

# Concepts de trajectoires dans l'espace et approche des points de Lagrange

Année 2023 – 2024

Alessandro Perna, Clémentine Brenaut, Margot Fierling

Établissement(s) : Lycée Stendhal, Milan

Enseignant : Dominique De Luca

Chercheuse : Elisa Maria Alessi, astrophysicienne, Consiglio Nazionale delle Ricerche – IMATI

## Présentation

L'objet de ce travail est de comprendre certaines dynamiques orbitales et d'aborder le problème à trois corps en s'appuyant sur les points de Lagrange. Une partie des résultats a été présentée lors de la journée de présentation online MATH.en.JEANS de Milan le 24 mai 2024.

## Sujet

Deux exemples de situations dans l'espace liés au problème à 2 corps :

- rendez-vous spatial : deux objets sont en orbite circulaire autour d'un même corps. Comment procéder pour qu'un des deux objets rejoigne l'autre ;
- orbiting/déorbiting : un satellite en "fin de vie" est en orbite autour de la Terre. D'un point de vue énergétique, est-il plus intéressant de le faire rentrer sur Terre ou de l'envoyer sur une orbite plus distante ?

Deux exemples d'approche du problème à trois corps :

- Sphère d'influence : dans un problème à trois corps qui s'influencent réciproquement, est-il possible de trouver une région de l'espace dans laquelle on peut raisonnablement considérer l'influence d'un seul de ces trois corps ;
- Existe-il des points dans l'espace où la position des trois corps semble fixe. Points de Lagrange  $L_1, L_2, L_3$ . Recherche algorithmique des points de Lagrange.

## 0. Résultats utilisés lors de nos calculs

### 0.1. Les lois de Kepler

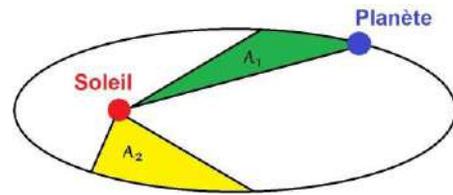
Kepler, astronome du XVIIe siècle, a analysé les données précises des observations de Tycho Brahe pour formuler ses trois lois du mouvement planétaire.

### 0.1.1. Loi des orbites

La première loi de Kepler stipule que les satellites décrivent autour d'un astre attracteur des ellipses dont l'astre attracteur est l'un des foyers. On en déduit donc que la distance satellite-astre attracteur n'est pas toujours constante. Cette ellipse peut être un cercle.

### 0.1.2. Loi des aires

La deuxième loi de Kepler annonce que le segment de droite reliant le satellite à l'astre attracteur balaie des aires égales pendant des durées égales.



### 0.1.3. Loi des périodes

La troisième loi de Kepler explicite une égalité telle que le quotient du carré de la période de révolution  $T$  du satellite par le cube du demi-grand axe  $a$  de son ellipse orbitale est le même pour tous les satellites autour de l'astre attracteur [\(1\)](#).

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Remarque : dans le cas d'une orbite circulaire, la période de rotation est également donnée par la formule :  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$  où  $\omega$  désigne la vitesse angulaire du satellite et  $v$  sa vitesse tangentielle. Cette relation est utilisée dans le calcul des points de Lagrange de cet article.

## 0.2. Les lois de Newton

### 0.2.1. Première loi de Newton

La première loi de Newton aussi connue sous le nom du principe d'inertie est énoncée telle que : « Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état. »

On obtient donc mathématiquement, pour un corps en mouvement rectiligne uniforme ou à l'arrêt, avec  $\vec{F}_i$  les forces extérieures :  $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$ .

### 0.2.2. Deuxième loi de Newton

La deuxième loi de Newton aussi appelée le principe fondamental de la dynamique est définie telle que : « Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. »

De manière plus moderne on dit que pour un corps de masse  $m$ , l'accélération  $\vec{a}$  de son centre d'inertie dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la somme des forces qui s'appliquent à ce corps :

$$\frac{1}{m} \sum \vec{F}_i = \vec{a}, \text{ ce qui est équivalent à } \sum \vec{F}_i = m\vec{a}$$

### 0.2.3. Troisième loi de Newton

La troisième loi de Newton ou le principe des actions réciproques est énoncée telle que : « L'action est toujours égale à la réaction ; c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires. »

Cela revient à dire que tout corps  $A$  exerçant une force sur un corps  $B$  reçoit une force de même intensité et de même direction mais de sens opposé à la force exercée par le corps  $B$  sur le corps  $A$ .

On notera  $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$ .

### 0.3. Loi d'interaction gravitationnelle

**0.3.1. La loi universelle de la gravitation**, ou loi de l'attraction universelle, décrit les interactions entre deux corps  $A$  et  $B$ , que ce soient des satellites ou des planètes, ayant pour masse respective  $M_A$  et  $M_B$ , séparés d'une distance  $d$ , précise que l'intensité de cette force vaut

$$F_{A/B} = F_{B/A} = G \frac{M_A M_B}{d^2}.$$

**0.3.2 Remarque** : si on note la force  $\vec{f}_{A/B}$  résultante de l'interaction entre le corps  $B$  et le champ gravitationnel  $\vec{g}_A$  créé par le corps  $A$ , on a alors  $\vec{f}_{A/B} = M_B \vec{g}_A$ . Le champ gravitationnel créé par le corps de masse  $m$  assimilé à un point matériel est donné par  $\vec{g} = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_i$ , où  $\vec{u}_i$  est le vecteur unitaire et  $r$  la distance qui relie le ce point matériel à l'endroit où on veut connaître la valeur de ce champ. On peut écrire que  $\vec{u}_i = \frac{\vec{AB}}{AB}$ . D'où  $\vec{g} = -G \frac{m}{r^2} \frac{\vec{AB}}{AB} = -G \frac{m}{r^2} \frac{\vec{AB}}{r} = -Gm \frac{\vec{AB}}{r^3}$ . Cette remarque est utilisée lors de la détermination du rayon d'une sphère d'influence.

**0.3.2. L'énergie potentielle de gravitation** d'un corps de masse  $m$  à une distance  $r$  d'un corps de masse  $M$  produisant un champ de gravitation est donnée par

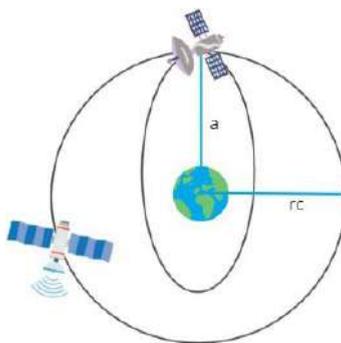
$$U = -\frac{GMm}{r}.$$

## 1. Problèmes à deux corps

### 1.1. Premier exemple : "rendez-vous spatial"

**1.1.1.** Avant de commencer nos recherches sur les points de Lagrange et le problème à trois corps, nous nous sommes tout d'abord penchés sur des problèmes à deux corps. Le problème à deux corps est un modèle théorique dans lequel sont étudiés les mouvements de deux corps assimilés à des points matériels en interaction mutuelle. Nous allons donc commencer avec des cas pratiques, avec une première situation dans laquelle nous avons deux objets, par exemple deux satellites, qui ont une trajectoire commune sur une même orbite circulaire. Nous cherchons à savoir comment nous pouvons faire en sorte qu'un des deux satellites arrive à s'accrocher à l'autre satellite devant lui. On suppose ici que les satellites n'exercent pas d'interaction entre l'un et l'autre et qu'ils ne sont soumis qu'à la force exercée par la Terre.

Tout changement de vitesse du satellite provoque un changement de trajectoire dans l'espace. Afin d'effectuer un "rendez-vous spatial", regardons si un changement de trajectoire nous permet d'effectuer un rendez-vous entre ces deux satellites. Envisageons qu'un satellite accélère ou ralentisse afin d'adopter une nouvelle trajectoire elliptique particulière, dont la Terre occupe un des foyers, avant d'accélérer ou ralentir à nouveau pour retourner sur l'orbite circulaire initiale au même moment que le satellite que l'on souhaite rejoindre.



**Formules utiles :**

- calcul du demi grand axe  $a^*$  :

$$a^{3/2} = r^{3/2} \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right)$$

- calcul de la vitesse  $v^{**}$  :

$$v = \sqrt{2 \left( -\frac{\mu}{2a} + \frac{\mu}{r} \right)}$$

- calcul de  $\mu^{***}$  :

$$\mu = \frac{4\pi^2}{T^2} \times a^3$$

\* La formule du calcul du demi grand axe est issue de la 3<sup>e</sup> loi de Kepler (2);

\*\* La formule du calcul de la vitesse provient de la conservation de l'énergie (3);

\*\*\*  $\mu$  : paramètre gravitationnel de la Terre. Ici le produit entre  $G$  (constante gravitationnelle) et  $M$  (masse de la Terre), issue de la 3<sup>e</sup> loi de Kepler ;

$\varphi$  (angle formé par les deux satellites et le centre de la terre au début de la manœuvre) = 1,1 rad ;

$rc = 7171$  km ;

$\mu(\text{terre}) = 398600 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ .

En prenant les données ci-dessus, on cherche à calculer la vitesse orbitale du satellite suivant une trajectoire circulaire ( $V_c$ ) puis elliptique ( $V_e$ ).

Calcul de  $a$  :

$$a^{3/2} = 7171^{3/2} \left(1 - \frac{1,1}{2\pi}\right) \text{ donc } a = 7171 \left(1 - \frac{1,1}{2\pi}\right)^{2/3} = 6308 \text{ km (4)}$$

Pour la trajectoire circulaire :

calcul de  $V_c$  :

$$V_c = \sqrt{2 \left( -\frac{398600}{2 \times 7171} + \frac{398600}{7171} \right)} = 8,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pour la trajectoire elliptique :

calcul de  $V_e$  :

$$V_e = \sqrt{2 \left( -\frac{398600}{2 \times 6308} + \frac{398600}{7171} \right)} = 6,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

calcul de  $\Delta v_1$  : (vitesse pour quitter le cercle et entrer sur l'ellipse) :

$$\Delta v_1 = V_e - V_c = 6,9 - 8,4 = -1,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

calcul de  $\Delta v_2$  : (vitesse pour quitter l'ellipse et entrer sur le cercle) :

$$\Delta v_2 = V_c - V_e = -\Delta v_1 = -1,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

calcul du  $\Delta v$  final :

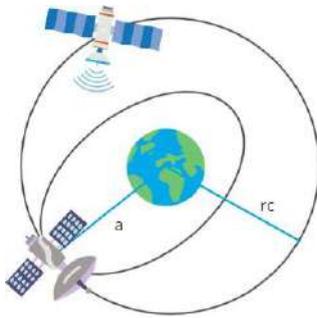
$$\Delta v = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| = 3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

temps mis par le satellite pour rejoindre le corps céleste :

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \text{ donc } T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu} \text{ d'où}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\mu}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \times 6308^3}{398600}} = 4986 \text{ s}$$

**1.1.2** De même, nous cherchons à savoir comment doit évoluer notre satellite pour pouvoir aller s'accrocher au satellite quand ce dernier se trouve derrière le satellite et non devant comme dans la première situation.



Ici,  $\varphi$  (angle formé par les deux satellites et le centre de la terre au début de la manœuvre) =  $-1,1 \text{ rad}$  (5).

En prenant les données ci-dessus, on cherche à calculer la vitesse de rotation du satellite suivant une trajectoire circulaire ( $V_c$ ) puis elliptique ( $V_e$ ).

Calcul de  $a$  :

$$a = 7985 \text{ km}$$

Pour la trajectoire circulaire :

calcul de  $V_c$  :

$$V_c = 8,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pour la trajectoire elliptique :

calcul de  $V_e$  :

$$V_e = 7,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

calcul de  $\Delta v_1$  (vitesse pour quitter le cercle et entrer sur l'ellipse) :

$$\Delta v_1 = -0,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

calcul de  $\Delta v_2$  (vitesse pour quitter l'ellipse et entrer sur le cercle) :

$$\Delta v_2 = 0,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

calcul du  $\Delta v$  final :

$$\Delta v = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| = 1,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

temps mis par le satellite pour rejoindre le corps céleste :

$$T = 7101 \text{ s}$$

## 1.2. Second exemple : Deorbiting - Reorbiting

### 1.2.1. Deorbiting

Le deuxième cas que nous étudions dans le cadre du problème à deux corps : un satellite en fin de vie est en orbite basse. Nous cherchons à savoir s'il est plus économique énergétiquement parlant de le ramener sur Terre ou bien de l'envoyer sur une orbite plus lointaine que l'on appellera orbite cimetière.

On s'intéresse ici à la durée que mettra le satellite à retourner sur la Terre sachant qu'il est en orbite à une altitude de 600 km.

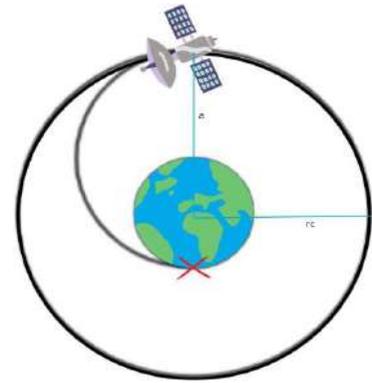
On a

$$r_t = 6371 \text{ km (rayon de la Terre) ;}$$

$$r_c = r_t + 600 = 6971 \text{ km ;}$$

$$\mu (\text{terre}) = 398600 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

En prenant les données ci-dessus, on cherche à calculer la vitesse du satellite suivant une trajectoire circulaire ( $V_c$ ) puis elliptique ( $V_e$ ) avant de voir combien de temps il mettra à rejoindre la Terre.



calcul de  $a$  :

$$a = \frac{2 \times 6371 + 600}{2} = 6671 \text{ km}$$

calcul de  $V_e$  :

$$V_e = \sqrt{2 \left( -\frac{398600}{2 \times 6671} + \frac{398600}{6971} \right)} = 7,39 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

calcul de  $V_c$  :

$$V_c = \sqrt{2 \left( -\frac{398600}{2 \times 6971} + \frac{398600}{6971} \right)} = 7,56 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

calcul de  $|\Delta v|$  deorbiting :  $|\Delta v| = |V_e - V_c| = 0,17 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

temps mis par le satellite pour rejoindre la Terre :  $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$  donc  $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu}$ , d'où

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\mu}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \times 6671^3}{398600}} = 5422 \text{ s}$$

Comme le satellite réalise juste la moitié du chemin pour rejoindre la Terre alors :

$$T_{\text{final}} = 2711 \text{ s}$$

## 1.2.2. Reorbiting

**1.2.2.1** De même, nous réalisons la même étude mais cette fois-ci avec un satellite qui passe d'une orbite de 600 km autour de la Terre à 2000 km.

On s'intéresse ici à la durée que mettra le satellite à changer d'orbite sachant qu'il est en orbite à 600 km de la Terre et qu'il doit se déplacer sur une nouvelle orbite à 2000 km de la Terre.

On a

$$r_t = 6371 \text{ km (rayon de la Terre) ;}$$

$$r_c = r_t + 600 = 6971 \text{ km ;}$$

$$\mu (\text{terre}) = 398600 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}.$$

Calcul de  $a$  :

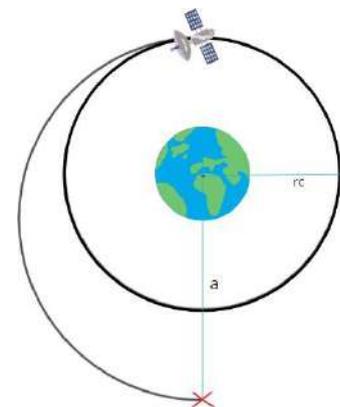
$$a = \frac{2 \times 6371 + 600 + 2000}{2} = 7671 \text{ km}$$

calcul de  $V_c$  :

$$V_c = 7,56 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

calcul de  $V_e$  :

$$V_e = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$



calcul de  $V_{c2000}$  :

$$V_{c2000} = \sqrt{2 \left( \frac{-398600}{2 \times 8371} + \frac{398600}{8371} \right)} = 6,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

calcul de  $\Delta v_1$  (vitesse pour quitter le cercle et entrer sur l'ellipse) :

$$\Delta v_1 = V_e - V_c = 0,34 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

calcul de  $\Delta v_2$  : (vitesse pour quitter l'ellipse et entrer sur le cercle de la nouvelle orbite) (6) :

$$\Delta v_2 = V_{c2000} - V_e = -1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

calcul du  $|\Delta v|$  reorbiting :  $|\Delta v| = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| = 0,66 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

temps total mis par le satellite pour rejoindre la nouvelle orbite :

$$T = 3343 \text{ s}$$

**1.2.2.2** Dans un second temps, nous nous intéressons à la même situation mais cette fois-ci, pour un satellite qui part d'une orbite située à 1000 km de la Terre.

"Deorbiting"	Reorbiting"
$a = \frac{2 \times 6371 \text{ km} + 1000 \text{ km}}{2}$	$a = \frac{2 \times 6371 \text{ km} + (2000 \text{ km} + 1000 \text{ km})}{2}$
$= 6871 \text{ km}$	$= 7871 \text{ km}$
$V_e = 7,08 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$	$V_c = 7,35 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
$V_c = 7,35 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$	$V_e = 7,58 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
$\Delta v = 0,27 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$	$V_{c2000} = 6,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
	$\Delta v = 0,45 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

### 1.2.3. Résultats

Ainsi, si l'on s'intéresse maintenant à l'énergie consommée lors de ces transferts et on cherche à savoir si énergétiquement parlant, il est préférable de ramener le satellite sur Terre ou s'il vaut mieux l'envoyer sur une orbite lointaine de cimetière.

Pour cela, on compare les variations de vitesse nécessaires pour réaliser ces transferts.

Pour un satellite en orbite à 600 km de la Terre

$$\Delta v \text{ deorbiting} = 0,17 \text{ km/s}$$

$$\Delta v \text{ reorbiting} = 0,66 \text{ km/s}$$

Pour un satellite en orbite à 1000 km de la Terre

$$\Delta v \text{ deorbiting} = 0,27 \text{ km/s}$$

$$\Delta v \text{ reorbiting} = 0,45 \text{ km/s}$$

Ainsi, on peut voir que lorsque le satellite est en orbite à 600 km de la Terre,

$$\Delta v \text{ deorbiting} < \Delta v \text{ reorbiting}$$

donc il est préférable de la ramener sur Terre plutôt que de l'envoyer sur une orbite de cimetière.

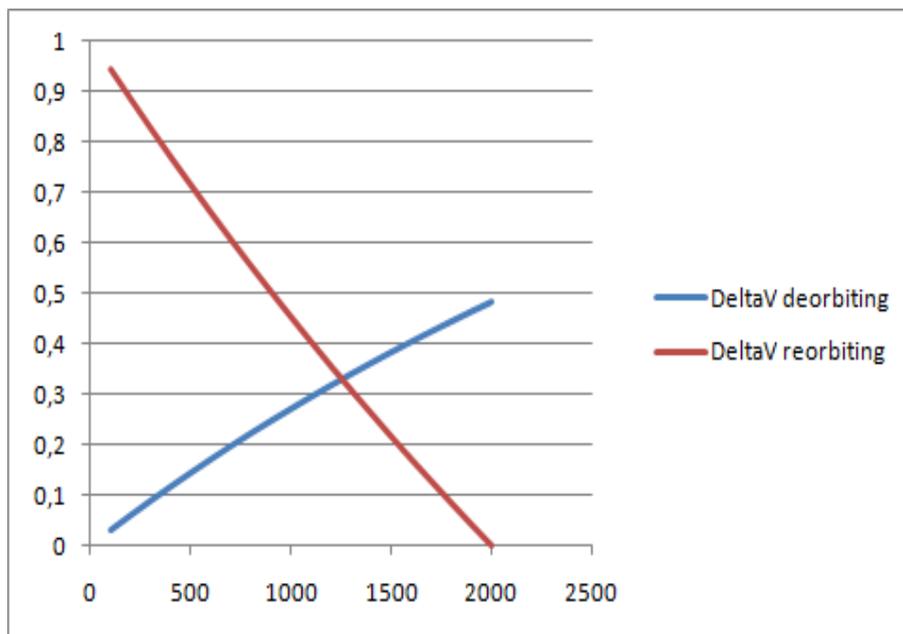
De même, lorsque le satellite est en orbite à 1000 km de la Terre,

$$\Delta v \text{ deorbiting} < \Delta v \text{ reorbiting}$$

donc il est aussi préférable dans ce cas de le ramener sur Terre.

Cependant, on peut remarquer que lorsque la distance orbitale initiale entre le satellite et la Terre augmente,  $\Delta v$  deorbiting augmente lui aussi et  $\Delta v$  reorbiting diminue. Il y aura donc un moment où il deviendra moins coûteux énergétiquement d'envoyer le satellite sur une orbite de cimetière au lieu de le ramener sur Terre.

En programmant le calcul des  $\Delta v$  sur un tableur, en modifiant les orbites initiales du satellite et en considérant une orbite cimetière de 2000 km, on peut constater qu'à partir d'une orbite initiale d'environ 1300 km, il est plus intéressant énergétiquement d'envoyer le satellite sur cette orbite cimetière que de le ramener sur Terre.



## 2. Approche de situations liées au problème à 3 corps

### 2.1. Henri Poincaré

Dans la partie précédente, nous avons étudié des situations où on ne considère que l'influence réciproque de deux corps dans l'espace (Terre-satellite). Mais dans l'espace, d'autres corps exercent une influence sur un satellite, par exemple le Soleil, la Lune, etc... Le problème à considérer n'est donc plus un problème à 2 corps, mais au moins à trois corps.

Les scientifiques ont donc rapidement cherché à décrire les mouvements combinés de 3 corps s'attirant les uns les autres sous l'effet de la gravitation. Or, ce problème est particulièrement complexe. Henri Poincaré a même montré qu'il n'existait pas de solution générale. En effet, ce mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur du XIX<sup>e</sup> siècle a profondément fait avancer la théorie du problème à trois corps en démontrant la nature chaotique de ses solutions. Il a montré que même de petites perturbations dans les conditions initiales peuvent conduire à des comportements orbitaux imprévisibles, un phénomène que nous appelons aujourd'hui "chaotique". Ses travaux ont établi les bases de la théorie moderne du chaos.

Cependant, un "problème restreint à 3 corps" a pu être établi. Il est composé de 2 corps principaux et un 3<sup>e</sup> corps de masse négligeable, comme un satellite ou un astéroïde. Ce modèle simplifié permet de mieux comprendre les interactions gravitationnelles complexes au sein de leur sphère d'influence respective, facilitant ainsi l'étude des dynamiques orbitales dans un cadre contrôlé. Pour ce problème, Henri Poincaré établit l'existence d'un nombre infini de solutions périodiques au problème restreint des trois corps, ainsi que des techniques permettant de poursuivre ces solutions dans le problème général des trois corps.

## 2.2. Sphères d'influence

**2.2.1.** Les sphères d'influence sont, en mécanique spatiale, des zones sphériques autour desquelles un corps céleste exerce une influence gravitationnelle primordiale sur les objets qui se trouvent en orbite dans cette zone. Cela revient donc à la zone dans laquelle un corps céleste détermine la trajectoire de ses satellites en négligeant la présence d'autres corps célestes plus imposants mais plus lointains, tels que le Soleil.

Dans cette partie, nous allons calculer le rayon d'une sphère d'influence et l'appliquer pour certains corps célestes de notre système solaire.

Pour ce faire nous sommes partis de l'égalité donnée par Laplace qui définit la sphère d'influence comme lieu des points où se situe l'égalité des rapports entre l'attraction gravitationnelle principale ( $f^k$ ) et l'attraction perturbative ( $f^p$ ) mesurées par rapport à deux points de masses  $m_1$  et  $m_2$ .

Pour faciliter la lecture et la compréhension, voici la liste des variables :

$m_1$  : masse du plus petit des deux corps célestes ;

$m_2$  : masse de plus grand des deux corps célestes ;

$m_3$  : masse du troisième corps (satellite) que l'on considère négligeable par rapport à  $m_1$  et  $m_2$  ;

$f^k$  : attraction gravitationnelle principale (ou attraction képlérienne) ;

$f^p$  : attraction perturbative ;

$G$  : constante gravitationnelle ;

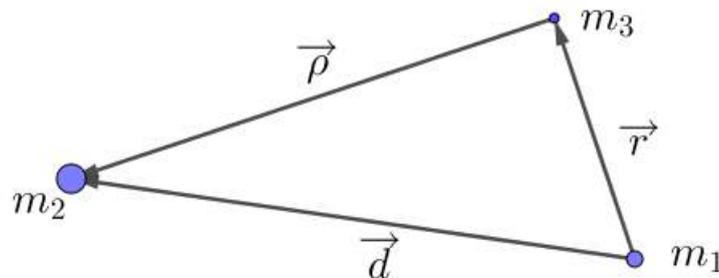
$\vec{d}$  : vecteur défini par les corps de masse  $m_1$  et  $m_2$ , de norme  $d$  ;

$\vec{\rho}$  : vecteur défini par les corps de masse  $m_3$  et  $m_2$ , de norme  $\rho$  ;

$\vec{r}$  : vecteur défini par les corps de masse  $m_1$  et  $m_3$ , de norme  $r$  ;

$\vec{r} = \vec{d} - \vec{\rho}$  ;

On considère que :  $\rho \approx d$  et  $d \gg r$  (7).



**2.2.2.** Dans un système référentiel inertiel on a (8)

$$\frac{f_1^p}{f_1^k} = \frac{Gm_2 \left\| \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right\|}{G(m_1 + m_3) \left\| \frac{\vec{r}}{r^3} \right\|} = r^2 \frac{m_2}{m_1 + m_3} \left\| \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right\|$$

et

$$\frac{f_2^p}{f_2^k} = \frac{Gm_1 \left\| \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right\|}{G(m_2 + m_3) \left\| \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \right\|} = \rho^2 \frac{m_1}{m_2 + m_3} \left\| \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right\|$$

Pour en calculer son rayon, Laplace définit de la sphère d'influence comme le lieu des points tels que

$$\frac{f_1^p}{f_1^k} = \frac{f_2^p}{f_2^k}$$

$$r^2 \frac{m_2}{m_1 + m_3} \left\| \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right\| = \rho^2 \frac{m_1}{m_2 + m_3} \left\| \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right\| \quad (*)$$

En rappelant que l'on considère le cas où  $\rho \approx d$  et  $m_3$  négligeable, (\*) devient

$$r^2 \frac{m_2}{m_1} \left\| \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} - \frac{\vec{d}}{\rho^3} \right\| \approx \rho^2 \frac{m_1}{m_2} \left\| \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right\|$$

$$r^2 \frac{m_2}{m_1} \left\| \frac{\vec{\rho} - \vec{d}}{\rho^3} \right\| \approx \rho^2 \frac{m_1}{m_2} \left\| \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right\|$$

$$r^2 \frac{m_2}{m_1} \frac{\|-\vec{r}\|}{\rho^3} \approx \rho^2 \frac{m_1}{m_2} \left\| \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right\|$$

$$\frac{m_2 r^3}{m_1 \rho^3} \approx \rho^2 \frac{m_1}{m_2} \left\| \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right\| \quad (**)$$

De plus, comme  $d \gg r$ ,  $\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \approx \frac{\vec{r}}{r^3}$ , (\*\*) devient

$$\frac{m_2 r^3}{m_1 \rho^3} \approx \rho^2 \frac{m_1}{m_2} \left\| \frac{\vec{r}}{r^3} \right\| = \rho^2 \frac{m_1 \|\vec{r}\|}{m_2 r^3} = \frac{m_1 \rho^2}{m_2 r^2}$$

$$\frac{r^5}{\rho^5} \approx \frac{m_1^2}{m_2^2}$$

$$r^5 \approx \rho^5 \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2$$

Ce qui nous donne

$$r \approx \rho \sqrt[5]{\left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2} = \rho \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^{\frac{2}{5}}$$

**2.2.3.** Appliquons cette formule que nous venons de démontrer pour trouver la sphère d'influence Terre-Soleil, nous utiliserons la distance Terre-Soleil :

$$r \approx 150 \times 10^9 \left( \frac{6 \times 10^{24}}{2 \times 10^{30}} \right)^{\frac{2}{5}} \approx 0,927 \times 10^6 \text{ km}$$

Nous avons réalisé les mêmes calculs pour d'autres systèmes. Pour la sphère d'influence Terre-Lune :

$$r = 384 \times 10^6 \left( \frac{7,346 \times 10^{22}}{6 \times 10^{24}} \right)^{\frac{2}{5}} \approx 0,066 \times 10^6 \text{ km}$$

Pour la sphère d'influence Jupiter-Soleil :

$$r = 7,79 \times 10^{11} \left( \frac{1,96 \times 10^{27}}{2 \times 10^{30}} \right)^{\frac{2}{5}} \approx 48,2 \times 10^6 \text{ km}$$

Le fait de considérer ces sphères d'influence nous a permis de simplifier nos calculs pour trouver les points de Lagrange par la suite.

## 2.3. Les points de Lagrange

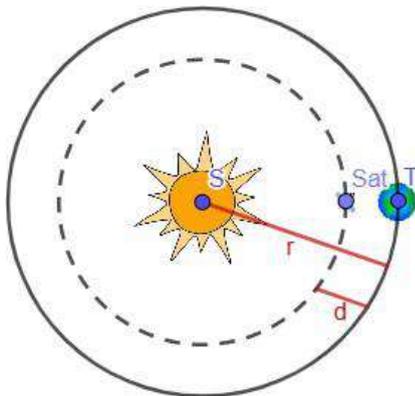
**2.3.1.** Joseph-Louis Lagrange est un mathématicien, mécanicien et astronome qui, avec Euler, est considéré comme le fondateur des calculs des variations. Il aborde aussi de nombreux autres domaines comme la mécanique, la théorie des nombres et les équations algébriques et la théorie des probabilités. Il a inventé les notations  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,... reprises par Euler et qu'on utilise maintenant au quotidien.

Lagrange a également étudié le problème à trois corps et déterminé la position des points qui portent son nom et que nous avons essayé de retrouver. Pour cela nous nous sommes aidés des sphères d'influences et du problème restreint à trois corps. Les points de Lagrange sont des positions particulières dans l'espace où les forces gravitationnelles de 2 corps massifs et la force centripète d'un objet plus petit s'équilibrent. Ces points permettent à un objet de rester en position stable par rapport aux 2 corps principaux. Au nombre de 5, les points de Lagrange se scindent en 3 points instables nommés  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  et 2 points stables dénommés  $L_4$  et  $L_5$ .

### 2.3.2. $L_1, L_2, L_3$

Notre premier objectif a été de démontrer que quand les trois corps sont alignés, il existe 3 premiers points,  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ . Ce sont des points d'équilibre dans un système en rotation, c'est-à-dire non inertielle.

Pour cela, on a établi un schéma où sont représentés le Soleil, la Terre et un satellite qui se trouvera sur l'orbite du point de Lagrange auquel nous nous intéressons.



Données :

$m_1$  : masse Terre  $\approx 5,972 \times 10^{24}$  kg

$m_2$  : masse Soleil  $\approx 1,989 \times 10^{30}$  kg

$m_3$  : masse Satellite

$r$  : distance Terre-Soleil  $\approx 1,5 \times 10^8$  km

$d$  : distance Satellite-Terre

$T$  : période du satellite

La distance que nous avons cherché à déterminer est donc la distance Terre-satellite.

**2.3.2.1** Nous commencerons par  $L_1$  qui est situé entre la Terre et le Soleil.

D'après la seconde loi de Newton

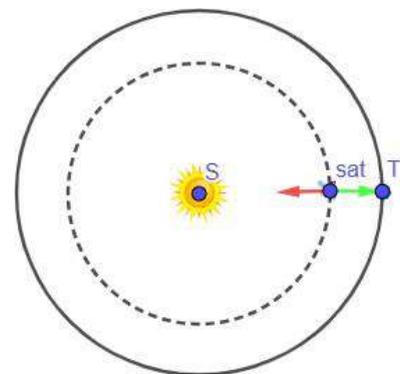
$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$$

D'après la loi d'interaction gravitationnelle

$$F_{A/B} = F_{B/A} = G \frac{M_A M_B}{d^2}$$

Alors, pour  $L_1$ ,

$$\frac{G \times m_2 \times m_3}{(r-d)^2} - \frac{G \times m_1 \times m_3}{d^2} = m_3 \|\vec{a}\|$$



Or le satellite est en mouvement circulaire uniforme, donc  $\|\vec{a}\| = \frac{v^2}{r-d}$ . Soit

$$\frac{G \times m_2 \times m_3}{(r-d)^2} - \frac{G \times m_1 \times m_3}{d^2} = m_3 \frac{v^2}{r-d}$$

En isolant  $v^2$ ,

$$v^2 = \frac{G}{(r-d)d^2} (m_2 d^2 - m_1 (r-d)^2)$$

D'autre part

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (r-d)^2}{v^2}$$

donc, en remplaçant  $v^2$ ,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (r-d)^2 \times (r-d)d^2}{G(m_2 d^2 - m_1 (r-d)^2)} = \frac{4\pi^2 (r-d)^3}{G \left( m_2 - m_1 \left( \frac{r-d}{d} \right)^2 \right)} \quad (1)$$

De plus, pour que les points restent alignés, la période du satellite doit être égale à celle de la Terre :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G m_2} \quad (2)$$

De (1) et (2),

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2 (r-d)^3}{G \left( m_2 - m_1 \left( \frac{r-d}{d} \right)^2 \right)} &= \frac{4\pi^2 r^3}{G m_2} \\ \frac{(r-d)^3}{m_2 - m_1 \left( \frac{r-d}{d} \right)^2} &= \frac{r^3}{m_2} \\ \frac{(r-d)^3}{r^3} &= \frac{m_2}{m_2} - \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{r-d}{d} \right)^2 \\ \left( 1 - \frac{d}{r} \right)^3 &= 1 - \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{r}{d} - 1 \right)^2 \\ 1 - 3 \frac{d}{r} + 3 \left( \frac{d}{r} \right)^2 - \left( \frac{d}{r} \right)^3 &= 1 - \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{r}{d} - 1 \right)^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Or  $\frac{d}{r}$  est positif et proche de 0, donc

$$1 - 3 \frac{d}{r} + 3 \left( \frac{d}{r} \right)^2 - \left( \frac{d}{r} \right)^3 \approx 1 - 3 \frac{d}{r} \quad \text{et} \quad \left( \frac{r}{d} - 1 \right)^2 \approx \left( \frac{r}{d} \right)^2$$

d'où (3) devient

$$\begin{aligned} 1 - 3 \frac{d}{r} &\approx 1 - \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{r}{d} \right)^2 \\ 3 \left( \frac{d}{r} \right)^3 &\approx \frac{m_1}{m_2} \end{aligned}$$

soit

$$d \approx \sqrt[3]{\frac{m_1}{3m_2}} \times r \approx 1,5 \times 10^6 \text{ km}$$

$L_1$  est donc situé à un million cinq cent mille km de la terre du côté du soleil.

**2.3.2.2** On procède de la même façon pour  $L_2$  qui est à proximité de la Terre du côté opposé au soleil.

$$\frac{G \times m_2 \times m_3}{(r+d)^2} + \frac{G \times m_1 \times m_3}{d^2} = m_3 \frac{V^2}{r+d}$$

En isolant  $V^2$ ,

$$V^2 = \frac{G}{(r-d)d^2} (m_2 d^2 - m_1 (r-d)^2)$$

d'où, en utilisant la période  $T$  comme pour  $L_1$ ,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (r+d)^3 \times (r-d)d^2}{G \left( m_2 + m_1 \left( \frac{r+d}{d} \right)^2 \right)} = \frac{4\pi^2 r^3}{G m_2}$$

$$\left( 1 + \frac{d}{r} \right)^3 = 1 + \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{r}{d} + 1 \right)^2 \quad (4)$$

Or  $\frac{d}{r}$  est positif et proche de 0, donc

$$\left( 1 + \frac{d}{r} \right)^3 \approx 1 + 3 \frac{d}{r} \quad \text{et} \quad \left( \frac{r}{d} + 1 \right)^2 \approx \left( \frac{r}{d} \right)^2$$

d'où (4) devient

$$1 + 3 \frac{d}{r} \approx 1 + \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{r}{d} \right)^2$$

$$3 \left( \frac{d}{r} \right)^3 \approx \frac{m_1}{m_2}$$

soit

$$d \approx \sqrt[3]{\frac{m_1}{3m_2}} \times r \approx 1,5 \times 10^6 \text{ km}$$

$L_2$  est donc situé à un million cinq cent mille km de la terre du côté opposé au soleil.

**2.3.2.3** On procède de la même façon pour  $L_3$  qui est du côté opposé à la Terre par rapport au Soleil.

Prenons le cas où le satellite a une orbite autour du soleil supérieure à  $r$  (on obtiendrait le même résultat où le satellite aurait une orbite autour du soleil inférieure à  $r$ ). La distance satellite-soleil est donc  $d-r$ .

On a

$$\frac{G \times m_2 \times m_3}{(d-r)^2} + \frac{G \times m_1 \times m_3}{d^2} = m_3 \frac{V^2}{d-r}$$

En isolant  $V^2$ ,

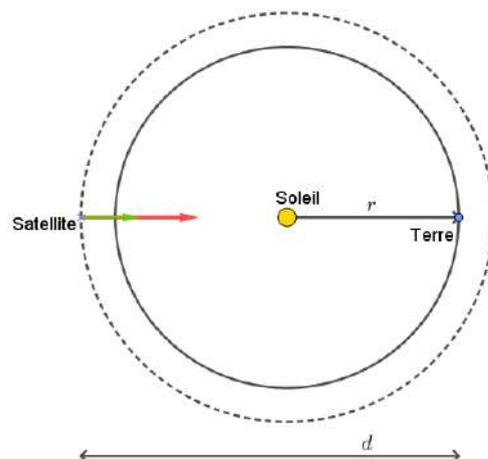
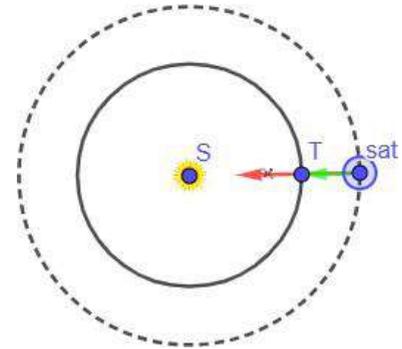
$$V^2 = \frac{G}{(d-r)d^2} (m_2 d^2 + m_1 (d-r)^2)$$

D'autre part

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (d-r)^2}{V^2}$$

donc, en remplaçant  $V^2$ ,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (d-r)^2 \times (d-r)d^2}{G (m_2 d^2 + m_1 (d-r)^2)} = \frac{4\pi^2 (d-r)^3}{G \left( m_2 + m_1 \left( \frac{d-r}{d} \right)^2 \right)} \quad (5)$$



De plus, pour que les points restent alignés, la période du satellite doit être égale à celle de la Terre :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm_2} \quad (6)$$

De (5) et (6) :

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2(d-r)^3}{G\left(m_2 + m_1\left(\frac{d-r}{d}\right)^2\right)} &= \frac{4\pi^2 r^3}{Gm_2} \\ \frac{(d-r)^3}{m_2 + m_1\left(\frac{d-r}{d}\right)^2} &= \frac{r^3}{m_2} \\ \frac{(d-r)^3}{r^3} &= \frac{m_2}{m_2} + \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{d-r}{d}\right)^2 \\ \left(\frac{d}{r} - 1\right)^3 &= 1 + \frac{m_1}{m_2}\left(1 - \frac{r}{d}\right)^2 \end{aligned}$$

Or dans notre cas Terre-soleil,  $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$ . On a donc

$$\left(\frac{d}{r} - 1\right)^3 \approx 1$$

dont l'unique solution est  $\frac{d}{r} - 1 \approx 1$  soit  $d \approx 2r \approx 3 \times 10^8$  km.

$L_3$  est donc le symétrique de la Terre par rapport au soleil.

On peut remarquer que les points de Lagrange alignés entre la Terre et le Soleil ne correspondent pas au rayon la sphère d'influence Terre-Soleil.

#### 2.3.2.4 Applications concrètes

Après avoir déterminé les positions des points de Lagrange, il est également intéressant de survoler leurs applications concrètes. Le point  $L_1$ , situé entre la Terre et le Soleil, est idéal pour placer des satellites permettant de surveiller l'activité solaire. Sa position permet à ces satellites d'avoir une vue constante et ininterrompue du Soleil, ce qui est crucial pour surveiller en temps réel les éruptions solaires, les éjections de masse coronale, et les autres phénomènes solaires. Les observations continues et détaillées du Soleil contribuent également à la recherche scientifique sur la physique solaire.

Le point  $L_2$ , situé au-delà de la Terre en direction opposée au Soleil, est un emplacement privilégié pour les observatoires astronomiques comme le télescope spatial James Webb. En effet, le point  $L_2$  est placé au-delà de la Terre, en direction opposée au Soleil ce qui permet au télescope de rester dans une ombre constante de la Terre. Cela réduit l'interférence de la lumière solaire et la chaleur, créant des conditions idéales pour des instruments sensibles qui nécessitent des températures extrêmement basses pour fonctionner correctement. L'emplacement de  $L_2$  offre finalement un champ de vision presque complet et ininterrompu du ciel nocturne tout en maintenant une consommation minimale de carburant grâce à sa stabilité gravitationnelle.

Finalement, bien que  $L_3$  soit rarement utilisé actuellement en raison de sa position derrière le Soleil, rendant les communications avec la Terre difficiles, il est théoriquement intéressant pour des missions de surveillance du Soleil et de l'espace interplanétaire.

En conclusion, bien que les points de Lagrange  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  soient instables et nécessitent des corrections d'orbite pour maintenir des objets, ils représentent des emplacements stratégiques pour les missions spatiales. Ces points permettent des observations uniques et essentielles, rendant possible une surveillance continue et précise des activités solaires et des phénomènes astronomiques, tout en optimisant la consommation de carburant.

### 2.3.3. Méthode algorithmique

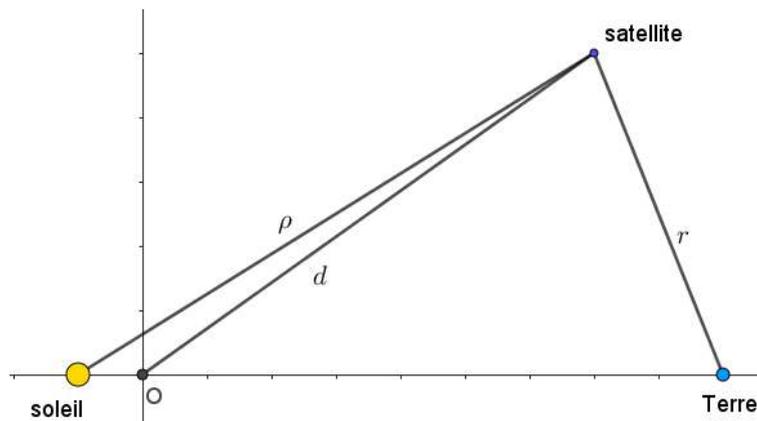
Nous nous sommes également penchés sur une méthode algorithmique pour voir s'il était possible de déterminer approximativement la position des points de Lagrange, en faisant apparaître les lignes de niveau liées à l'énergie potentielle du satellite : placé en n'importe quel point d'une même ligne de niveau, le satellite est soumis à la même énergie potentielle.

On considère  $m_1$  la masse de la Terre (point  $T$ ),  $m_2$  celle du Soleil (point  $S$ ) et  $m_3$  celle du satellite.  $m_3$  étant négligeable, le centre de gravité  $O$  du système doit se situer sur l'axe Terre-Soleil. Il est alors défini par

$$\begin{aligned} m_2 \overrightarrow{SO} + m_1 \overrightarrow{TO} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow m_2 \overrightarrow{SO} + m_1 \overrightarrow{TS} + m_1 \overrightarrow{SO} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (m_1 + m_2) \overrightarrow{SO} &= m_1 \overrightarrow{TS} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{SO} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{TS} \end{aligned}$$

Dans le paragraphe sur le calcul de  $L_1$  et  $L_2$ , nous avons vu que, dans le cas de la Terre et du Soleil,  $L_1$  et  $L_2$  étaient très proches de la Terre. Une simulation avec Python ne permettrait pas de visualiser ces points. C'est pourquoi nous avons choisi une situation différente où  $m_2 = 9m_1$  et où nous considérons que la distance Terre-Soleil vaut 1. On a alors

$$\overrightarrow{SO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{TS} = \frac{m_1}{m_1 + 9m_1} \overrightarrow{TS} = \frac{m_1}{10m_1} \overrightarrow{TS} = \frac{1}{10} \overrightarrow{TS}$$



On constate alors que  $\overrightarrow{TO} = \frac{9}{10} \overrightarrow{TS}$ .

Dans notre repère, l'énergie potentielle du satellite dans un système en rotation est donnée par

$$U = -\frac{Gm_2m_3}{\rho} - \frac{Gm_1m_3}{r} - \frac{G(m_1 + m_2)m_3d^2}{2ST^3}$$

où  $-\frac{Gm_2m_3}{\rho}$  est l'énergie potentielle liée au soleil,  $-\frac{Gm_1m_3}{r}$  l'énergie potentielle liée à la Terre et  $-\frac{G(m_1+m_2)m_3d^2}{2ST^3}$  est l'énergie potentielle centripète (9).

Pour simplifier, posons  $ST = 1$  unité, on a alors

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{-Gm_2m_3}{\rho} - \frac{Gm_1m_3}{r} - \frac{G(m_1 + m_2)m_3d^2}{2} \\
 &= Gm_3 \left( -\frac{m_2}{\rho} - \frac{m_1}{r} - \frac{(m_1 + m_2)d^2}{2} \right) \\
 &= Gm_3 \left( -\frac{9m_1}{\rho} - \frac{m_1}{r} - \frac{10m_1d^2}{2} \right) \\
 &= \frac{Gm_3m_1}{10} \left( -\frac{0,9}{\rho} - \frac{0,1}{r} - \frac{d^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$\frac{Gm_3m_1}{10}$  étant une constante, intéressons nous seulement aux lignes de niveau données par  $-\frac{0,9}{\rho} - \frac{0,1}{r} - \frac{d^2}{2}$ .

Soient  $(x; y)$  les coordonnées du satellite, en considérant alors que  $S(-0,1; 0)$  et  $T(0,9; 0)$ , on a alors

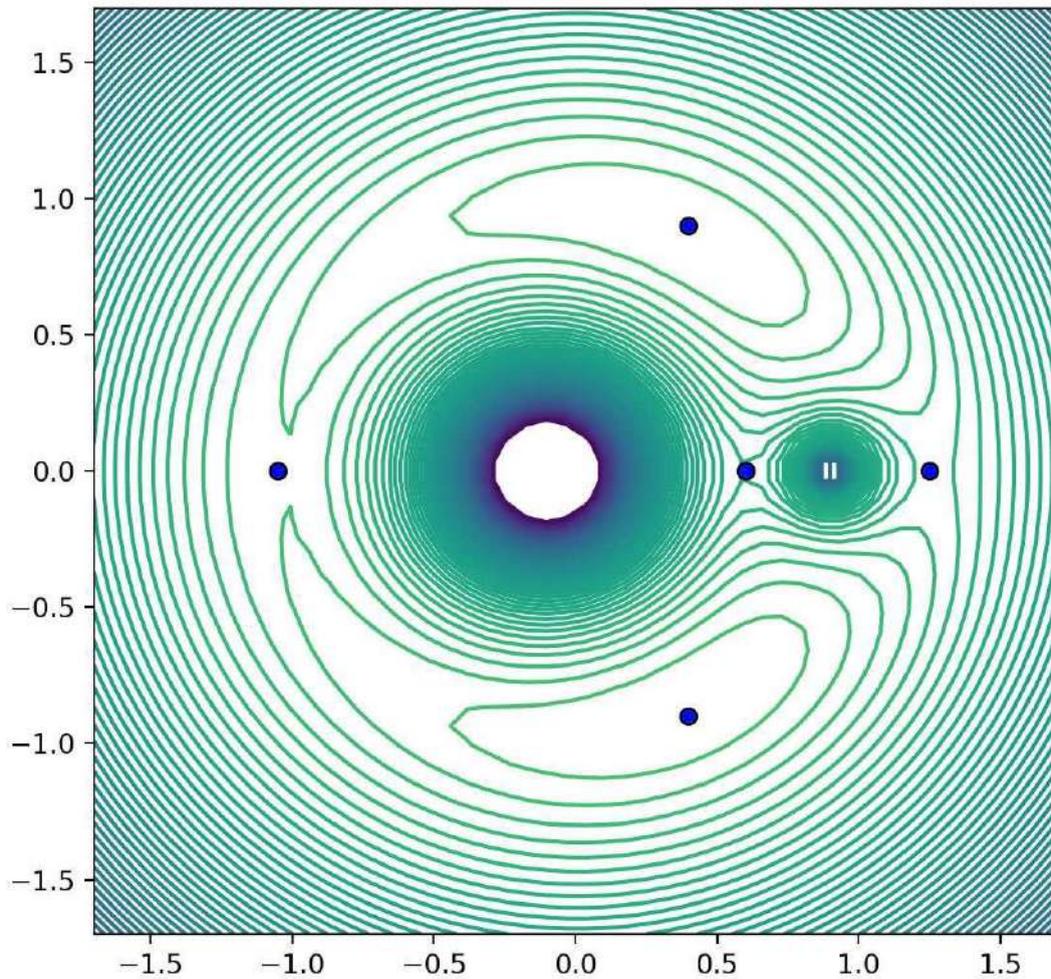
$$d^2 = x^2 + y^2, \rho^2 = (x + 0,1)^2 + y^2 \text{ et } r^2 = (x - 0,9)^2 + y^2$$

L'algorithme donne donc :

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from math import*
n = 50
VX = np.linspace(-1.7, 1.7, n)
VY = np.linspace(-1.7, 1.7, n)
X,Y = np.meshgrid(VX, VY)
def f(x,y):
    return -0.9/np.sqrt((x+0.1)**2+y**2)-0.1/np.sqrt((x-0.9)**2+y**2)
    -0.5*(x**2+y**2)
Z = f(X,Y)
fig = plt.figure()
niveaux = np.arange(-5,0,0.05)
plt.contour(X,Y,Z,niveaux)
XX=[-1.05,0.6,1.25,0.4,0.4]
YY=[0,0,0,-0.9,0.9]
plt.plot(XX,YY, color='none', marker='o', markersize=6, markerfacecolor='blue')
plt.show()

```



Pour placer les points bleus qui représentent les points de Lagrange nous avons procédé à une lecture des lignes de niveaux. Nous avons donc déterminé les points où apparaissent des “sommets” ou des “creux” et lu leurs coordonnées et nous les avons mis dans l’algorithme pour faire apparaître ces points.

D’après les lignes de niveaux obtenues, on peut donc voir apparaître 5 points qui représentent les points de Lagrange :  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  alignés sur l’axe des abscisses, comme démontré dans le paragraphe précédent, et deux autres points  $L_4$ ,  $L_5$ . Les triangles  $L_4ST$  et  $L_5ST$  semblent être équilatéraux.

## Notes d'édition

(1) Kepler a découvert la proportionnalité mais la formule explicite avec la constante  $G$  résulte de la loi universelle de la gravitation due à Newton. La formule s'applique à un satellite orbitant autour d'un corps beaucoup plus massif de masse  $M$  ; si la masse  $m$  du satellite n'est pas négligeable, il faut prendre en compte l'attraction relative des deux corps, ce qui donne  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$  (cf. note 9).

(2) Dans cette formule, l'angle  $\varphi$  (défini à la suite) est mesuré du satellite poursuiveur au satellite cible, dans le sens de leur mouvement. Il reste donc au second un arc de cercle de  $2\pi - \varphi$  à parcourir pour rejoindre l'apogée de l'orbite elliptique où le premier le rejoindra.

(3) Cette formule est appelée *équation de la force vive*. Elle résulte de la conservation de l'énergie (énergie cinétique + énergie potentielle) ; on trouve une démonstration dans la note 7 de l'article "[Analyse et optimisation d'une mission spatiale](#)" du même atelier (voir aussi [Wikipedia](#)).

(4) Cette valeur est inférieure au rayon de la Terre (6371 km). S'il suit l'orbite ainsi calculée, le satellite va entrer en collision avec la Terre – pour l'éviter, il faut même que le grand axe  $2a$  soit supérieur à la somme des rayons de l'orbite circulaire et de la Terre... ( $a \geq \frac{7171+6371}{2} = 6771$  km). Il faudrait laisser le satellite cible parcourir un tour complet en plus (ce qui revient à remplacer  $1 - \varphi/2\pi$  par  $2 - \varphi/2\pi$  dans l'équation), et faire passer satellite poursuiveur sur une orbite plus large que l'orbite initiale ; on peut aussi envisager de lui faire parcourir plusieurs tours sur une orbite moins plus petite.

(5) On pourrait aussi poser  $\varphi = 2\pi - 1,1$  rad mais le calcul avec cette valeur suppose que le satellite cible ne parcourt que 1,1 rad sur l'orbite circulaire et conduit aussi à une collision. Dans le calcul avec  $\varphi = -1,1$  rad fait ici, le satellite cible parcourt un tour complet plus 1,1 rad et on obtient une valeur de  $a$  supérieure à  $r$ , donc une orbite plus large que l'orbite initiale (contrairement à ce qui est montré sur le schéma).

(6) Il y a une petite confusion ici. La vitesse  $V_e$  sur l'orbite elliptique calculée est celle au point de départ sur celle-ci, au périhélie, et elle convient pour le calcul de  $\Delta v_1$ . Mais pour calculer  $\Delta v_2$  il faut la remplacer par la vitesse  $V_{e2000}$  au point d'arrivée sur l'orbite haute, à l'apogée de l'orbite elliptique. On trouve  $V_{e2000} \approx 6,58 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $\Delta v_2 = V_{c2000} - V_{e2000} \approx 0,32 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ . Par contre la valeur donnée pour le total  $|\Delta v|$  "reorbiting" est correcte (et de même pour le second exemple).

(7) On ne considère donc que des corps assez proches de celui de masse  $m_1$ . De fait les calculs qui suivent ne permettent que de déterminer approximativement la zone d'influence de  $m_1$ . Celle du corps de plus grande masse ne ressemble pas à une sphère.

(8) Pour  $f_1^k$  et  $f_1^p$ , on considère l'accélération du corps de masse  $m_3$  *relativement* au corps de masse  $m_1$ , ce qui revient à se placer dans le repère de centre le corps de masse  $m_1$ . Ainsi  $f_1^k$  est la différence entre l'accélération de  $m_3$  due à l'attraction de  $m_1$  et celle de  $m_1$  due à l'attraction de  $m_3$  (avec un signe + car elles sont de sens opposés). Et de même  $f_1^p$ , la perturbation créée par  $m_2$  est la différence entre les accélérations de  $m_3$  et de  $m_1$  dues à l'attraction de  $m_2$ .

Pour  $f_2^k$  et  $f_2^p$ , on échange les rôles de  $m_1$  et  $m_2$ .

(9) L'énergie potentielle *centripète*. On considère que le système des trois corps est en rotation uniforme autour de son centre de gravité  $O$ . En notant  $\omega$  la vitesse angulaire et  $\vec{d}$  le vecteur d'origine  $O$  et d'extrémité le satellite, la force centrifuge qui s'exerce sur le satellite est alors égale à  $m_3\omega^2\vec{d}$ , et elle dérive du potentiel  $-m_3\omega^2 d^2/2$ .

Pour finir le calcul, on applique cela à la Terre : la force centrifuge  $m_1\omega^2 OT$  équilibre l'attraction solaire  $Gm_1m_2/ST^2$ , d'où  $\omega^2 = \frac{Gm_2}{ST^2 OT} = \frac{G(m_1+m_2)}{ST^3}$ , car  $OT = \frac{m_2}{m_1+m_2} ST$ , et il n'y a plus qu'à remplacer  $\omega^2$  dans l'expression du potentiel.

À noter, la période de rotation est égale à  $2\pi/\omega$  et on retrouve ainsi la version précise de la 3<sup>e</sup> loi de Képler mentionnée note 1, pour l'orbite circulaire.