < 2^{n-1}$, $u_{2^{n+1}+k} = u_{2^n+k} + u_k$.

Pour mener à bien cette démonstration, nous avons adopté une autre approche :
On note $u(l,c) = u_{2^l+c}$. Il s'agit du terme situé ligne l et colonne c, où les entiers l et c sont tels que $c \leqslant 2^l$ (car la ligne l comporte 2^l termes).
Notons que la « ligne 0 *» est bien la ligne* [1 1]*, et que la « colonne* 0 *» est bien la colonne initiale.*
Reformulation des propriétés de la suite de Stern avec cette terminologie :

(1) $u_{2^n} = 1$ revient à $u(l,0) = 1$;
(2) $u_{2n} = u_n$ revient à $u(l+1, 2c) = u(l,c)$;
(3) $u_{2n+1} = u_n + u_{n+1}$ revient à $u(l+1, 2c+1) = u(l,c) + u(l, c+1)$;
(4) $u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n+2}$ revient à $u(l+1, 2c+1) = u(l+1, 2c) + u(l+1, 2c+2)$.

Avec cette terminologie, la propriété signalée précédemment se reformule en :

Théorème.

$\forall (l;c); c \leqslant 2^l$: $u(l+1, c) = u(l,c) + u_c$. (*On rappelle que* $c \leqslant 2^l \Leftrightarrow l \geqslant \log_2(c)$.)

<u>Démonstration :</u> Cette propriété se démontre par récurrence forte sur l'entier c.
<u>Initialisation :</u> Pour c = 0, on doit tester si $\forall l \in \mathbb{N}$: $u(l+1, 0) = u(l,0) + u_0$.
Comme, pour tout entier l, $u(l,0) = 1$ (propriété (1)), et $u_0 = 0$, alors c'est immédiat.
(Pour c = 1: D'après (3), $u(l+1, 1) = u(l,0) + u(l,1) = 1 + u(l,1) = u_1 + u(l,1)$ ...)
<u>Hérédité :</u> On suppose par hypothèse de récurrence forte que, pour un certain entier c_0 :
$\forall c \in [\![0; c_0]\!]$, $\forall l \in \mathbb{N}; l \geqslant \log_2(c)$, $u(l+1, c) = u(l,c) + u_c$.
Et on cherche à établir que $\forall l \in \mathbb{N}; l \geqslant \log_2(c_0+1)$, $u(l+1, c_0+1) = u(l, c_0+1) + u_{c_0+1}$.

- Si c_0 est impair (ce qui implique que c_0+1 est pair) :

On remarque que $l \geqslant \log_2(c_0+1) \Leftrightarrow l-1 \geqslant \log_2(c_0+1) - 1 = \log_2(c_0+1) - \log_2(2) = \log_2\left(\frac{c_0+1}{2}\right)$.

On a $u(l+1, c_0+1) = u\left(l, \frac{c_0+1}{2}\right)$, car c_0+1 est pair, et d'après la propriété reformulée (2).

D'où $u(l+1, c_0+1) = u\left(l-1, \frac{c_0+1}{2}\right) + u_{\frac{c_0+1}{2}}$, par hypothèse de récurrence forte.

Et, par suite $u(l+1, c_0+1) = u(l, c_0+1) + u_{c_0+1}$, car $u_n = u_{2n}$.

- Si c_0 est pair (ce qui implique que c_0+1 est impair) :

On remarque que $l \geqslant \log_2(c_0+1) \Leftrightarrow l-1 \geqslant \log_2(c_0+1) - 1 = \log_2(c_0+1) - \log_2(2) = \log_2\left(\frac{c_0+1}{2}\right)$.

On note p l'entier tel que $2^p < c_0+1 < 2^{p+1}$ (inégalités strictes car c_0+1 est impair différent de 1).
On remarque que $c_0+1 > 2^p \Leftrightarrow \log_2(c_0+1) > p$;

Mais aussi que $\frac{c_0}{2} + 1 < 2^p + \frac{1}{2}$, qui se récrit $\frac{c_0}{2} + 1 \leqslant 2^p$ car $\frac{c_0}{2} + 1$ est entier.

Ainsi, $l \geqslant \log_2(c_0+1) \Leftrightarrow l-1 > p-1 \Leftrightarrow l-1 \geqslant p = \log_2(2^p) \Leftrightarrow l-1 \geqslant \log_2\left(\frac{c_0}{2}+1\right) > \log_2\left(\frac{c_0}{2}\right)$.

On peut donc écrire $u(l+1, c_0+1)=u\left(l, \frac{c_0}{2}\right)+u\left(l, \frac{c_0}{2}+1\right)$, d'après la propriété reformulée (3).

D'où $u(l+1, c_0+1)=\left(u\left(l-1, \frac{c_0}{2}\right)+u_{\frac{c_0}{2}}\right)+\left(u\left(l-1, \frac{c_0}{2}+1\right)+u_{\frac{c_0}{2}+1}\right)$, par hypothèse de récurrence.

Et, par suite, $u(l+1, c_0+1)=u\left(l-1, \frac{c_0}{2}\right)+u\left(l-1, \frac{c_0}{2}+1\right)+u_{\frac{c_0}{2}}+u_{\frac{c_0}{2}+1}=u(l, c_0+1)+u_{c_0+1}$.

Ce qui valide l'hérédité, et conclut donc la démonstration.

Finalement, nous avons bien démontré que pour une colonne c fixée, la suite qu'elle contient est arithmétique de raison u_c .

Pour finir, nous avons utilisé cette terminologie pour récrire le fait que chaque ligne est un palindrome, ce que nous utiliserons dans la partie suivante :
Ce résultat devrait s'écrire : Pour tout $l\in\mathbb{N}$, et $k\in[\![0 ; 2^{l-1}]\!]$, $u(l, 2^{l-1}-k)=u(l, 2^{l-1}+k)$.
Mais nous avons démontré l'énoncé équivalent :

Propriété.
$\forall(l ; c) ; c\leqslant 2^l$: $u(l, c)=u(l+1, -c)$, ce dernier terme étant aussi $u(l, 2^l-c)$.
(*Sur une ligne l fixée,* $u(l, c)=u_{2^l+c}$ *, et* $u(l+1, -c)=u_{2^{l+1}-c}=u_{2^l+2^l-c}=u(l, 2^l-c)$.)

<u>Démonstration :</u>
Cette propriété se démontre par récurrence sur l'entier l.
<u>Initialisation :</u> Pour l = 0, on doit tester si $\forall c\in\mathbb{N} ; c\leqslant 2^0=1$: $u(0, c)=u(1, -c)$. (c = 0 ou 1)
Les termes $u(0, 0)=u_1=1$, et $u(1, -0)=u_2=1$ sont bien égaux, d'une part.
Et les termes $u(0, 1)=u_2=1$, et $u(1, -1)=u_1=1$ le sont aussi, d'autre part.
<u>Hérédité :</u> On suppose par hypothèse de récurrence que, pour un certain entier l :
$\forall c\in[\![0 ; 2^l]\!]$, $u(l, c)=u(l+1, -c)$.
Et on cherche à établir que $\forall c\in[\![0 ; 2^{l+1}]\!]$, $u(l+1, c)=u(l+2, -c)$.

On considère donc un entier $c\in[\![0 ; 2^{l+1}]\!]$, et deux cas se présentent :

- Si c est pair, alors $\frac{c}{2}\in[\![0 ; 2^l]\!]$.

Donc $u(l+2, -c)=u\left(l+1, -\frac{c}{2}\right)$, d'après la propriété reformulée (2).

D'où $u(l+2, -c)=u\left(l, \frac{c}{2}\right)$, par hypothèse de récurrence.

Et ainsi $u(l+2, -c)=u(l+1, c)$, d'après la propriété reformulée (2).

- Si c est impair, alors $\frac{c-1}{2}$ et $\frac{c+1}{2}$ appartiennent à $[\![0 ; 2^l]\!]$. Et $-c=2\times\frac{-c-1}{2}+1$.

Donc $u(l+2, -c)=u\left(l+1, -\frac{c+1}{2}\right)+u\left(l+1, -\frac{c-1}{2}\right)$, d'après la propriété reformulée (3).

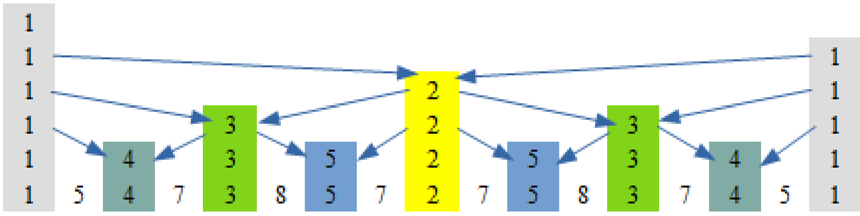
D'où $u(l+2, -c)=u\left(l, \frac{c+1}{2}\right)+u\left(l, \frac{c-1}{2}\right)$, par hypothèse de récurrence.

Et ainsi $u(l+2, -c)=u(l+1, c+1)+u(l+1, c-1)=u(l+1, c)$, d'après la propriété reformulée (4).

Ce qui valide l'hérédité, et conclut donc la démonstration.

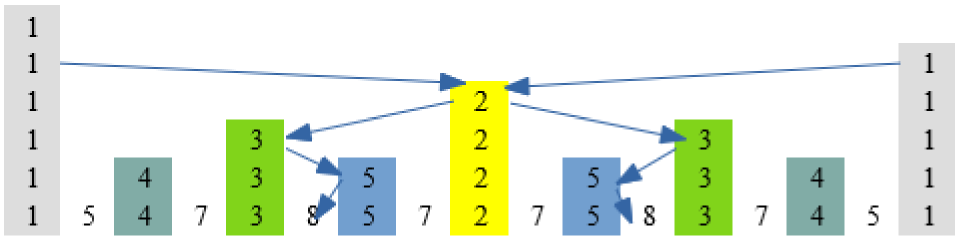
3) Le suite de Fibonacci cachée dans la suite de Stern :

Les formules $u_{2k}=u_k$ et, $u_{2k+1}=u_k+u_{k+1}$ offrent une régularité dans l'apparition des différents termes de la suite, que l'on visualise en espaçant les colonnes dans la présentation en ligne :



On visualise ainsi que les termes de rang impair sont les « sommets » de chaque colonne, tandis que les termes de rangs pairs sont ceux qui sont tous « en-dessous » dans la colonne (car $u_{2k}=u_k$).

Nous allons montrer que la suite composée du maximum de chaque ligne est la suite de Fibonacci.
Rappelons que c'est la suite (F_n) définie par $F_0=0$, $F_1=1$, et $\forall n$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$.
Ce résultat se visualise mieux avec cette présentation :



Le maximum d'une ligne *n* est toujours à un rang impair, ce qui découle du fait que :

$$u_{2k+1}=u_k+u_{k+1}>u_k=u_{2k}$$

De plus, comme $u_{2k+1}=u_k+u_{k+1}=u_{2k}+u_{2k+2}$, alors ce maximum est la somme des ses deux termes voisins. L'un étant aussi le maximum de la ligne *n*-1 et l'autre le maximum de la ligne *n*-2, en tant que « sommets » des colonnes contenant u_{2k} et u_{2k+2} .
Ce qui conduit ainsi à l'apparition de la suite de Fibonacci parmi les termes de la suite de Stern.

Nous proposons dans ce qui suit une démonstration de ce résultat.
Pour tout $l\in\mathbb{N}$, nous notons c_l la colonne du terme de la suite qui est le maximum de la ligne *l*.
Nous avons remarqué que chaque ligne semble avoir deux maxima. Et nous avons alors fait le choix de nous intéresser à la colonne du terme qui est situé avant le 2, pour chaque ligne.
Pour les démonstrations, nous reprenons la terminologie utilisée dans la partie 2).

Le constat sur le graphique précédent nous a amené à considérer les colonnes c_l définies par :

- $c_0=0$
- si *l* est pair : $c_{l+1}=2c_l+1$ et, si *l* est impair : $c_{l+1}=2c_l-1$.

Ou, de manière plus générale : $c_0=0$ et $\forall l\in\mathbb{N}$, $c_{l+1}=2c_l+(-1)^l$.

Voici les résultats intermédiaires que nous allons démontrer dans ce qui suit :
(1) $\forall l\in\mathbb{N}$, $0\leqslant c_l\leqslant 2^l-2^{l-1}$ (utilisée pour les démonstrations des autres résultats).
(2) $\forall l\in\mathbb{N}$, $u(l,c_l)=u_{2^l+c_l}=F_{l+2}$, où (F_n) est la suite de Fibonacci.
(3) $\forall l\in\mathbb{N}$, F_{l+2} est le maximum de la ligne *l*.
(4) Tous les termes de la ligne *l* autres que $u(l,c_l)$ et $u(l,2^l-c_l)$ (*symétrique par rapport au* 2 *central de la ligne* (*d'après la propriété vue précédemment*)) sont strictement inférieurs à F_{l+2} .
(5) $\forall l\in\mathbb{N}$, $c_l=\dfrac{2^l-(-1)^l}{3}$. D'où $u_{2^l+\frac{2^l-(-1)^l}{3}}=u\left(l,\dfrac{2^l-(-1)^l}{3}\right)=F_{l+2}$.

À partir de ces résultats, nous en déduisons que la suite des maximums de chaque ligne est la suite de Fibonacci, et le rang exact de chacun de ces maxima est connu (voir propriété (5)).

Démonstration des cinq résultats intermédiaires :

Démonstration de la propriété (1) : $\forall l \in \mathbb{N} \quad , \quad 0 \leqslant c_l \leqslant 2^l - 2^{l-1}$.

On remarque que $c_0 = 0$ est bien compris entre 0 et $2^0 - 2^{-1} = 0{,}5$, et que $c_1 = 2c_0 + (-1)^0 = 1$ est bien compris entre 0 et $2^1 - 2^0 = 1$

Montrons alors, par récurrence sur l'entier $l \geqslant 2$, l'encadrement plus précis $1 \leqslant c_l \leqslant 2^l - 2^{l-1} - 1$:

Initialisation : Pour $l = 2$, $c_2 = 2c_1 + (-1)^1 = 1$ est bien compris entre 1 et $2^2 - 2^1 - 1 = 1$.

Hérédité : On suppose que, pour un certain entier $l \geqslant 2$: $1 \leqslant c_l \leqslant 2^l - 2^{l-1} - 1$.

Et on cherche à établir que $1 \leqslant c_{l+1} \leqslant 2^{l+1} - 2^l - 1$.

On a $1 \leqslant c_l \leqslant 2^l - 2^{l-1} - 1 \Leftrightarrow 2 \leqslant 2c_l \leqslant 2^{l+1} - 2^l - 2 \Leftrightarrow 2 + (-1)^l \leqslant 2c_l + (-1)^l \leqslant 2^{l+1} - 2^l - 2 + (-1)^l$

D'où $2 - 1 \leqslant 2c_l + (-1)^l \leqslant 2^{l+1} - 2^l - 2 + 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant 2c_l + (-1)^l \leqslant 2^{l+1} - 2^l - 1$, ce qui valide l'hérédité.

En regroupant tous ces résultats, nous avons bien démontré la propriété (1).

Démonstration de la propriété (2) : $\forall l \in \mathbb{N} \quad , \quad u(l, c_l) = F_{l+2}$, où (F_n) est la suite de Fibonacci.

Cette démonstration va s'effectuer par récurrence double :

Initialisation : $u(0, c_0) = u(0, 0) = u_{2^0+0} = u_1 = 1 = F_2$, et $u(1, c_1) = u(1, 1) = u_{2^1+1} = u_3 = 2 = F_3$.

Hérédité : On suppose que pour un certain entier l : $u(l, c_l) = F_{l+2}$, et $u(l+1, c_{l+1}) = F_{l+3}$.

Et on cherche à établir que $u(l+2, c_{l+2}) = F_{l+4}$, ce que nous ferons en séparant en deux cas :

Cas 1 : Si l'entier l est pair

$u(l+2, c_{l+2}) = u(l+2, 2c_{l+1} + (-1)^{l+1}) = u(l+2, 2c_{l+1} - 1)$, car $l + 1$ est impair.

Ainsi $u(l+2, c_{l+2}) = u(l+1, c_{l+1} - 1) + u(l+1, c_{l+1})$, d''après la propriété (3) dans la partie 2).

D'où $u(l+2, c_{l+2}) = u(l+1, 2c_l + 1 - 1) + u(l+1, c_{l+1}) = u(l+1, 2c_l) + u(l+1, c_{l+1})$;

Et donc $u(l+2, c_{l+2}) = u(l, c_l) + u(l+1, c_{l+1})$, d'après la propriété (2) dans la partie 2).

Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $u(l+2, c_{l+2}) = F_{l+2} + F_{l+3} = F_{l+4}$

Cas 2 : Si l'entier l est impair

$u(l+2, c_{l+2}) = u(l+2, 2c_{l+1} + (-1)^{l+1}) = u(l+2, 2c_{l+1} + 1)$, car $l + 1$ est pair.

Ainsi $u(l+2, c_{l+2}) = u(l+1, c_{l+1}) + u(l+1, c_{l+1} + 1)$, d''après la propriété (3) dans la partie 2).

D'où $u(l+2, c_{l+2}) = u(l+1, c_{l+1}) + u(l+1, 2c_l - 1 + 1) = u(l+1, c_{l+1}) + u(l+1, 2c_l)$;

Et donc $u(l+2, c_{l+2}) = u(l+1, c_{l+1}) + u(l, c_l)$, d'après la propriété (2) dans la partie 2).

Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $u(l+2, c_{l+2}) = F_{l+3} + F_{l+2} = F_{l+4}$

Et nous avons ainsi validé l'hérédité dans tous les cas, ce qui conclut la démonstration.

Démonstration de la propriété (3) : $\forall l \in \mathbb{N} \quad , \quad F_{l+2}$ est le maximum de la ligne l.

Montrons par récurrence double sur $l \in \mathbb{N}$ que $\forall c \in [\![0 ; 2^l]\!] \quad , \quad u(l, c) \leqslant F_{l+2}$.

Initialisation : Pour $l = 0$, on a $u(0, 0) = u_{2^0+0} = u_1 = 1 \leqslant 1 = F_2$,et $u(0, 1) = u_{2^0+1} = u_2 = 1 \leqslant 1 = F_2$.

Pour $l = 1$, on a $u(1, 0) = u_{2^1+0} = u_2 = 1 \leqslant 2 = F_3$, $u(1, 1) = u_{2^1+1} = u_3 = 2 \leqslant 2 = F_3$, et $u(1, 2) = u_{2^1+2} = u_4 = 1 \leqslant 2 = F_3$. Ce qui valide l'initialisation

Hérédité : On suppose que, pour un certain entier l :

Pour tout $c \in [\![0 ; 2^l]\!]$, $u(l, c) \leqslant F_{l+2}$ et, pour tout $c \in [\![0 ; 2^{l+1}]\!]$, $u(l+1, c) \leqslant F_{l+3}$.

Et on cherche à montrer que, pour tout $c \in [\![0 ; 2^{l+2}]\!]$, $u(l+2, c) \leqslant F_{l+4}$, ce que nous ferons en séparant en deux cas :

Cas 1 : Si l'entier c est pair
Dans ce cas, l'entier c s'écrit $c = 2k$, avec $k \in [\![0 ; 2^{l+1}]\!]$.
Ainsi $u(l+2, c) = u(l+2, 2k) = u(l+1, k) \leqslant F_{l+3}$, par hypothèse de récurrence.
Et donc $u(l+2, c) \leqslant 0 + F_{l+3} < F_{l+2} + F_{l+3} = F_{l+4}$ car tous les F_n sont strictement positifs.

Cas 2 : Si l'entier c est impair
Dans ce cas, l'entier c s'écrit $c = 2k + 1$, avec $k \in [\![0 ; 2^{l+1} - 1]\!]$.
Et, par suite, $u(l+2, c) = u(l+2, 2k+1) = u(l+1, k) + u(l+1, k+1)$, et nous devons de nouveau étudier séparément deux sous-cas :

Sous-cas 2a : Si l'entier k est pair
Dans ce sous-cas, l'entier k s'écrit $k = 2k'$, avec $k' \in [\![0 ; 2^l - 1]\!]$.
Ainsi $u(l+2, c) = u(l+1, 2k') + u(l+1, 2k'+1) = u(l, k') + u(l+1, 2k'+1) \leqslant F_{l+2} + F_{l+3}$, par hypothèse de récurrence. Et ainsi $u(l+2, c) \leqslant F_{l+4}$ par définition de la suite de Fibonacci.

Sous-cas 2b : Si l'entier k est impair
Dans ce sous-cas, l'entier k s'écrit $k = 2k' + 1$, avec $k' \in [\![0 ; 2^l - 1]\!]$.
Ainsi $u(l+2, c) = u(l+1, 2k'+1) + u(l+1, 2k'+2) = u(l+1, 2k'+1) + u(l+1, 2(k'+1))$, ou encore $u(l+2, c) = u(l+1, 2k'+1) + u(l, k'+1) \leqslant F_{l+3} + F_{l+2} = F_{l+4}$, comme au sous-cas 2a.

Dans tous les cas, l'hérédité est validée, ce qui conclut la démonstration de la propriété (3).

Démonstration de la propriété (4) : Tous les termes de la ligne l, autres que $u(l, c_l)$ et $u(l, 2^l - c_l)$ (*qui sont « symétriques » par rapport au* 2 *central de la ligne*), sont strictement inférieurs à F_{l+2} .
Nous avons vu à la propriété (2) que $F_{l+2} = u(l, c_l) = u(l, 2^l - c_l)$, et la propriété (3) a établi que F_{l+2} est le maximum de la ligne l.
Il reste donc à démontrer que $\forall l \in \mathbb{N}$, $\forall c \in [\![0 ; 2^l]\!] \setminus \{c_l, 2^l - c_l\}$, $u(l, c) < F_{l+2}$.
Ou, étant donnée la symétrie d'une ligne : $\forall l \in \mathbb{N}$, $\forall c \in [\![0 ; 2^l - 2^{l-1}]\!] \setminus \{c_l\}$, $u(l, c) < F_{l+2}$.
Nous allons démontrer ce résultat par récurrence double :
Initialisation : Pour $l = 0$, on a $[\![0 ; 2^0 - 2^{0-1}]\!] \setminus \{c_0\} = \{0\} \setminus \{0\} = \emptyset$, ce qui valide ce cas.
Pour $l = 1$, on a $[\![0 ; 2^1 - 2^{1-1}]\!] \setminus \{c_1\} = [\![0 ; 2^1 - 2^{1-1}]\!] \setminus \{1\} = \{0\}$, et $u(1, 0) = 1 < 2 = F_3$.
Ce qui valide l'initialisation.
Hérédité : On suppose que pour un certain entier l :
Pour tout $c \in [\![0 ; 2^l - 2^{l-1}]\!] \setminus \{c_l\}$, $u(l, c) < F_{l+2}$;
Et, pour tout $c \in [\![0 ; 2^{l+1} - 2^l]\!] \setminus \{c_{l+1}\}$, $u(l+1, c) < F_{l+3}$.
Et on cherche à montrer que, pour tout $c \in [\![0 ; 2^{l+2} - 2^{l+1}]\!] \setminus \{c_{l+2}\}$, $u(l+2, c) < F_{l+4}$, ce que nous ferons en étudiant séparément en deux cas. On considère donc $c \in [\![0 ; 2^{l+2} - 2^{l+1}]\!] \setminus \{c_{l+2}\}$.

Cas 1 : Si l'entier c est pair
Dans ce cas, l'entier c s'écrit $c = 2k$, avec $k \in [\![0 ; 2^{l+1} - 2^l]\!]$.
Ainsi $u(l+2, c) = u(l+2, 2k) = u(l+1, k) \leqslant F_{l+3} < F_{l+4}$, en reprenant les idées de la preuve de (2).

Cas 2 : Si l'entier c est impair
Dans ce cas, l'entier c s'écrit $c = 2k + 1$, avec $k \in [\![0 ; 2^{l+1} - 2^l - 1]\!]$.
Ainsi $u(l+2, c) = u(l+2, 2k+1) = u(l+1, k) + u(l+1, k+1)$, et nous devons séparer de nouveau notre démonstration en deux sous-cas :

Sous-cas 2a : Si l'entier k est pair

Dans ce sous-cas, l'entier k s'écrit $k=2k'$, avec $k'\in[\![0;2^l-2^{l-1}-1]\!]$.

Et, par suite, $u(l+2,c)=u(l+1,2k')+u(l+1,2k'+1)=u(l,k')+u(l+1,2k'+1)$.

Comme, en raisonnant par l'absurde, $(c_l;c_{l+1})\neq(k';2k'+1)$.

(*Sinon, on aurait* $c_{l+1}=2k'+1=2c_l+1$ *, et donc l serait pair. Par suite :*

$c_{l+2}=2c_{l+1}-1=2(2k'+1)-1=4k'+1=2k+1=c$ *, ce qui est rejeté par hypothèse.*)

On en déduit que $\begin{cases} c_l\neq k' \\ ou \\ c_{l+1}\neq 2k'+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(l,k')<F_{l+2}\ (et\ u(l+1,2k'+1)\leqslant F_{l+3}) \\ ou \\ u(l+1,2k'+1)<F_{l+3}\ (et\ u(l,k')\leqslant F_{l+2}) \end{cases}$.

L'affirmation entre parenthèses découlant du fait que F_{n+2} est le maximum de la ligne n (propriété (3)), et l'affirmation avec l'inégalité stricte venant de l'hypothèse de récurrence.

Et, dans les deux cas, on en déduit que $u(l+2,c)<F_{l+2}+F_{l+3}=F_{l+4}$.

Sous-cas 2b : Si l'entier k est impair

Dans ce sous-cas, l'entier k s'écrit $k=2k'+1$, avec $k'\in[\![0;2^l-2^{l-1}-1]\!]$.

Et, par suite, $u(l+2,c)=u(l+1,2k'+1)+u(l+1,2k'+2)=u(l+1,2k'+1)+u(l,k'+1)$.

Comme, en raisonnant par l'absurde, $(c_l;c_{l+1})\neq(k'+1;2k'+1)$.

(*Sinon, on aurait* $c_{l+1}=2k'+1=2c_l-1$ *, et donc l serait impair. Par suite :*

$c_{l+2}=2c_{l+1}+1=2(2k'+1)-1=4k'+1=2k+1=c$ *, ce qui est rejeté par hypothèse.*)

On en déduit que $\begin{cases} c_l\neq k'+1 \\ ou \\ c_{l+1}\neq 2k'+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(l,k'+1)<F_{l+2}\ (et\ u(l+1,2k'+1)\leqslant F_{l+3}) \\ ou \\ u(l+1,2k'+1)<F_{l+3}\ (et\ u(l,k'+1)\leqslant F_{l+2}) \end{cases}$.

L'affirmation entre parenthèses découlant du fait que F_{n+2} est le maximum de la ligne n (propriété (3)), et l'affirmation avec l'inégalité stricte venant de l'hypothèse de récurrence.

Et, dans les deux cas, on en déduit que $u(l+2,c)<F_{l+2}+F_{l+3}=F_{l+4}$.

Dans tous les cas explorés, l'hérédité a été validée. Ce qui clôt la preuve de la propriété (4).

Démonstration de la propriété (5) : $\forall l\in\mathbb{N}$, $c_l=\dfrac{2^l-(-1)^l}{3}$

Comme $c_0=0$ et $c_{l+1}=2c_l+(-1)^l$, une récurrence rapide permet de montrer que

$c_{l+1}=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\times 2^{l-k}$. Ce qui amène à :

$c_{l+1}=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\times 2^l\times 2^{-k}=2^l\times\sum_{k=0}^{l}(-1/2)^k=2^l\times\dfrac{1-(-1/2)^{l+1}}{1-(-1/2)}=\dfrac{2^l-2^l\times(-1/2)^l\times(-1/2)}{3/2}$;

Ainsi $c_{l+1}=\dfrac{2\times 2^l-(-1)^l\times(-1/2)\times 2}{3}=\dfrac{2^{l+1}-(-1)^l\times(-1)}{3}=\dfrac{2^{l+1}-(-1)^{l+1}}{3}$.

Et on remarque que $c_0=1=\dfrac{2^0-(-1)^0}{3}$.

Par suite, on en déduit que pour tout entier naturel l, $c_l=\dfrac{2^l-(-1)^l}{3}$.

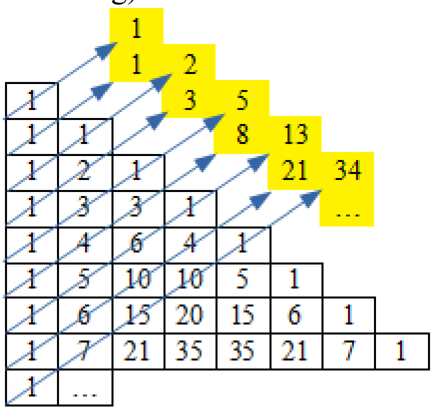
Remarque : Le numéro de colonne symétrique de la ligne l est $2^l-c_l=2^l-\dfrac{2^l-(-1)^l}{3}$, ou encore :

$2^l-c_l=\dfrac{3\times 2^l-2^l+(-1)^l}{3}=\dfrac{2\times 2^l-(-1)\times(-1)^l}{3}=\dfrac{2^{l+1}-(-1)^{l+1}}{3}=c_{l+1}$, soit le premier numéro de colonne du maximum de la ligne $l+1$, ce qui offre une coïncidence amusante.

4) Une formulation explicite de la suite de Stern :

Des recherches Internet dues aux résultats de la partie 7) nous ont conduit à l'article « *La suite de Stern-Brocot, sœur de Fibonacci* » de M. Jean-Paul Delahaye, publié dans la revue « Pour la Science » d'Octobre 2012, que l'auteur propose sur son site personnel.
Dans cet article, l'auteur signale un lien associant le triangle de Pascal à la suite de Fibonacci, mais aussi à la suite de Stern, que nous allons présenter puis démontrer ici.
Ce qui offre ainsi une nouvelle connexion entre la suite de Stern et la suite de Fibonacci.

Nous allons commencer par détailler le lien entre le triangle de Pascal et la suite de Fibonacci :
En partant du triangle de Pascal, où les lignes et les colonnes démarrent au rang 0, nous allons montrer que la suite des sommes des nombres lus en diagonale, comme sur le schéma ci-dessous, est la suite de Fibonacci (décalée d'un rang) :



On note (F_n) la suite de Fibonacci (définie par $F_0=0$, $F_1=1$ et $\forall n$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$).

On en déduit alors que $F_{n+1}=\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n-k}{k}$. (*Comme* $\binom{a}{b}=0$ *si a < b, alors la somme s'arrête lorsque* $n-k<k \Leftrightarrow n/2<k$ *, soit jusqu'à* $k\leqslant[n/2]$ *, où* $[x]$ *désigne la partie entière de x.)*

En posant $i=k$ et $i+j=n-k \Leftrightarrow j=n-2i$, cela revient à montrer que $F_{n+1}=\sum_{2i+j=n}\binom{i+j}{i}$.

Soit (a_n) la suite définie par $a_n=\sum_{2i+j=n}\binom{i+j}{i}$. Montrons que (a_n) vérifie les hypothèses de construction de la suite de Fibonacci (décalée d'un rang) : $a_0=1$, $a_1=1$, et $a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$.

On a bien $a_0=\sum_{2i+j=0}\binom{i+j}{i}=\binom{0}{0}=1=F_1$, et $a_1=\sum_{2i+j=1}\binom{i+j}{i}=\binom{1}{0}=1=F_2$.

De plus, $a_n+a_{n+1}=\sum_{2i+j=n}\binom{i+j}{i}+\sum_{2i+j=n+1}\binom{i+j}{i}=\sum_{2i+j+2=n+2}\binom{i+j}{i}+\sum_{2i+j+1=n+2}\binom{i+j}{i}$, ou

$$a_n+a_{n+1}=\sum_{2(i+1)+j=n+2}\binom{i+j}{i}+\sum_{2i+(j+1)=n+2}\binom{i+j}{i}=\sum_{2i+j=n+2,i\geqslant1}\binom{i-1+j}{i-1}+\sum_{2i+j=n+2,j\geqslant1}\binom{i+j-1}{i}$$. Ainsi

$$a_n+a_{n+1}=\left(\sum_{2i+j=n+2,j=0}\binom{i+j-1}{i-1}+\sum_{2i+j=n+2,\ i,\ j\geqslant1}\binom{i+j-1}{i-1}\right)+\left(\sum_{2i+j=n+2,i=0}\binom{i+j-1}{i}+\sum_{2i+j=n+2,\ i,\ j\geqslant1}\binom{i+j-1}{i}\right)$$

$$\Leftrightarrow a_n+a_{n+1}=\sum_{2i+j=n+2,\ j=0}\binom{i-1}{i-1}+\sum_{2i+j=n+2,\ i=0}\binom{j-1}{0}+\left[\sum_{2i+j=n+2,\ i,\ j\geqslant1}\binom{i+j-1}{i-1}+\binom{i+j-1}{i}\right]$$

$$\Leftrightarrow a_n+a_{n+1}=\sum_{2i+j=n+2,\ j=0}1+\sum_{2i+j=n+2,i=0}1+\left[\sum_{2i+j=n+2,\ i,\ j\geqslant1}\binom{i+j}{i}\right]$$. Nous en déduisons que :

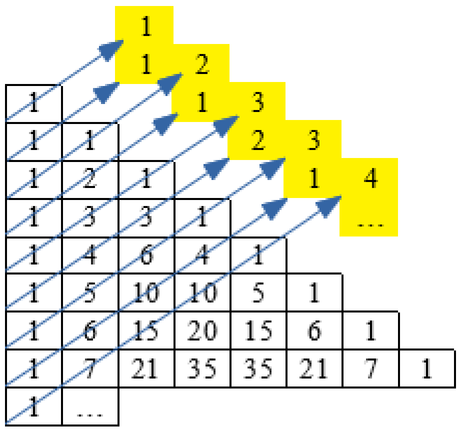
$$a_n+a_{n+1}=\sum_{2i+j=n+2,j=0}\binom{i+j}{i}+\sum_{2i+j=n+2,i=0}\binom{i+j}{i}+\sum_{2i+j=n+2,\ i,\ j\geqslant1}\binom{i+j}{i}$$, car $1=\binom{i+j}{j}$ si i ou j = 0.

Et on arrive à $a_n+a_{n+1}=\sum_{2i+j=n+2}\binom{i+j}{i}=a_{n+2}$.

Nous avons ainsi montré que, pour tout entier naturel n, $a_n = F_{n+1}$, car ces deux suites vérifient les mêmes propriétés de construction.

Par suite, on en déduit que : Pour tout entier naturel n, $F_{n+1} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k}$.

En nous intéressant aux même diagonales que précédemment, mais en y dénombrant les nombres impairs rencontrés, nous retrouvons la suite de Stern :



Dénombrer les nombres impairs d'une diagonale, où l'on rencontre les $\binom{n-k}{k}$, s'obtient en calculant $\sum_{k=0}^{[n/2]} \left[\binom{n-k}{k} mod\ 2 \right]$: Donc, nous allons montrer que $\sum_{k=0}^{[n/2]} \left[\binom{n-k}{k} mod\ 2 \right] = u_{n+1}$.

Ou encore $u_{n+1} = \sum_{2i+j=n} \left[\binom{i+j}{i} mod\ 2 \right]$, avec le même changement de variable que précédemment.

Dans les faits, nous démontrerons l'énoncé reformulé $u_n = \sum_{2i+j=n-1} \left[\binom{i+j}{i} mod\ 2 \right]$.

On note donc (b_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $b_n = \sum_{2i+j=n-1} \left[\binom{i+j}{i} mod\ 2 \right]$.

On remarque $b_1 = \sum_{2i+j=0} \left[\binom{i+j}{i} mod\ 2 \right] = \left[\binom{0}{0} mod\ 2 \right] = [1\ mod\ 2] = 1 = u_1$.

Ainsi, pour montrer que (b_n) vérifie les hypothèses de construction de la suite de Stern, il ne reste qu'à montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{2n} = b_n$, et $b_{2n+1} = b_n + b_{n+1}$.

Pour cela, nous aurons besoin d'étudier les liens de parité entre divers coefficients binomiaux et, plus généralement, la plus grande puissance de 2 dans leurs développements en facteurs premiers. Dans la suite, nous notons deg_n la puissance de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de l'entier naturel n. Il nous a été signalé après que cela s'appelle la ***valuation 2-adique*** de l'entier n. Par exemple, comme $40 = 2^3 \times 5$, alors $deg_{40} = 3$.

Propriétés immédiates.

- Pour tout entier naturel n, $deg_n = 0 \Leftrightarrow$ n est impair.
- Pour tous entiers naturels strictement positifs a et b, $deg_{ab} = deg_a + deg_b$.
- Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $deg_{2a} = deg_a + 1$, et $deg_{a!} = \sum_{m=1}^{a} deg_m$.
- Pour tous entiers naturels strictement positifs a et b, tels que b divise a, $deg_{\frac{a}{b}} = deg_a - deg_b$.

Algorithme (langage Python) utilisé pour visualiser les résultats présentés dans cette partie.

```
def aux(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*aux(n-1)

def fac(n):
    if type (n) ==int and n>=0:
        return aux(n)

def C(a,b):
    return int(fac(a)/(fac(b)*fac(a-b)))

def triangle(l):
    for i in range(l+1):
        L=[]
        for y in range(i+1):
            L.append(C(i,y))
        print(L)

def xau(n):
    if n/2==n//2:
        return xau(n/2)+1
    else:
        return 0

def deg(n):
    if type(n) == int and n>0:
        return xau(n)

def test(n,i):
    return [deg(C(n-1-i,i)),deg(C(2*n-1-2*i,2*i))]

def sub(n,i):
    return [C(n-1-i,i),C(2*n-1-2*i,2*i)]

def serie(k):
    for u in range(1,k+1):
        for w in range(u//2):
            print([u,w],test(u,w),"            ",test(u,w)[0]==test(u,w)[1])


def trid(l):
    for i in range(l+1):
        L=[]
        for y in range(i+1):
            L.append(deg(C(i,y)))
        print(i+1,L)



def Cub(a,b):
    return fac(a)/(fac(b)*fac(a-b))

def sub(n,i):
    return [Cub(n-1-i,i),Cub(2*n-1-2*i,2*i)]

def oblique(o):
    for i in range(1,o+1):
        L=[]
        for y in range(((i-1)//2)+1):
            L.append(C(i-1-y,y))
        print(i,L)

def obl(o):
    for i in range(1,o+1):
        L=[]
        for y in range(((i-1)//2)+1):
            L.append(deg(C(i-1-y,y)))
        print(i,L)
```

Propriétés.

(*) $deg_{\binom{n}{k}} = \sum_{p=1}^{n} deg_p - \sum_{p=1}^{k} deg_p - \sum_{p=1}^{n-k} deg_p$, ce qui amène à la formule :

(**) $deg_{\binom{n}{k}} = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} deg_m - \sum_{m=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} deg_m - \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} deg_m + \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{k}{2}\right] - \left[\frac{n-k}{2}\right]$, où $[x]$ est la partie entière de x.

(et où l'on a décidé que si $a > b$, alors $\sum_{a}^{b} \ldots = 0$ (considérée comme une somme vide))

<u>Preuve :</u>

On a $deg_{\binom{n}{k}} = deg_{n!} - deg_{k!} - deg_{(n-k)!} = \sum_{p=1}^{n} deg_p - \sum_{p=1}^{k} deg_p - \sum_{p=1}^{n-k} deg_p$, qui est la propriété (*).

Ainsi $deg_{\binom{n}{k}} = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} deg_{2m} - \sum_{m=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} deg_{2m} - \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} deg_{2m}$, car si a est impair alors $deg_a = 0$.

Par suite, $deg_{\binom{n}{k}} = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (deg_m + 1) - \sum_{m=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (deg_m + 1) - \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} (deg_m + 1)$, d'où la propriété (**).

Conséquences utilisées pour la démonstration du résultat principal.

Pour ces résultats, nous supposerons l'entier i suffisamment petit pour que l'argument supérieur de tous les coefficients binomiaux présentés soit supérieur ou égal à son argument inférieur.
(*Sinon le résultat deviendrait immédiat, car le coefficient binomial serait nul.*)

(1) $deg_{\binom{2n-2i-1}{2i}} = deg_{\binom{n-i-1}{i}}$ (en particulier, $\binom{2n-2i-1}{2i}$ et $\binom{n-i-1}{i}$ ont la même parité.)

(2) $deg_{\binom{2n-(2i+1)-1}{2i+1}} \geqslant 1$ (en particulier, $\binom{2n-(2i+1)-1}{2i+1}$ est toujours pair.)

(3) $deg_{\binom{2n-(2i+1)}{2i+1}} = deg_{\binom{n-i-1}{i}}$ (en particulier, $\binom{2n-(2i+1)}{2i+1}$ et $\binom{n-i-1}{i}$ ont la même parité.)

(4) $deg_{\binom{2n-2i}{2i}} = deg_{\binom{n-i}{i}}$ (en particulier, $\binom{2n-2i}{2i}$ et $\binom{n-i}{i}$ ont la même parité.)

<u>Preuve :</u>

(1) $deg_{\binom{2n-2i-1}{2i}} = \sum_{m=1}^{\left[\frac{2n-2i-1}{2}\right]} deg_m - \sum_{m=1}^{\left[\frac{2i}{2}\right]} deg_m - \sum_{m=1}^{\left[\frac{2n-4i-1}{2}\right]} deg_m + \left[\frac{2n-2i-1}{2}\right] - \left[\frac{2i}{2}\right] - \left[\frac{2n-4i-1}{2}\right]$.

D'où $deg_{\binom{2n-2i-1}{2i}} = \sum_{m=1}^{n-i-1} deg_m - \sum_{m=1}^{i} deg_m - \sum_{m=1}^{n-2i-1} deg_m + (n-i-1) - (i) - (n-2i-1)$.

Et ainsi $deg_{\binom{2n-2i-1}{2i}} = \sum_{m=1}^{n-i-1} deg_m - \sum_{m=1}^{i} deg_m - \sum_{m=1}^{(n-i-1)-i} deg_m + 0 = deg_{\binom{n-i-1}{i}}$.

(2) Comme $deg_{\binom{2n-(2i+1)-1}{2i+1}} = deg_{\binom{2n-2i-2}{2i+1}}$, alors :

$$deg_{\binom{2n-(2i+1)-1}{2i+1}} = \sum_{m=1}^{\left[\frac{2n-2i-2}{2}\right]} deg_m - \sum_{m=1}^{\left[\frac{2i+1}{2}\right]} deg_m - \sum_{m=1}^{\left[\frac{2n-4i-3}{2}\right]} deg_m + \left[\frac{2n-2i-2}{2}\right] - \left[\frac{2i+1}{2}\right] - \left[\frac{2n-4i-3}{2}\right]$$

D'où $deg_{\binom{2n-(2i+1)-1}{2i+1}} = \sum_{m=1}^{n-i-1} deg_m - \sum_{m=1}^{i} deg_m - \sum_{m=1}^{n-2i-2} deg_m + (n-i-1) - (i) - (n-2i-2)$. Et donc :

$$deg_{\binom{2n-(2i+1)-1}{2i+1}}=\left(deg_{n-i-1}+\sum_{m=1}^{n-i-2} deg_m\right)-\sum_{m=1}^{i} deg_m-\sum_{m=1}^{n-i-2-i} deg_m+1=deg_{n-i-1}+deg_{\binom{n-i-2}{i}}+1\geqslant 1 \quad .$$

(3)

$$deg_{\binom{2n-(2i+1)}{2i+1}}=\sum_{m=1}^{\left[\frac{2n-2i-1}{2}\right]} deg_m-\sum_{m=1}^{\left[\frac{2i+1}{2}\right]} deg_m-\sum_{m=1}^{\left[\frac{2n-4i-2}{2}\right]} deg_m+\left[\frac{2n-2i-1}{2}\right]-\left[\frac{2i+1}{2}\right]-\left[\frac{2n-4i-2}{2}\right]$$

D'où $deg_{\binom{2n-(2i+1)}{2i+1}}=\sum_{m=1}^{n-i-1} deg_m-\sum_{m=1}^{i} deg_m-\sum_{m=1}^{n-2i-1} deg_m+(n-i-1)-(i)-(n-2i-1)$.

Et ainsi $deg_{\binom{2n-(2i+1)}{2i+1}}=\sum_{m=1}^{n-i-1} deg_m-\sum_{m=1}^{i} deg_m-\sum_{m=1}^{n-i-1-i} deg_m+0=deg_{\binom{n-i-1}{i}}$.

(4) $deg_{\binom{2n-2i}{2i}}=\sum_{m=1}^{\left[\frac{2n-2i}{2}\right]} deg_m-\sum_{m=1}^{\left[\frac{2i}{2}\right]} deg_m-\sum_{m=1}^{\left[\frac{2n-4i}{2}\right]} deg_m+\left[\frac{2n-2i}{2}\right]-\left[\frac{2i}{2}\right]-\left[\frac{2n-4i}{2}\right]$.

D'où $deg_{\binom{2n-2i}{2i}}=\sum_{m=1}^{n-i} deg_m-\sum_{m=1}^{i} deg_m-\sum_{m=1}^{n-2i} deg_m+(n-i)-(i)-(n-2i)$.

Et ainsi $deg_{\binom{2n-2i}{2i}}=\sum_{m=1}^{n-i} deg_m-\sum_{m=1}^{i} deg_m-\sum_{m=1}^{n-i-i} deg_m+0=deg_{\binom{n-i}{i}}$.

Avec ces résultats intermédiaires, nous pouvons démontrer les résultats attendus :

Théorème.
Pour tout entier naturel *n*, $b_{2n}=b_n$, et $b_{2n+1}=b_n+b_{n+1}$.

Démonstration :

Préliminaire : $b_n=\sum_{2i+j=n-1}\left[\binom{i+j}{i} mod\ 2\right]=\sum_{i;2i\leqslant n-1}\left[\binom{i+(n-2i-1)}{i} mod\ 2\right]$, car $j=n-2i-1$.

Ainsi $b_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left[\binom{n-i-1}{i} mod\ 2\right]$, car *i* ne peut pas dépasser $\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

(i) D'après le résultat préliminaire, $b_{2n}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{2n-1}{2}\right]}\left[\binom{2n-i-1}{i} mod\ 2\right]=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\binom{2n-i-1}{i} mod\ 2\right]$.

D'après (2), tous les $\binom{2n-(2k+1)-1}{2k+1}$ sont pairs, donc $b_{2n}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left[\binom{2n-2k-1}{2k} mod\ 2\right]$.

D'après (1), on en déduit que $b_{2n}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left[\binom{n-k-1}{k} mod\ 2\right]=b_n$.

(ii) D'après le résultat préliminaire, $b_{2n+1}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{2n+1-1}{2}\right]}\left[\binom{2n+1-i-1}{i} mod\ 2\right]=\sum_{i=0}^{n}\left[\binom{2n-i}{i} mod\ 2\right]$.

Ainsi $b_{2n+1}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\binom{2n-2k}{2k} mod\ 2\right]+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left[\binom{2n-(2k+1)}{2k+1} mod\ 2\right]$, en répartissant les *k* pairs dans une somme, et les *k* impairs dans l'autre.

D'où, en appliquant (4) sur la première somme et (3) sur la seconde :

$$b_{2n+1}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\binom{n-k}{k} mod\ 2\right]+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left[\binom{n-k-1}{k} mod\ 2\right] .$$

Nous en déduisons que $b_{2n+1}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{(n+1)-1}{2}\right]}\left[\binom{n-k}{k} mod\ 2\right]+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left[\binom{n-k-1}{k} mod\ 2\right]=b_{n+1}+b_n$.

Finalement, et comme $b_1=1=u_1$:
Nous avons démontré que les suites (b_n) et (u_n) coïncident, car elles vérifient les mêmes propriétés de construction.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sum_{k=0}^{[n/2]}\left[\binom{n-k}{k} mod\ 2\right]$.
Ce qui démontre le lien constaté entre le triangle de Pascal et la suite de Stern, en plus d'offrir une formulation explicite de la suite de Stern (u_n) .

5) La suite de Stern et les représentations hyperbinaires d'un entier :

Il est possible de démontrer que $u_n=1 \Leftrightarrow \exists p\in\mathbb{N} ; n=2^p$, $u_n=2 \Leftrightarrow \exists p\in\mathbb{N}^* ; n=2^p+2^{p-1}$, et $u_n=3 \Leftrightarrow \exists p\in\mathbb{N}, (p\geqslant 2) ;\ soit\ n=2^p+2^{p-2}\ ,\ soit\ n=2^p+2^{p-1}+2^{p-2}$.
Ce qui nous avait amené à conjecturer un lien entre la suite de Stern (u_n) et la représentation binaire de son rang *n*.

Pour tenter de formuler des conjectures, nous avons programmé un algorithme qui affiche la représentation binaire des rangs de la suite (u_n) et de ses valeurs.
Les fonctions suivantes permettent d'afficher tous les rangs et leurs termes associés, en les écrivant sous forme numérique et sous forme binaire :

```
def b_(nombre):
    b=bin(nombre)
    ret=""
    for i in range(2,len(b)): ret=ret+b[i]
    return int(ret)

def rech(truc):
    search=int(truc)
    for y in range(len(str(bin(len(u))))-2):
        for i in range(2**y,int(2**y+2**(y-1))):
            if u[i]==int(search):
                print("U",b_(i),"(",i,")",":",b_(u[i]),"(",u[i],")")


for i in range(max+1):
    print("U",b_(i),"(",i,")",":",b_(u[i]),"(",u[i],")")
```

Puis nous avons programmé l'affichage de tous les termes ayant une certaine valeur, afin de pouvoir voir les rangs, et identifier un lien éventuel avec les écritures binaires des rangs et des termes :

```
search=""
while search!="TG":
    search=input("recherche")
    for y in range(len(str(bin(len(u))))-2):
        for i in range(2**y,int(2**y+2**(y-1))):
            if u[i]==int(search):
                print("U",b_(i),"(",i,")",":",b_(u[i]),"(",u[i],")")
```

Mais cela s'est avéré très compliqué, dés que l'on s'intéresse à la plupart des valeurs supérieures ou égales à 4. D'autant plus qu'une valeur peut apparaître à plusieurs lignes différentes, comme le « 5 », qui peut être obtenu comme une somme de deux entiers distincts de deux façons différentes.

Néanmoins, dans un registre assez proche, l'article de M. Delahaye signale que l'on peut démontrer que la valeur de u_n est exactement le nombre de représentations ***binaires généralisées*** (ou ***hyperbinaires***) de *n* - 1, ce que nous allons développer ici.

En représentation hyperbinaire, on autorise un facteur 0, 1, ou 2 devant chaque puissance de 2, contrairement à la notation binaire classique, où les seuls facteurs peuvent être 0 ou 1.

On note alors h_n le nombre de représentations hyperbinaires distinctes de $n \in \mathbb{N}$.
Le résultat annoncé se reformule alors en : Pour tout entier naturel *n*, $h_n = u_{n+1}$.

<u>Exemple :</u> Calcul de h_8
Le nombre *n* = 8 a pour unique écriture binaire 1×2^3 .
Par contre, le nombre *n* = 8 a quatre représentations hyperbinaires distinctes, qui sont 1×2^3 , 2×2^2 , $1 \times 2^2 + 2 \times 2^1$, ou $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 2 \times 2^0$. Et ainsi $h_8 = 4$, qui est égal à $u_{9.}$.

Afin de montrer que la suite (h_n) est égale à la suite (u_{n+1}) , nous notons $h_n^{(0)}$, $h_n^{(1)}$, et $h_n^{(2)}$ le nombre de représentations hyperbinaires distinctes de *n*, qui ont respectivement le coefficient 0, 1, et 2 devant $2^0 = 1$.

<u>Quelques résultats préparatoires (immédiats) :</u>
$\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n = h_n^{(0)} + h_n^{(1)} + h_n^{(2)}$ (séparation des coefficients possibles devant $2^0 = 1$.)
$\forall k \in \mathbb{N}$, $h_{2k}^{(1)} = 0$ (comme 2 *k* est pair, alors le coefficient devant $2^0 = 1$ ne peut pas être 1.)
$\forall k \in \mathbb{N}$, $h_{2k+1}^{(0)} = 0 = h_{2k+1}^{(2)}$ (2 *k* +1 est impair, donc le coefficient devant $2^0 = 1$ n'est ni 0 ni 2.)
Nous en déduisons que, pour tout entier naturel *k*, $h_{2k} = h_{2k}^{(0)} + h_{2k}^{(2)}$, et $h_{2k+1} = h_{2k+1}^{(1)} = h_{2k}^{(0)}$.

Pour démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n = u_{n+1}$, nous utiliserons les résultats suivants :
- $h_0 = 1 = u_1$. (qui découle du fait que *n* = 0 n'a qu'une représentation hyperbinaire)
- Si *n* est pair (*n* = 2 *k*), alors $h_{2k} = u_{2k+1} = u_{k+1} + u_k$.
- Si *n* est impair (*n* = 2 *k* + 1), alors $h_{2k+1} = u_{2k+2} = u_{k+1}$.

Étant donnés les résultats préparatoires, les deux derniers résultats sont une conséquence de :

Théorème.
Pour tout entier naturel *k*, $h_{2k}^{(0)} = u_{k+1}$, et $h_{2k}^{(2)} = u_k$.

<u>Remarque</u> : Montrons que les résultats attendus sont bien une conséquence de ce théorème
$h_{2k} = h_{2k}^{(0)} + h_{2k}^{(2)} = u_{k+1} + u_k$, et $h_{2k+1} = h_{2k}^{(0)} = u_{k+1}$.

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons les résultats suivants :

(1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h_{2k}^{(0)} = h_k$

(2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h_{4k}^{(2)} = h_{2k}^{(2)}$

(3) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h_{k+2}^{(2)} = h_k^{(0)}$

Preuve de ces formules :

(1) : Si une représentation hyperbinaire de 2 *k* se termine par 0×2^0 , alors on peut factoriser par 2 chacune des puissances de 2, ce qui donne une représentation hyperbinaire de *k* « sans contrainte ».

(2) : Si une représentation hyperbinaire de 4 *k* se termine par 2×2^0 , alors elle se termine nécessairement par $1 \times 2^1 + 2 \times 2^0$ à cause du facteur 4. Il y en a donc autant que de représentations hyperbinaires de 4 *k* qui se terminent par $2 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ (qui n'est pas tout à fait $h_{4k}^{(0)}$).

En décalant ces coefficients d'un terme vers la droite, on en déduit qu'il y en autant que de nombres ayant une représentation hyperbinaire se finissant par 2×2^0 , donc de la forme 2 *k*.

(3) : Il y autant de représentations hyperbinaires de *k* +2 se finissant par 2×2^0 , que de représentations hyperbinaires de *k* se finissant par 0×2^0 .

Démonstration du théorème :

Il s'agit d'une démonstration par récurrence forte.

Initialisation : Pour *k* = 0, on a bien $h_{2\times 0}^{(0)} = h_0^{(0)} = 1 = u_1$, et $h_{2\times 0}^{(2)} = h_0^{(2)} = 0 = u_0$.

(Le nombre 0 a une seule représentation hyperbinaire (celle avec tous les coefficients nuls), qui se termine donc par un 0 devant le $2^0 = 1$.)

Hérédité : On suppose (*par hypothèse de récurrence forte*) que, pour tout entier naturel $p \leqslant k-1$: $h_{2p}^{(0)} = u_{p+1}$, et $h_{2p}^{(2)} = u_p$. Et on cherche à établir que $h_{2k}^{(0)} = u_{k+1}$, et $h_{2k}^{(2)} = u_k$.

Nous distinguerons deux cas :

(i) Si *k* est pair : Alors *k* = 2 *p*, avec $p \leqslant k-1$.

- On a $h_{2k}^{(0)} = h_k = h_{2p} = h_{2p}^{(0)} + h_{2p}^{(2)} = u_{p+1} + u_p$, par hypothèse de récurrence et (1).

Et ainsi $h_{2k}^{(0)} = u_{2p+1} = u_{k+1}$, par définition de la suite (u_n) .

- On a $h_{2k}^{(2)} = h_{4p}^{(2)} = h_{2p}^{(2)} = u_p$, par hypothèse de récurrence et (2).

Et ainsi $h_{2k}^{(2)} = u_p = u_{2p} = u_k$, par définition de la suite (u_n) .

(ii) Si *k* est impair : Alors *k* = 2 *p* + 1, avec $p \leqslant k-1$.

- On a $h_{2k}^{(0)} = h_k = h_{2p+1} = h_{2p+1}^{(1)} = h_{2p}^{(0)} = u_{p+1}$, par hypothèse de récurrence et (1).

Et ainsi $h_{2k}^{(0)} = u_{2(p+1)} = u_{2p+2} = u_{k+1}$, par définition de la suite (u_n) .

- On a $h_{2k}^{(2)} = h_{4p+2}^{(2)} = h_{4p}^{(0)} = h_{2p} = h_{2p}^{(0)} + h_{2p}^{(2)} = u_{p+1} + u_p$, par hypothèse de récurrence, (1) et (3).

Et ainsi $h_{2k}^{(2)} = u_{2p+1} = u_k$, par définition de la suite (u_n) .

Ce qui valide l'étape d'hérédité, et conclut donc la démonstration.

En conséquence, la suite de Stern (u_n) coïncide avec la suite (h_{n-1}) .

Nous concluons là cette première partie consacrée aux propriétés de la suite de Stern (u_n) .

Dans les parties qui suivent, nous allons nous intéresser à des suites définies à partir de la suite de Stern. Et de nouvelles propriétés remarquables émergeront.

6) Une régularité entre termes consécutifs de la suite de Stern :

En observant les termes consécutifs de la suite de Stern (u_n) , on remarque que chaque terme semble diviser la somme des deux termes qui l'entoure. Dans cette partie, nous allons démontrer cette propriété, puis nous étudierons la suite de ces quotients, qui vérifie une propriété remarquable.

Rappel (résultat fondamental de la page 1) : Pour tout entier naturel k ***impair***, $u_k = u_{k-1} + u_{k+1}$:
(rappel de la preuve : $u_k = u_{2l+1} = u_l + u_{l+1} = u_{2l} + u_{2l+2} = u_{(2l+1)-1} + u_{(2l+1)+1} = u_{k-1} + u_{k+1}$)

Théorème.
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1 ; 2^n]\!] = [1 ; 2^n] \cap \mathbb{N}\ :\ u_k | (u_{k-1} + u_{k+1})$.

Démonstration :
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall k \in [\![1 ; 2^n]\!],\ u_k | (u_{k-1} + u_{k+1})$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on doit tester tous les entiers $k \in [\![1 ; 2^0]\!] = \{1\}$, donc $k = 1$.
On remarque alors que $u_1 = 1$ divise $u_2 + u_0 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$, ce qui valide l'initialisation.
Hérédité : On suppose que pour un certain entier n : $\forall k \in [\![1 ; 2^n]\!],\ u_k | (u_{k-1} + u_{k+1})$.
Et on cherche à établir que $\forall k \in [\![1 ; 2^{n+1}]\!],\ u_k | (u_{k-1} + u_{k+1})$.

- Par hypothèse de récurrence, nous restreignons notre raisonnement aux entiers $k \in [\![2^n + 1 ; 2^{n+1}]\!]$.
- D'après le résultat fondamental, nous pouvons restreindre le raisonnement aux entiers k pairs.
(car si k est impair alors u_k est égal à $u_{k-1} + u_{k+1}$, donc le divise en particulier...)

Nous supposerons donc que $k = 2p$, avec $p \in [\![2^{n-1} ; 2^n]\!]$.
Par hypothèse de récurrence, $u_k = u_{2p} = u_p$ divise $u_{p-1} + u_{p+1}$, donc aussi $u_{p-1} + u_{p+1} + 2u_p$.
D'où $u_k = u_p$ divise $(u_{p-1} + u_p) + (u_p + u_{p+1}) = u_{2(p-1)+1} + u_{2p+1}$, par définition de (u_n) .
Par suite, $u_k = u_p$ divise $u_{2p-1} + u_{2p+1} = u_{k-1} + u_{k+1}$ (car $k = 2p$). Ce qui valide l'étape d'hérédité.

Ainsi, et par récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1 ; 2^n]\!],\ u_k | (u_{k-1} + u_{k+1})$.

Remarque : En reprenant le même raisonnement d'hérédité nous aurions aussi pu établir, par récurrence forte, la formulation équivalente plus simple : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n | (u_{n-1} + u_{n+1})$.

Ce résultat nous a conduit à étudier la suite (v_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $v_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{u_n}$.

Le théorème précédent affirme que pour tout entier naturel n, v_n est un entier strictement positif.
Et le résultat fondamental implique aussi que si n est impair, alors $v_n = 1$.

Les premiers termes de cette suite sont : 1 3 1 5 1 3 1 7 1 3 1 5 1 3 1 9 1…
En supprimant les « 1 » répétés toutes les deux fois, on arrive à 3 5 3 7 3 5 3 9 3 5 3 7 3 5 3…
Puis, en supprimant les « 3 » répétés toutes les deux fois, à : 5 7 5 9 5 7 5 11 5 7 5 9 5 7 5 13 5…
Nous constatons ainsi qu'une nouvelle valeur apparaît toujours à un rang correspondant à une puissance de 2, et qu'elle se retrouve répétée avec une même régularité, tant que l'on n'arrive pas sur un rang qui est une nouvelle puissance de 2.

Plus précisément, nous conjecturons que $v_{2^p} = 2p + 1$, et que cette valeur est répétée tous les rang 2^p supplémentaires tant qu'il ne devient pas une nouvelle puissance de 2.
Donc $2p + 1$ semble être la valeur des termes de rang $2^p + l \times 2^p$ (avec l pair), qui se récrit aussi $2^p + n \times 2^{p+1}$, avec n entier naturel quelconque.

Propriétés.

1) Pour tout entier naturel *n*, $v_{2n}=v_n+2$, et $v_{2n+1}=1$.

2) Pour tous entiers naturels *p* et *n*, $v_{2^p\times n}=v_n+2p$.

Preuve :

1) - On a $v_{2n}=\frac{u_{2n-1}+u_{2n+1}}{u_{2n}}=\frac{(u_{2n-2}+u_{2n})+(u_{2n}+u_{2n+2})}{u_{2n}}=\frac{u_{2n-2}+u_{2n+2}}{u_{2n}}+\frac{2u_{2n}}{u_{2n}}=\frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{u_n}+2$, par définition de la suite (u_n) (et car les rangs 2 *n* – 2, 2 *n* + 2 , et 2 *n* sont pairs). D'où $v_{2n}=v_n+2$.

- On a $v_{2n+1}=\frac{u_{2n+1-1}+u_{2n+1+1}}{u_{2n+1}}=\frac{u_{2n}+u_{2n+2}}{u_{2n}+u_{2n+2}}=1$, par définition de la suite (u_n) .

2) Le second point découle (par récurrence sur l'entier *p*) de la première propriété.

Conséquence.

Pour tous entiers naturel *p* et *n*, $v_{2^p+n\times 2^{p+1}}=v_{2^p(1+2n)}=v_{1+2n}+2p=1+2p$.

Remarque :

Une autre approche consiste à remarquer que tout entier positif s'écrit de manière unique $k\times 2^p$ (avec *k* impair), ce qui permet d'atteindre tous les rangs possibles de la suite (v_n) , avec $n\geqslant 1$.

Théorème. (*Reformulation de la propriété précédente, démontrée d'une autre manière*)

Pour tout entier naturel *p*, et tout entier naturel ***impair*** *k*, $v_{k\times 2^p}=2p+1$.

Démonstration :

Il s'agit d'une démonstration par récurrence sur l'entier *p*.

Initialisation : On veut montrer que pour tout entier naturel *k* impair, on a $v_{k\times 2^0}=2^0+1 \Leftrightarrow v_k=1$.

On a $v_k=\frac{u_{k-1}+u_{k+1}}{u_k}=\frac{u_{k-1}+u_{k+1}}{u_{k-1}+u_{k+1}}=1$ car, comme *k* est impair, alors $u_k=u_{k-1}+u_{k+1}$.

Ce qui valide l'étape d'initialisation.

Hérédité : On suppose que pour un certain entier *p* : Pour tout entier *k* impair, $v_{k\times 2^p}=2p+1$.

Et on cherche à établir que : Pour tout entier naturel *k* impair : $v_{k\times 2^{p+1}}=2(p+1)+1=2p+3$.

En appliquant le fait que si *m* est impair, alors $u_m=u_{m-1}+u_{m+1}$. On montre que

$$v_{k\times 2^{p+1}}=\frac{u_{k\times 2^{p+1}-1}+u_{k\times 2^{p+1}+1}}{u_{k\times 2^{p+1}}}=\frac{u_{k\times 2^{p+1}-2}+u_{k\times 2^{p+1}}+u_{k\times 2^{p+1}}+u_{k\times 2^{p+1}+2}}{u_{k\times 2^{p+1}}}=\frac{u_{k\times 2^{p+1}-2}+u_{k\times 2^{p+1}+2}}{u_{k\times 2^{p+1}}}+\frac{2u_{k\times 2^{p+1}}}{u_{k\times 2^{p+1}}} .$$

Ainsi $v_{k\times 2^{p+1}}=\frac{u_{2\times(k\times 2^p-1)}+u_{2\times(k\times 2^p+1)}}{u_{2\times(k\times 2^p)}}+2\times 1=\frac{u_{k\times 2^p-1}+u_{k\times 2^p+1}}{u_{k\times 2^p}}+2$.

D'où, par hypothèse de récurrence, $v_{k\times 2^{p+1}}=v_{k\times 2^p}+2=2p+1+2=2p+3$. Ce qui valide l'hérédité.

Ainsi, on a montré que, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $v_{k\times 2^p}=2p+1$.

7) La suite des quotients de deux termes consécutifs :

Pour finir, nous avons étudié la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par $w_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.

Afin de conjecturer des propriétés de cette suite, nous avons utilisé l'algorithme suivant, qui affiche chacun des termes de la suite (w_n) sous la forme d'une fraction irréductible. *À partir de certaines valeurs, la précision des calculs sous Python ne permet pas le bon calcul de la forme irréductible.*

```
def frac(valeur):
    dénominateur=1
    while valeur*dénominateur!=int(valeur*dénominateur):
        dénominateur=dénominateur+1
    return [int(valeur*dénominateur),int(dénominateur)]

W=[]

for i in range(max+1):
    W.append(u[i]/u[i+1])
    print("W",i,":",frac(W[i])[0],"/",frac(W[i])[1])
```

Puis nous avons utilisé cet algorithme, qui affiche tous les termes de la suite (w_n) ayant un numérateur fixé (choix a), un dénominateur fixé (choix b) ou un quotient fixé (choix a/b) :

```
type=input("type ")
while type=="a" or type=="b" or type=="a/b":
    if type=="a" or type=="b":
        search=int(input("valeur "))
        if type=="a":
            for i in range(len(W)):
                if frac(W[i])[0]==search:
                    print("W",i,":",search,"/",frac(W[i])[1])
        if type=="b":
            for i in range(len(W)):
                if frac(W[i])[1]==search:
                    print("W",i,":",frac(W[i])[0],"/",search)
    else:
        searchA=int(input("a "))
        searchB=int(input("b "))
        for i in range(len(W)):
            if frac(W[i])[0]==searchA:
                if frac(W[i])[1]==searchB:
                    print("W",i,":",searchA,"/",searchB)
    type=input("type ")
```

Après diverses simulations nous avons conjecturé les propriétés suivantes :

- Toutes les fractions irréductibles positives semblent apparaître une et une seule fois :
  La suite (w_n) semble donc engendrer <u>toutes</u> ces fractions, <u>sans les répéter</u>.
- Le dénominateur d'une fraction est le même que le numérateur de la fraction qui le suit dans (w_n) . Ce qui est surprenant, car ces fractions ont été mises sous forme irréductible.

(Ce n'est donc pas seulement dû au fait de retrouver u_n au dénominateur de w_{n-1} puis au numérateur de w_n , puisqu'il pourrait être modifié lors de la mise sous forme irréductible.)

En ce qui concerne la deuxième remarque, c'est une reformulation du résultat suivant :

Théorème.

Pour tout entier naturel *n*, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

Démonstration :

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall k \in [\![1 ; 2^n]\!]$, u_k et u_{k+1} sont premiers entre eux.

Initialisation : Pour $n = 0$, on doit tester tous les entiers $k \in [\![1 ; 2^0]\!] = \{1\}$, donc $k = 1$.

Comme $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$ sont bien premiers entre eux, l'initialisation est validée.

Hérédité : On suppose que pour un certain entier n : $\forall k \in [\![1 ; 2^n]\!]$, u_k et u_{k+1} sont premiers entre eux. Et on cherche à établir que $\forall k \in [\![1 ; 2^{n+1}]\!]$, u_k et u_{k+1} sont premiers entre eux.

Par hypothèse de récurrence nous restreignons notre raisonnement aux entiers $k \in [\![2^n + 1 ; 2^{n+1}]\!]$.

Il y a alors deux cas :

- Si k est pair ($k = 2p$) : Alors $u_k = u_{2p} = u_p$, et $u_{k+1} = u_{2p+1} = u_p + u_{p+1}$.

Par hypothèse de récurrence forte u_p et u_{p+1} sont premiers entre eux, donc u_p et $u_p + u_{p+1}$ le sont aussi. Et on en déduit que u_k et u_{k+1} sont premiers entre eux.

- Si k est impair ($k = 2p + 1$) : Alors $u_k = u_{2p+1} = u_p + u_{p+1}$, et $u_{k+1} = u_{2p+1+1} = u_{2(p+1)} = u_{p+1}$.

Par hypothèse de récurrence forte u_p et u_{p+1} sont premiers entre eux, donc $u_p + u_{p+1}$ et u_{p+1} le sont aussi. Et on en déduit que u_k et u_{k+1} sont premiers entre eux.

Ce qui valide l'hérédité, et conclut donc la démonstration.

Comme deux termes consécutifs de la suite (u_n) sont premiers entre eux, nous en déduisons que leur quotient est toujours une fraction irréductible.

En particulier, le dénominateur d'un terme de (w_n) est donc égal au numérateur du terme suivant.

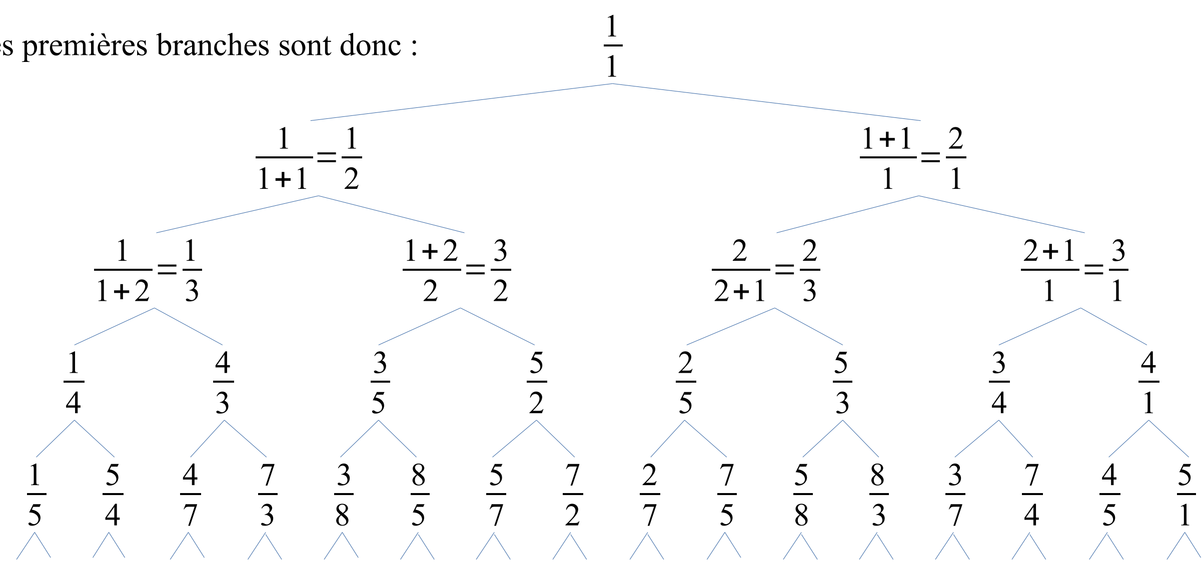
Il reste à montrer que la suite (w_n) contient chaque fraction irréductible positive une seule fois.

Cette partie s'est révélée bien plus difficile. C'est la recherche d'idées sur Internet pour étudier cette suite qui nous a conduit à l'article « *La suite de Stern-Brocot, sœur de Fibonacci* » de M. Delahaye mentionné dans la partie 4).

Dans cet article, M. Delahaye signale sans démonstration que les fractions irréductibles positives sont liées à la suite (w_n) grâce à l'***arbre de Calkin-Wilf***, construit du haut vers le bas ainsi :

Le quotient $\frac{1}{1}$ est le sommet initial. Et chacun des sommets $\frac{i}{j}$ a deux branches qui en descendent : La branche gauche descend à $\frac{i}{i+j}$, tandis que la branche droite descend à $\frac{i+j}{j}$.

Les premières branches sont donc :



On note alors (r_n) la suite des rationnels que l'on obtient en lisant l'arbre de gauche à droite, puis ligne après ligne. Ainsi $r_1=\frac{1}{1}$, $r_2=\frac{1}{2}$, $r_3=\frac{2}{1}$, $r_4=\frac{1}{3}$, etc.

Par construction de l'arbre de Calkin-Wilf, la suite (r_n) est donc définie par $r_1=\frac{1}{1}$ et :

Si $r_n=\frac{i}{j}$, pour $n\in\mathbb{N}^*$, alors $r_{2n}=\frac{i}{i+j}$ et $r_{2n+1}=\frac{i+j}{j}$.

Il se trouve que cette définition est en fait une équivalence, qui sera utilisée dans la preuve d'unicité en fin de ce paragraphe :

Propriétés.

Pour tous entiers naturels n, i, j : $r_{2n}=\frac{i}{i+j} \Leftrightarrow r_n=\frac{i}{j}$, et $r_{2n+1}=\frac{i+j}{j} \Leftrightarrow r_n=\frac{i}{j}$.

Preuve :

1) Pour la première propriété, l'implication $\Leftarrow$ découle de la définition de (r_n) .

Pour l'implication $\Rightarrow$, on suppose que $r_{2n}=\frac{i}{i+j}$, et $r_n=\frac{a}{b}$. Ainsi :

$$r_n=\frac{a}{b} \Leftrightarrow r_{2n}=\frac{a}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{i}{i+j} \Leftrightarrow a(i+j)=(a+b)i \Leftrightarrow ai+aj=ai+bi \Leftrightarrow aj=bi \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{i}{j}$$

Par suite, $r_n=\frac{i}{j}$.

2) Le raisonnement est similaire pour la seconde propriété.

On commence donc par montrer que la suite (r_n) coïncide avec la suite (w_n) :

Théorème.

Pour tout entier naturel non nul n, $w_n=r_n$.

Plus précisément, nous allons montrer que la suite (w_n) vérifie les hypothèses de construction de la suite (r_n) : $w_1=1$, et si w_n s'écrit $\frac{i}{j}$ alors $w_{2n}=\frac{i}{i+j}$ et $w_{2n+1}=\frac{i+j}{j}$.

Démonstration :

On a bien $w_1=1$, et si w_n s'écrit $\frac{i}{j}$ alors :

$$w_{2n}=\frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}=\frac{u_n}{u_n+u_{n+1}}=\frac{\frac{u_n}{u_{n+1}}}{\frac{u_n+u_{n+1}}{u_{n+1}}}=\frac{\frac{u_n}{u_{n+1}}}{\frac{u_n}{u_{n+1}}+1}=\frac{w_n}{w_n+1}=\frac{\frac{i}{j}}{\frac{i}{j}+1}=\frac{\frac{i}{j}}{\frac{i+j}{j}}=\frac{i}{i+j} ,$$

et $w_{2n+1}=\frac{u_{2n+1}}{u_{2n+1+1}}=\frac{u_n+u_{n+1}}{u_{n+1}}=\frac{u_n}{u_{n+1}}+1=w_n+1=\frac{i}{j}+1=\frac{i+j}{j}$.

Comme il a été établi précédemment que u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux, il ne reste plus qu'à montrer que la suite (r_n) énumère toutes les fractions irréductibles une et une seule fois.

Ce qui montrera que la suite (w_n) induit une bijection entre son rang dans $\mathbb{N}$ et les fractions positives, mises sous forme irréductible.

Dans un premier temps, on montre que toutes les fractions se retrouvent dans la suite (r_n) , puis nous démontrerons que chaque fraction irréductible positive ne s'y retrouve qu'une seule fois.

Propriété.

On a $\{q \in \mathbb{Q} ; \exists k \in \mathbb{N}^*, r_k = q\} = \mathbb{Q}^+$.

(*On dit aussi que la suite* (r_n) *induit une surjection de* $\mathbb{N}^*$ *sur* $\mathbb{Q}^+$.)

<u>Preuve :</u>

On remarque que cela revient à montrer que $\mathbb{Q}^+ \subset \{q \in \mathbb{Q} ; \exists k \in \mathbb{N}^*, r_k = q\}$.

Et comme $q \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* ; \exists (a, b) \in [\![1 ; n]\!]^2 ; q = \frac{a}{b}$, nous allons montrer par récurrence que :

Pour tout entier naturel *n* strictement positif : $\forall (a, b) \in [\![1 ; n]\!]^2, \exists k \in \mathbb{N}^* ; r_k = \frac{a}{b}$

<u>Initialisation :</u> Comme *n* = 1, alors $[\![1 ; n]\!] = \{1\}$. On prend donc *a* = 1 = *b*, et $\frac{1}{1} = r_1$.

<u>Hérédité :</u> On suppose que $\forall (a, b) \in [\![1 ; n]\!]^2, \exists k \in \mathbb{N}^* ; r_k = \frac{a}{b}$.

Et on cherche à établir que $\forall (a, b) \in [\![1 ; n+1]\!]^2, \exists k \in \mathbb{N}^* ; r_k = \frac{a}{b}$.

Nous allons séparer cette démonstration en 4 cas :

<u>cas 1 :</u> si $a = n+1$ et $b = n+1$, alors $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$ qui est le terme r_1 .

<u>cas 2 :</u> si $a \leqslant n$ et $b \leqslant n$, alors nous utilisons directement l'hypothèse de récurrence.

<u>cas 3 :</u> si $a = n+1$, et $b \leqslant n$

Dans ce cas $a - b \leqslant n$, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à *a* – *b* et *b* :

Il existe donc un rang *k* tel que $r_k = \frac{a-b}{b}$.

Par définition de la suite (r_n) , on a alors $r_{2k+1} = \frac{(a-b)+b}{b} = \frac{a}{b}$.

<u>cas 4 :</u> si $a \leqslant n$, et $b = n+1$

Dans ce cas $b - a \leqslant n$, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à *a* et *b* – *a* :

Il existe donc un rang *k* tel que $r_k = \frac{a}{b-a}$.

Par définition de la suite (r_n) , on a alors $r_{2k} = \frac{a}{(b-a)+a} = \frac{a}{b}$.

Dans chacun des cas, nous avons donc trouvé un terme de la suite (r_n) associé à $\frac{a}{b}$.

Ce qui valide l'hérédité, et conclut donc la démonstration.

Il ne reste plus qu'à démontrer que chaque fraction positive, mise sous forme irréductible, n'apparaît qu'une fois dans la suite (r_n) .

Cette démonstration utilisera le fait que :

- Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n+1} = u_n + u_{n+1} = u_{2n} + u_{n+1} > u_{2n}$, alors $r_{2n} = w_{2n} = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} < 1$.
- Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n+1} = u_n + u_{n+1} = u_n + u_{2n+2} > u_{2n+2}$, alors $r_{2n+1} = w_{2n+1} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}} > 1$.
- Et, par suite, $r_n = 1 \Leftrightarrow n = 1$.

Propriété.
Toute fraction donnée, mise sous forme irréductible, n'apparaît qu'une seule fois dans (r_n) .
Nous montrerons plus exactement que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall k' \in [\![1;k]\!], (r_k = r_{k'} \Rightarrow k = k')$.
(*On dit que la suite* (r_n) *induit une injection de* $\mathbb{N}^*$ *dans les fractions irréductibles positives.*)

Preuve :
Il s'agit d'une démonstration par récurrence forte sur l'entier *k*.
Initialisation : Pour *k* = 1, on prend $k' \in [\![1;1]\!] = \{1\}$. On a bien $k = 1 = k'$
Et l'étape d'initialisation est validée.
Hérédité : On suppose par hypothèse de récurrence forte que, pour un certain entier naturel non nul k_0 : $\forall k \in [\![1;k_0]\!], \forall k' \in [\![1;k]\!], (r_k = r_{k'} \Rightarrow k = k')$.
Et on cherche à établir que $\forall k \in [\![1;k_0+1]\!], \forall k' \in [\![1;k]\!], (r_k = r_{k'} \Rightarrow k = k')$, ce qui revient à montrer le résultat suivant, par hypothèse forte de récurrence (pour $k = k_0 + 1$) :
$\forall k' \in [\![1;k_0+1]\!], (r_{k'} = r_{k_0+1} \Rightarrow k' = k_0+1)$

Montrons que si $r_{k'} = r_{k_0+1}$, alors $k' = k_0 + 1$.

Cas 1 : Si $k_0 + 1$ est pair.
Alors $r_{k_0+1} < 1$, d'où $r_{k'} < 1$ et donc k' est pair, d'après le résultat donné initialement.
On a donc $k_0 + 1 = 2u$ et $k' = 2v$. Et, comme le rang est pair, $r_{k_0+1} = r_{k'}$ s'écrit $\frac{i}{i+j}$.
Par suite, $r_{2u} = \frac{i}{i+j} = r_{2v}$, ce qui implique que $r_u = \frac{i}{j} = r_v$, d'après la propriété initiale sur la suite (r_n) . Par hypothèse de récurrence forte, on en déduit que *u* = *v*, donc que $k' = k_0 + 1$.

Cas 2 : Si $k_0 + 1$ est impair.
Alors $r_{k_0+1} > 1$, d'où $r_{k'} > 1$ et donc k' est impair, d'après le résultat donné initialement.
On a $k_0 + 1 = 2u + 1$ et $k' = 2v + 1$. Et, comme le rang est impair, $r_{k_0+1} = r_{k'}$ s'écrit $\frac{i+j}{j}$.
Par suite, $r_{2u+1} = \frac{i+j}{j} = r_{2v+1}$, ce qui implique que $r_u = \frac{i}{j} = r_v$, d'après la propriété initiale sur la suite (r_n) . Par hypothèse de récurrence forte, on en déduit que *u* = *v*, donc que $k' = k_0 + 1$.

Ce qui valide l'étape d'hérédité. Nous avons ainsi montré que chaque fraction irréductible n'apparaît qu'une et seule fois dans la suite (r_n) .

En conclusion, la suite (r_n) est confondue avec la suite (w_n) , contient tous les quotients, et chaque fraction irréductible n'y apparaît qu'une seule fois.
Nous en concluons que la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$ est telle que chaque fraction de $\mathbb{Q}^+$, mise sous forme irréductible, y apparaît une et une seule fois.

En termes plus mathématiques, la suite (w_n) induit une bijection entre son rang dans $\mathbb{N}^*$ et l'ensemble des fractions irréductibles positives :
En particulier, chaque fraction positive est donc associée à un, et un seul, terme de la suite des quotients (w_n) *. Ce qui s'écrit :* $\forall q \in \mathbb{Q}^+, \exists! n \in \mathbb{N}; w_n = q$.
(Ce terme w_n regroupant toutes les fractions ayant la même forme irréductible.)

Dans son article, M. Delahaye présente un autre moyen de définir la suite des quotients (w_n) :

Propriété.

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{1}{1+2[x]-x}$, où [*x*] est la partie entière de *x*.
La suite (w_n) et la suite (a_n) définie par $a_1=1$ et $a_{n+1}=f(a_n)$ sont identiques.

Afin de démontrer ce résultat, on commence par revenir à la suite (v_n) définie par
$v_n=\dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{u_n}$, étudiée dans la partie 6).

On remarque que $v_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_{n+1}}+\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}=w_n+\dfrac{1}{w_{n+1}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{v_{n+1}-w_n}=w_{n+1}$.
Par analogie, il faut et il suffit donc que l'on démontre que, pour tout *n*, $1+2[w_n]=v_{n+1}$.
Or, à la partie 6), nous avons vu que : Pour tout entier *l* impair, pour tout entier *p*, $v_{l\times 2^p}=1+2p$.

On en déduit qu'il suffit de démontrer que :
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $[w_n]=p$, où *p* est tel que $n+1=l\times 2^p$, avec *l* impair.

C'est à dire que la partie entière de w_n est égale à la valuation 2-adique de l'entier *n* +1, que nous avions utilisé dans la partie 4), ce qui s'écrit aussi : $\forall\, p\in\mathbb{N}$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $\left[w_{2^p(2k+1)-1}\right]=p$.

Pour ce dernier résultat, nous l'obtenons à partir d'une démonstration par récurrence sur l'entier *p* :
<u>Étape d'initialisation :</u> Pour *p* = 0 : On a $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $w_{2^0(2k+1)-1}=w_{2k+1-1}=w_{2k}$.
Et nous avons vu précédemment que $w_{2k}<1$, pour tout entier *k*.
On en déduit que $\left[w_{2^0(2k+1)-1}\right]=0$, ce qui valide l'initialisation.
<u>Étape d'hérédité :</u> On suppose que pour un certain entier *p*, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $\left[w_{2^p(2k+1)-1}\right]=p$.
On a $\left[w_{2^{p+1}(2k+1)-1}\right]=\left[w_{2^{p+1}(2k+1)-2+1}\right]=\left[w_{2\times(2^p(2k+1)-1)+1}\right]$.
Comme, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_{2n+1}=\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}}=\dfrac{u_n+u_{n+1}}{u_{n+1}}=\dfrac{u_n}{u_{n+1}}+1=w_n+1$, par définition de (u_n) .
On en déduit que $\left[w_{2^{p+1}(2k+1)-1}\right]=\left[w_{2^p(2k+1)-1}\right]+1=p+1$, par hypothèse de récurrence.
Ce qui valide l'hérédité.
Nous avons ainsi démontré que $\forall\, p\in\mathbb{N}$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $\left[w_{2^p(2k+1)-1}\right]=p$.

Par suite, la suite (w_n) peut aussi être définie par $w_1=1$ et $w_{n+1}=f(w_n)$.

<u>Remarque :</u>
Dans la preuve, nous avons utilisé le fait que, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$w_{2n+1}=w_n+1$$

Ce résultat n'a pas d'équivalent simple pour les rangs pairs. En effet, on arriverait à :
$w_{2n}=\dfrac{u_{2n}}{u_{2n+1}}=\dfrac{u_n}{u_n+u_{n+1}}=\dfrac{u_n+u_{n-1}-u_{n-1}}{u_n+u_{n-1}}=1-\dfrac{u_{n-1}}{u_n+u_{n-1}}$, qui n'amène pas de connexion avec w_n .

Dans son article, M. Delahaye évoque enfin une dernière propriété remarquable.

Présentons ce résultat sur un exemple : On considère un entier naturel *n* quelconque, comme par exemple 98. Et on considère l'écriture binaire (classique) de 98, qui est [1100010].
On décide de compter, ***de droite vers la gauche*** le nombre de « 1 » puis de « 0 » consécutifs, en commençant toujours par compter le nombre de « 1 » consécutifs.
Pour l'exemple de *n* = 98, on compte ainsi $s_0^{(1)}=0$ « 1 », puis $s_1^{(0)}=1$ « 0 », puis $s_1^{(1)}=1$ « 1 », puis $s_2^{(0)}=3$ « 0 », et enfin $s_2^{(1)}=2$ « 1 », et on a fini de parcourir la représentation binaire.

On remarque alors que $s_0^{(1)}+\cfrac{1}{s_1^{(0)}+\cfrac{1}{s_1^{(1)}+\cfrac{1}{s_2^{(0)}+\cfrac{1}{s_2^{(1)}}}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{9}{16}$.

Et il se trouve que $\frac{9}{16}=w_{98}=\frac{u_{98}}{u_{99}}$, où (u_n) et (w_n) sont les suites étudiées précédemment.
Nous abrégerons en $f_n=[s_0^{(1)};s_1^{(0)};s_1^{(1)};s_2^{(0)};s_2^{(1)};\ldots;s_p^{(0)};s_p^{(1)}]$ la fraction continue associée à ces nombres lorsque l'on observe la représentation binaire de l'entier naturel *n*.
Remarquons qu'elle débutera toujours par $s_0^{(1)}$, mais peut se terminer par un $s_k^{(0)}$ ou un $s_k^{(1)}$.
Comme $f_1=[1]$ donne bien $1=w_1$, le lien entre (w_n) et la suite obtenue grâce à l'arbre de Calkin-Wilf montre qu'il suffit de montrer que si $f_n=\frac{i}{j}$, alors $f_{2n}=\frac{i}{i+j}$ et $f_{2n+1}=\frac{i+j}{j}$.

Cas 1 : Si l'entier naturel *n* est pair, alors $s_0^{(1)}=0$, et donc $[0;s_1^{(0)};s_1^{(1)};\ldots]=f_n=\frac{i}{j}$ est une fraction continue qui s'écrit en fait $0+\frac{1}{\ldots}=\frac{1}{\frac{j}{i}}$. Ainsi :

- On a $f_{2n}=[0;1+s_1^{(0)};s_1^{(1)};\ldots]$ (en multipliant l'entier *n* par 2, on ajoute un « 0 » à droite de la représentation binaire, et il n'y avait pas de « 1 » initialement.) : D'où $f_{2n}=\frac{1}{1+\frac{j}{i}}=\frac{i}{i+j}$.

- On a $f_{2n+1}=[1;s_1^{(0)};s_1^{(1)};\ldots]$ (le produit par 2 « déplace » la représentation binaire (qui finissait par un « 0 ») d'un cran, et un « 1 » vient dans l'emplacement libéré) : $f_{2n+1}=1+\frac{i}{j}=\frac{j+i}{j}$

Cas 2 : Si l'entier naturel *n* est impair, alors $s_0^{(1)}\geqslant 1$, et donc $[s_0^{(1)};s_1^{(0)};s_1^{(1)};\ldots]=f_n=\frac{i}{j}$. Ainsi :

- $f_{2n}=[0;1;s_1^{(0)};s_1^{(1)};\ldots]$ (Pour ce nombre pair, on insère un « 0 » en fin de la représentation binaire, qui finissait par « 1 ». Elle débute par 0 « 1 » puis 1 « 0 ») : $f_{2n}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{i}{j}}}=\cfrac{1}{\frac{i+j}{i}}=\frac{i}{i+j}$

- $f_{2n+1}=[1+s_0^{(1)};s_1^{(0)};s_1^{(1)};\ldots]=1+\frac{i}{j}=\frac{j+i}{j}$

Nous en déduisons que les suites (f_n) et (w_n) vérifient les mêmes propriétés de construction (celles liées à l'arbre de Calkin-Wilf), donc qu'elles coïncident.