Comment se répartit la chaleur ?

Année 2023 – 2024

Bastien Magot, Anaïs Preiss, élèves de classe seconde

Établissement : Lycée Raynouard Brignoles

Enseignant·es : Nelly Mourau, Denis Guicheteau.

Chercheurs : Thierry Champion, Université de Toulon, et Frédéric Havet, INRIA Sophia-Antipolis.

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

On considère une pièce, représentée par un rectangle. Sa température dépend de celles dans les 4 pièces adjacentes. On part du principe qu'à chaque pas de temps par exemple une heure, on obtient la température d'une pièce en calculant la moyenne des températures des pièces qui ont un mur commun avec elle.
Comment évolue la température d'une maison en fonction des températures extérieures ?

1.2. Résultats

1.2.1. Pour une pièce :
On trouve que la température reste **constante** à partir d'une certaine étape. Pour calculer celle-ci, nous avons réalisé la moyenne des 4 températures extérieures.

1.2.2. Pour deux pièces :

1.2.2.a) Avec températures extérieures identiques :
Lorsque nous ajoutons les 4 valeurs adjacentes de la pièce puis que nous divisons le résultat obtenu par 4, à partir d'un certain temps, nous pouvons remarquer que la température intérieure tend vers la température extérieure.

1.2.2.b) Avec températures extérieures différentes :
Dans ce cas de figure, nous n'avons pas encore trouvé de résultat, seulement une formule : avec a, b, c, d, e, f les températures extérieures, u_n et v_n les températures intérieures au bout d'un certain pas de temps n :

$$u_n = \frac{(4^{n-1} + 4^{n-3} + 4^{n-5} \dots)(a + b + f) + (4^{n-2} + 4^{n-4} \dots)(c + d + e) + v_0}{4^n} \quad \text{si } n \text{ est impair,}$$

et

$$u_n = \frac{(4^{n-1} + 4^{n-3} + 4^{n-5} \dots)(a + b + f) + (4^{n-2} + 4^{n-4} \dots)(c + d + e) + u_0}{4^n} \quad \text{sinon.}$$

2. Pour une pièce

	b	
a	u_0	c
	d	

Nous avons noté a, b, c, d les températures extérieures de la maison.
Et nous avons noté u_n la température dans la pièce avec n le nombre de pas de temps.
Pour calculer la valeur de notre pièce, on a utilisé la formule ci-dessous :

$$u_1 = \frac{a+b+c+d}{4}$$

Elle consiste à additionner les 4 températures extérieures divisées par 4.
Ceci revient à calculer la moyenne des températures extérieures.
Dès la première étape, la température se stabilise et reste constante (1).

Ainsi pour une pièce, sa température correspond à la moyenne des températures extérieures.

3. Pour deux pièces avec températures extérieures différentes :

	b	c	
a	u_0	v_0	d
	f	e	

Dans ce cas là, pour connaître la température de notre pièce, nous avons d'abord utilisé le tableur afin de voir l'évolution des températures, et pour chacun des exemples que l'on a pris, les températures se stabilisant. Afin de trouver la valeur vers laquelle la température tend, on a utilisé les formules ci-dessous :

$$u_1 = \frac{a+b+f+v_0}{4}$$
$$v_1 = \frac{c+d+e+u_0}{4}$$

Ces formules consistent à additionner les températures adjacentes plus v_0 ou u_0 et de diviser le tout par 4. Ceci revient à faire la moyenne de ces 4 valeurs.
Ensuite, on trouve

$$u_2 = \frac{a+b+f+v_1}{4} = \frac{a+b+f+\left(\frac{c+d+e+u_0}{4}\right)}{4} = \frac{4a+4b+4f+c+d+e+u_0}{4^2}$$

d'où

$$u_2 = \frac{4a+4b+4f+4^0c+4^0d+4^0e+v_0}{4^2} = \frac{4^1(a+b+f)+4^0(c+d+e)+v_0}{4^2}.$$

De même, on trouve

$$v_2 = \frac{4^0(a+b+f)+4^1(c+d+e)+u_0}{4^2}.$$

Enfin, on a réussi à en déduire une formule plus générale pour $n \geq 1$ (2) :

$$u_n = \frac{(4^{n-1} + 4^{n-3} + 4^{n-5} + \cdots)(a+b+f) + (4^{n-2} + 4^{n-4} + \cdots)(c+d+e) + v_0}{4^n}$$

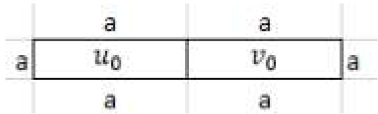
si n est impair, et

$$u_n = \frac{(4^{n-1} + 4^{n-3} + 4^{n-5} + \cdots)(a+b+f) + (4^{n-2} + 4^{n-4} + \cdots)(c+d+e) + u_0}{4^n}$$

sinon.

Ainsi nous avons pu utiliser cette formule pour calculer une valeur approchée de notre température au bout d'un certain temps.

4. Pour deux pièces avec des températures extérieures identiques



$$u_1 = \frac{3a + v_0}{4}$$
$$v_1 = \frac{3a + u_0}{4}$$

En reprenant la formule générale de u_n, on remplace $(a+b+f)$ et $(c+d+e)$ par $(a+a+a)$. Les $(a+a+a)$ peuvent s'écrire aussi $3a$.

$$u_n = \frac{3a(4^{n-1} + 4^{n-3} + \ldots) + 3a(4^{n-2} + 4^{4-4} + \ldots) + \ v_0}{4} \text{ si } n \text{ est impair,}$$

et

$$u_n = \frac{3a(4^{n-1} + 4^{n-3} + \ldots) + 3a(4^{n-2} + 4^{4-4} + \ldots) + \ u_0}{4} \text{ sinon.}$$

En réduisant cette formule, on obtient

$$u_n = \frac{3a(4^{n-1} + 4^{n-2} + 4^{n-3} + \cdots + 4 + 1) + [v_0 \text{ ou } u_0]}{4}$$

La somme avec les 4^ipour i allant de 0 à $n-1$ de cette formule revient à faire :

$$S_n = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-2} + 4^{n-1}$$

Ainsi pour 4 fois la somme S_n, on calcule de cette manière:

$$4S_n = 4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-2} + 4^{n-1} + 4^n$$

Ensuite nous avons soustrait ces deux formules ; $4S_n - S_n = 4^n - 1$ et nous en déduisons le résultat $S_n \ = \frac{4^n - 1}{4-1}$.

Puis $u_n = v_n = \frac{(4^{n-1} + \ldots + 4 + 1) \times 3a}{4^n} + \frac{u_o \text{ ou } v_o}{4^n}$ or $4^{n-1} + \ldots + 4 + 1 = \frac{4^n - 1}{4-1} = \frac{4^n - 1}{3}$.

Lorsque nous reprenons la formule d'origine, on remplace ce qui se trouve entre parenthèses par $\frac{4^n - 1}{3}$ pour pouvoir le simplifier avec $3a$. Quand nous développons, on obtient

$$\frac{\frac{(4^n - 1)}{3} \times 3a}{4^n} + \frac{u_o \text{ ou } v_o}{4^n}$$

ce qui revient à écrire

$$a - \frac{a}{4^n} + \frac{v_o \text{ ou } u_0}{4^n}$$

.

Enfin nous avons pu constater que pour les termes ayant pour dénominateur 4^n, plus n devient grand plus le résultat se rapproche de 0. Donc u_n et v_n sont "égaux" à a lorsque n devient grand (3).

5. Ce qu'il nous reste à faire

Pour aller plus loin, nous pourrions essayer de trouver une formule lorsque nous avons plus de pièces (3, 4, … pièces), étudier des configurations non rectangles (pièces triangles, rondes, …) ou bien observer ce qu'il se passe si l'on place un chauffage dans une pièce ou que l'on isole certains murs (la température n'évoluera plus qu'en fonction des températures extérieures mais aussi par rapport au chauffage).

Notes d'édition

(1) Dans la réalité, la température ne se stabilise pas instantanément. Un modèle plus précis comporterait une variation de température proportionnelle à la chaleur échangée, elle même proportionnelle à la différence entre la température de la pièce et la moyenne des températures des pièces voisines (avec un coefficient dépendant de la nature des murs et de leur isolation).

(2) u_n et v_n s'obtiennent en fonction de u_{n-1} et v_{n-1} par les mêmes formules que celles qui donnent u_1 et v_1 en fonction de u_0 et v_0. À partir de là, les formules explicites pour u_n et v_n se montrent par récurrence (pour v_n il y a seulement à échanger $a + b + f$ et $c + d + e$ d'un côté et u_0 et v_0 de l'autre).

(3) Bien sûr, il n'y a pas une véritable égalité mathématique, mais seulement une approximation – très bonne puisque $1/4^n$ décroît rapidement.

D'autre part, dans les expressions trouvées au §3 pour le cas où les températures extérieures sont différentes, les sommes $4^{n-1} + 4^{n-3} + 4^{n-5} + \cdots$ et $4^{n-2} + 4^{n-4} + \cdots$ se calculent de la même manière qu'ici $4^{n-1} + 4^{n-2} + 4^{n-3} + \cdots + 4 + 1$, en les multipliant par 4^2 puis en soustrayant. On peut alors les remplacer dans l'expression de u_n et cela permet de montrer que dans ce cas aussi u_n s'approche indéfiniment d'une valeur limite (et de même pour v_n).