PLAN D'ATTAQUE

Année 2023 – 2024

Andrea Asumu Masoko, Thomas Baloge, Kelyah Gilardin, Evan Le Roux, Louise Mabilleau,
Leïla Merrer, Léna Mouroux-Pinto Dos Santos,
élèves de Seconde, Première et Terminale

Établissement : Lycée Marguerite de Navarre à Bourges
Enseignant·es : Olivier Créchet, Aurélie Fievez, Nathalie Herminier, Guillaume Pelletier,
Amélie Roche-Hernandez
Chercheurs : Xavier Bultel, Benjamin Nguyen, Loïc Besnier et Amandine Lefebvre,
Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans (LIFO) / INSA Centre Val de Loire

Sommaire

I. Présentation du sujet

On étudie une armée composée d'une générale et d'un nombre inconnu d'officiers et de sous officiers. Cette armée doit attaquer une ville caractérisée par les quatre points cardinaux : nord, sud, est et ouest. On décide que l'attaque va avoir lieu au point nord. La générale a 5 minutes pour diffuser l'information dans son armée. Elle doit informer les officiers mais surtout les sous-officiers car ce sont eux qui dirigent les troupes.

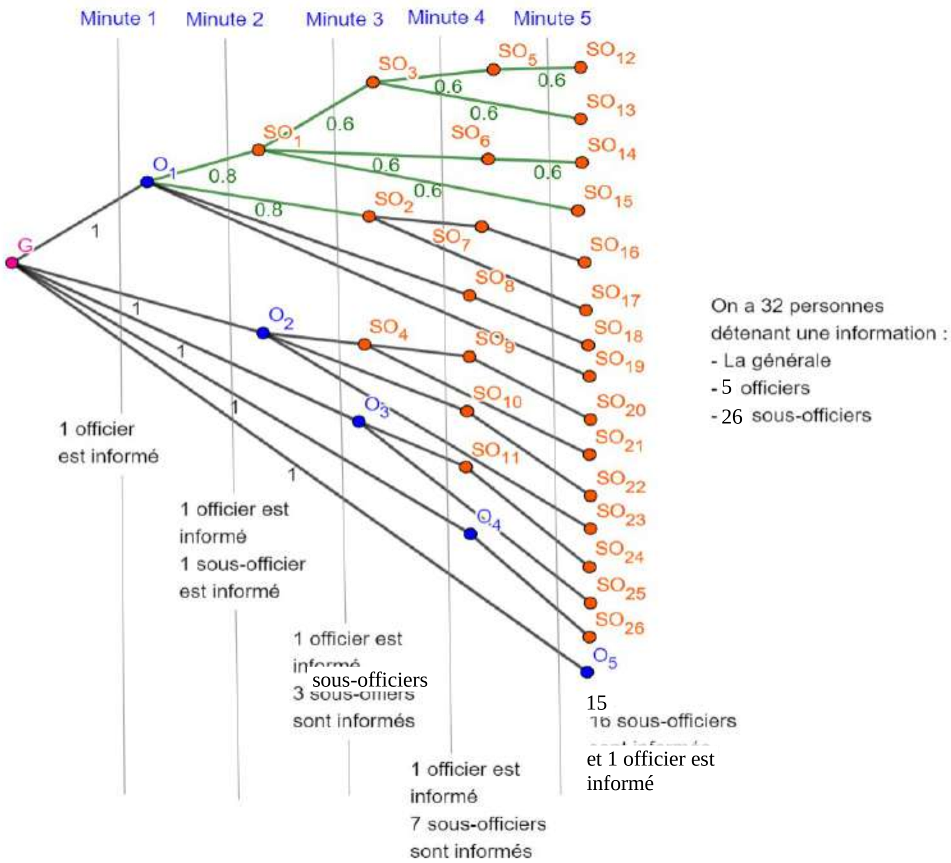
La générale transmet toujours l'information nord. En revanche, les officiers et les sous-officiers peuvent se tromper au moment de la transmission. Ainsi, les officiers n'ont que 80 % de chance de transmettre l'information qu'ils ont reçue et les sous-officiers seulement 60 %.

On cherche donc à transmettre l'information nord au maximum de personnes possibles dans un temps limité de 5 minutes.

<u>Précisions :</u>

– Il n'est pas possible de passer ou recevoir plusieurs appels en même temps.
– Chaque appel dure une minute.

II. Simulation d'un cas possible en 5 minutes



Nous savons qu'à la minute 0, seule la générale sait par quel point cardinal, l'armée doit attaquer la ville ennemie.

Lors de son premier appel, la générale informe une personne, une minute s'est écoulée jusqu'à présent. Durant la seconde minute, la générale et la personne informée précédemment appellent une nouvelle personne chacune. Quatre personnes sont donc informées à ce moment. Ce processus se répète pour les minutes 3, 4, et 5. Le nombre de personnes informées passe de 4 à 8 puis de 8 à 16 et enfin de 16 à 32.

À cet instant, nous nous rendons compte que le nombre de personnes informées correspond aux puissances de 2. Nous trouvons donc la formule 2^n, n étant le nombre de minutes écoulées depuis le début des transmissions.

On obtient donc pour :

2^0 : 1 générale informée.

2^1 : 2 personnes informées.

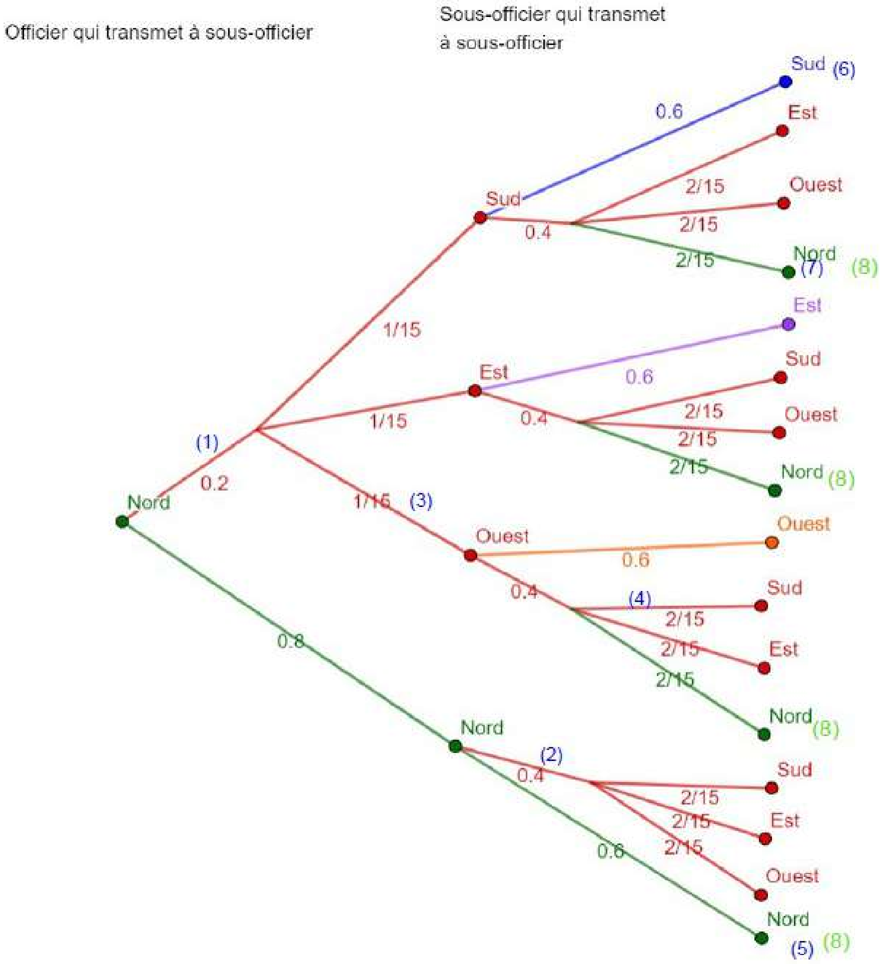
2^2 : 4 personnes informées.

2^3 : 8 personnes informées.

2^4 : 16 personnes informées.

2^5 : 32 personnes informées.

III. Exemple en 2 minutes



Cet arbre est un modèle de la transmission de l'information sur deux minutes. Un officier transmet l'information qu'il a reçu de la générale à un sous-officier qui va lui-même la transmettre à un sous-officier.

On va définir l'information correcte comme étant Nord.

On rappelle qu'un officier a 20% (1) de chances de donner une information autre que celle qu'il a reçue en transmettant l'information, et un sous-officier en a lui, 40% (2)

Lorsqu'une personne ne transmet pas l'information qu'elle a reçue, il y a trois autres informations qui peuvent être transmises. Si la personne a reçu la bonne information Nord mais qu'elle se trompe dans la transmission, elle peut donner Sud, Est, ou Ouest à la personne suivante. Cela arrive aussi bien pour les officiers que pour les sous-officiers. Avec des chiffres, on obtient donc pour les officiers une probabilité de $\frac{0,2}{3}=\frac{1}{15}$ de transmettre une des trois informations fausses (3). Pour les sous-officiers on a $\frac{0,4}{3}=\frac{2}{15}$ de transmettre une des trois informations fausses (4) (voir schéma précédent).

Sur le schéma ci-dessus, on observe différentes situations. On a d'abord un cas idéal où la bonne information est transmise deux fois d'affilé, soit $0,8\times0,6=0,48$ (5).

On a ensuite le cas inverse où la même mauvaise information est transmise deux fois d'affilé (6). Par exemple, un officier a reçu Nord et il transmet Sud au sous-officier qui va lui-même retransmettre sud. Dans l'arbre ci-dessous, ce type de cas apparaît trois fois. On a $\frac{1}{15}\times 0{,}6=0{,}04$ pour chaque cas où cela arrive, et donc la probabilité que le deuxième sous-officier ait la mauvaise information suite à ce schéma-là est de $0{,}04\times 3=0{,}12$.
Enfin, on a un troisième cas qui s'avère bénéfique, c'est lorsque l'officier se trompe et que le sous-officier se trompe à nouveau. Dans ce cas-là il est donc possible de revenir à la bonne information après s'être trompé deux fois d'affilé (7). Pour chaque branche on a $0{,}8\times(\frac{2}{15})=\frac{8}{75}$. Dans notre arbre, ce cas a lieu trois fois, et la probabilité que le deuxième sous-officier ait l'information Nord selon ce schéma est donc de $\frac{8}{75}\times 3=0{,}32$.

Cependant, l'objectif de notre sujet est de calculer la probabilité finale de recevoir l'information Nord. Pour cela, on additionne la probabilité finale de chaque branche où apparaît Nord (8) et on obtient $0{,}8\times 0{,}6+3\times(\frac{1}{15})\times(\frac{2}{15})=0{,}506$ que le deuxième sous-officier ait l'information nord comme information finale.

Ce schéma fonctionne avec n'importe quel nombre de minutes mais est long à construire. On conjecture donc que plus le temps représenté est long, plus la probabilité d'obtenir l'information Nord est faible. (1)

IV. Étude du temps

Après avoir étudié la transmission en 5 minutes, nous avons voulu l'étudier sans limite de temps de manière à ne pas être limités pour comprendre le mécanisme. Nous pouvions donc préalablement définir un nombre d'officiers et de sous officiers à informer. Ainsi nous avons cherché un moyen de calculer le temps minimum pour que tous les membres soient informés. Tout cela en partant du principe que la générale appelle un officier par minute, sauf si le nombre d'officiers est trop élevé pour qu'ils soient tous informés dans le temps nécessaire, dans ce cas ils seront appelés par d'autres officiers. Ensuite les officiers appellent des sous officiers dès lors qu'ils ont une information et les sous officiers font de même avec ceux de leur grade.

À l'origine, de nombreuses formules ont été réalisées, **elles sont disponibles dans l'annexe à la fin de l'article.** Elles séparaient le temps où les officiers étaient informés mais aussi le grade d'où provenait l'information. Puis une suite permettait de calculer le nombre total de sous officiers informés à chaque minute. Son avantage était de pouvoir suivre le nombre de personnes informées sur chaque minute du processus et de connaître leur grade.

Nous nous sommes aperçus qu'une seule donnée était suffisante pour trouver le temps d'une opération. Nous devions seulement retenir le fait que à chaque minute le nombre de personnes informées double par rapport à la minute précédente. Ainsi on peut poser la propriété :

Nombre de personnes informées = 2^n avec n le nombre de minutes.

Par exemple, en 5 minutes, 2^5 personnes sont informées soit 32 personnes en tout, comme sur notre arbre.

Cela peut alors nous permettre de trouver le temps d'une opération avec un nombre défini de personnes à informer ou inversement, savoir combien de personnes peuvent être informées au maximum dans un temps limité.

Nous avons grâce à cela remarqué que l'officier qui est informé à la dernière minute, lors de nos 5 minutes est inutile puisqu'il n'informe personne d'autre. Il faut privilégier les sous-officiers puisqu'ils dirigent les troupes alors que les officiers se déplacent seuls. Ainsi l'armée doit plutôt être composée de n-1 officiers pour maximiser le nombre de sous officiers. **Ici, pour 5 minutes, nous aurions besoin de 4 officiers pour optimiser notre transmission.**

Nous pouvons ainsi donner une importance à la donnée du temps et malgré des recherches qui se sont révélées peu utiles dans nos besoins, elles restent de toute façon pertinentes.

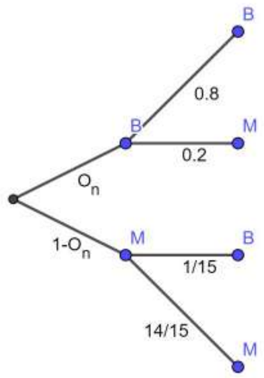
V. Mise en place de suites pour les chaînes de même grade (2)

1. Définitions des chaînes

Afin de faciliter les calculs lors de la présence de multiples individus nous avons cherché des suites. Nous nous sommes rendus compte que celles-ci devaient être arithmético-géométriques, explicable par le fait qu'une erreur puisse éventuellement ramener à une réussite.

On considère l'arbre suivant où :

- O_n représente la probabilité que l'officier de rang « n » ait la bonne information
- B l'évènement l'information transmise est bonne
- M l'évènement l'information transmise est mauvaise



$$
\begin{aligned}
O_{n+1} &= O_n \times 0{,}8 + (1 - O_n) \times \frac{1}{15} \\
&= O_n \times 0{,}8 + (-O_n) \times \frac{1}{15} + \frac{1}{15} \\
&= O_n \times (0{,}8 - \frac{1}{15}) + \frac{1}{15} \\
&= O_n \times (\frac{4}{5} - \frac{1}{15}) + \frac{1}{15} \\
&= O_n \times (\frac{12}{15} - \frac{1}{15}) + \frac{1}{15} \\
&= O_n \times \frac{11}{15} + \frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

Nous avons donc la formule par récurrence de notre suite, mais cela ne facilite pas encore nos calculs, pour résoudre ce problème il nous faut trouver la formule explicite. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\times\frac{11}{15}+\frac{1}{15}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$O_{n+1}=f(O_n)=O_n\times\frac{11}{15}+\frac{1}{15}.$$

On cherche donc le point fixe de notre suite, c'est à dire la solution de l'équation $f(x)=x$.

$$\begin{aligned}
&f(x)=x\\
&x\times\frac{11}{15}+\frac{1}{15}=x\\
&\frac{1}{15}=x-\frac{11}{15}\times x\\
&\frac{1}{15}=\frac{4}{15}\times x\\
&\frac{1}{15}\times\frac{15}{4}=x\\
&\frac{1}{4}=x
\end{aligned}$$

Le point fixe de notre suite est $\frac{1}{4}$ nous allons donc pouvoir passer par une suite secondaire (v_n) définie par $v_n=O_n-\frac{1}{4}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

D'où

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= O_{n+1}-\frac{1}{4}\\
&= O_n\times\frac{11}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{4}\\
&= (v_n+\frac{1}{4})\times\frac{11}{15}-\frac{11}{60}\\
&= v_n\times\frac{11}{15}+\frac{11}{60}-\frac{11}{60}\\
&= v_n\times\frac{11}{15}
\end{aligned}$$

(v_n) étant géométrique, il est facile de trouver sa formule explicite $v_n=v_0\times(\frac{11}{15})^n$.

de plus

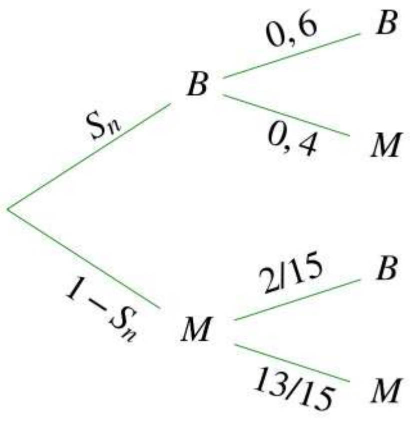
$$\begin{aligned}
v_0 &= O_0-\frac{1}{4}\\
&= \frac{4}{5}-\frac{1}{4}\\
&= \frac{16}{20}-\frac{5}{20}\\
&= \frac{11}{20}
\end{aligned}$$

Afin de trouver O_n , nous écrivons $O_n = v_n + \frac{1}{4}$. Et nous obtenons $O_n = \frac{11}{20} \times \left(\frac{11}{15}\right)^n + \frac{1}{4}$. (1)

Cette chaîne nous permet donc de connaître la probabilité qu'un officier de rang « n » ait la bonne information.

Nous allons utiliser la même technique pour les sous-officiers, en voici les différentes étapes :
Avec l'arbre, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_{n+1} = S_n \times 0{,}6 + (1 - S_n) \times \frac{2}{15}$$



soit $S_{n+1} = \frac{7}{15} S_n + \frac{2}{15}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = S_n - \frac{1}{4}$ notre suite (w_n) secondaire. On a

$$w_{n+1} = S_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{7}{15} S_n + \frac{2}{15} - \frac{1}{4}$$

d'où

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{7}{15}\left(w_n + \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{15} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{15} w_n + \frac{7}{15} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{15} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{15} w_n + \frac{7}{60} + \frac{8}{60} - \frac{15}{60} \\ &= \frac{7}{15} w_n \end{aligned}$$

.

(w_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$ et de premier terme $w_0 = S_0 - \frac{1}{4}$. Ainsi nous obtenons l'expression explicite de S_n :

$$S_n = \left(S_0 - \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{7}{15}\right)^n + \frac{1}{4} \quad (2)$$

La valeur de S_0 sera remplacée par la dernière valeur du terme de la suite (O_n).

2. La succession des chaînes

On considère une chaîne d'officiers suivi de sous-officiers :

$$O_0 \to O_1 \to \ldots \to O_n \to S_0 \to S_1 \to \ldots \to S_p$$

- Nous remarquons tout d'abord que nous pouvons calculer une première chaîne d'officiers et remplacer S_0 par O_{n+1} car ce qui influe la qualité de l'information n'est que l'émetteur et non le récepteur.

Ainsi avec nos deux formules (1) et (2), nous sommes en mesure de calculer la probabilité que chaque soldat reçoive la bonne information.

- Enfin, nous effectuons les limites de nos suites vers l'infini afin de voir comment celles-ci évoluent.

$\lim\limits_{n \to +\infty} O_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{11}{20} \times \left(\frac{11}{15}\right)^n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ puisque $\frac{11}{15}$ compris entre 0 et 1 et donc $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{11}{15}\right)^n = 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(S_0 - \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{7}{15}\right)^n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ puisque $\frac{7}{15}$ est compris entre 0 et 1 et donc $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{7}{15}\right)^n = 0$.

Après le calcul des limites, nous arrivons à la conclusion que celles-ci sont pareilles. Nous en déduisons qu'à l'infini, le grade des membres de ces suites d'informations importe peu car au final nous nous en remettons au hasard (1 chance sur 4 d'avoir la bonne information).

Nous pouvons donc maintenant calculer n'importe quelle branche de notre arbre pour n'importe quelle durée, cela pourrait donc permettre la création d'un programme en python permettant de calculer la probabilité d'obtenir la bonne information, permettant ainsi de faciliter les cas concrets car dans la réalité les chaînes sont finies.

VI. Conclusion

Nous avons donc cherché à calculer la probabilité finale de recevoir la bonne information. Cette dernière est représentée par l'un des quatre points cardinaux,celui choisi étant nord. Pour trouver la solution, nous avons simulé la situation à l'aide d'un arbre puis nous avons mis au point deux suites arithmético-géométriques qui permettent d'effectuer les calculs dans tous les cas. Pour approfondir le sujet, on a imaginé un cas où le temps est illimité afin de pouvoir calculer le temps minimum, qu'il faudrait prévoir pour que tout le monde soit informé. Après de nombreuses tentatives, nous sommes parvenus à trouver une formule pour calculer le nombre total de sous officiers informés par minute. Cela nous a permis de corriger notre schéma de transmission pour pouvoir optimiser le transfert en faisant bon usage du temps.

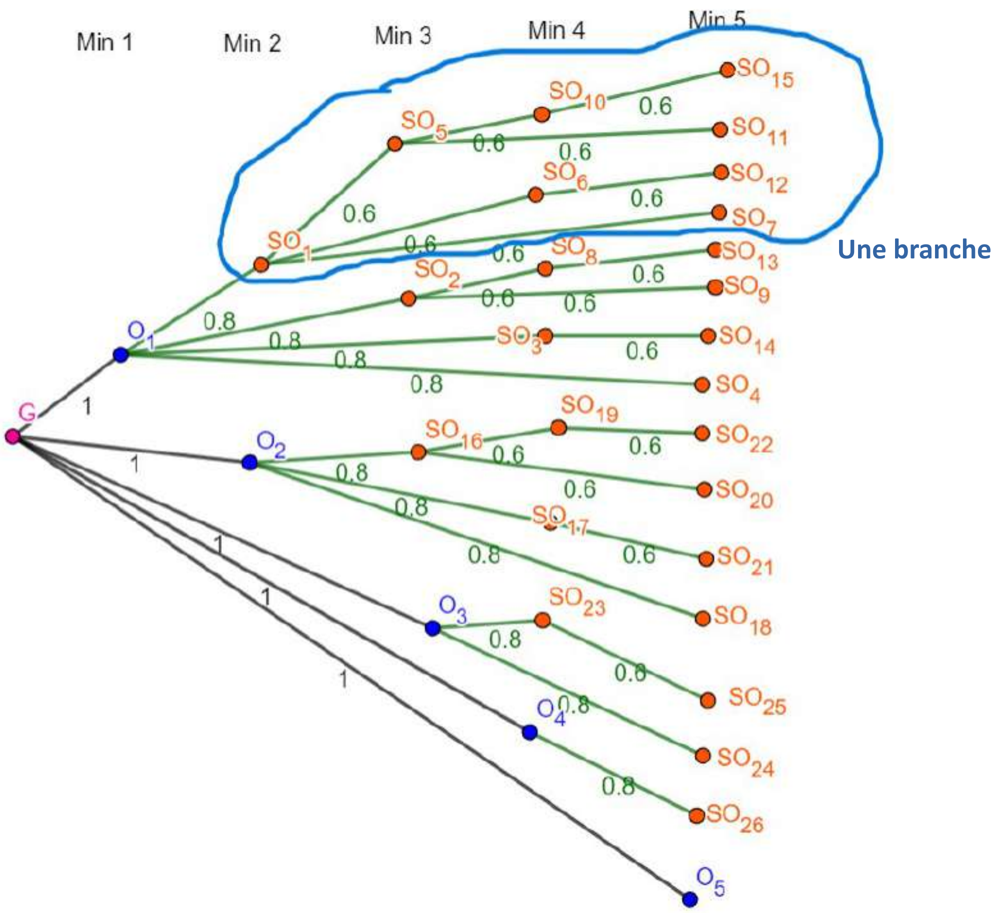
VII. Annexe

Dans le cas où on ne se fixe pas de limite de temps, avec un nombre défini d'officiers O, et de sous-officiers S on va calculer le temps d'une opération afin que tous soient informés. On va calculer le temps T lors de 2 parties distinctes : le temps pendant lequel la générale informe les officiers puis lorsqu'ils sont tous informés.

La générale appelle 1 officier par minute puis s'arrête une fois qu'elle les a tous appelés, chaque personne informée appelle à son tour à la minute suivante.

1. Le temps d'appel des officiers

Puisque la générale appelle 1 officier par minute, $T \geq O$, le nombre d'officiers.



– <u>Pendant la période où $T = O$</u>, le premier officier est informé une minute après le début donc dans le temps restant il informe $O-1$ sous-officiers, ainsi de suite pour chaque officier qui informera $O-m$ sous-officiers, où m est la minute où il est informé. Le dernier n'informera personne, le précédent 1... jusqu'à $O-1$.

Pour calculer **le nombre SI_1 d'officiers informés par les officiers** pendant cette période (jusqu'à ce que tous les officiers soient informés) on trouve la somme des premiers entiers naturels jusqu'à $O-1$: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Soit la formule $\mathbf{SI_1=O(O-1)/2.}$

Exemple : On définit O=5 et S=189, on veut calculer le temps de transmission. On commence par trouver le nombre de sous-officiers informés quand T=O soit 5 minutes.
Le premier officier aura 4 minutes soit 4 sous-officiers, celui d'après 3, puis 2, puis 1.
Donc SI_1= 1+2+3+4 = 5×(5-1)/2 = 20/2 = 10 sous-officiers informés par les officiers en 5 minutes.

– **On va donc maintenant s'intéresser au nombre SI_2 de sous-officiers informés par des sous-officiers eux-mêmes dans cette période où T = O**. En se basant sur l'arbre pondéré montrant la transmission en 5 minutes, on observe les chemins verts situés après les premiers sous-officiers informés (par chaque officier).

- Le tout premier sera le seul à en informer 3, puis 2 peuvent en informer 2 et 4 peuvent en informer 1.
- Pour celui informé par le 2e officier, on voit qu'un seul peut en informer 2 et 2 peuvent en informer 1.
- Enfin, celui informé par le troisième officier peut en informer 1.

On peut ainsi généraliser en disant qu'à chaque minute entre 2 et O, on a $(O-n) \times 2^{n-2}$ sous –officiers informés où n est le nombre de minutes écoulées depuis le début.

Ainsi, le nombre pour chaque branche sera égal à la somme des sous-officiers informés pour chaque minute. SI_2 est égal à la somme des branches partant de chaque sous-officier informé en premier par un officier.

– **Le nombre SI de sous-officiers informés** quand T=O est égal à **$SI = SI_1 + SI_2$ (soit le nombre de sous officiers informés peu importe le grade d'où provient l'information).** (3)

- Pour le premier sous-officier informé à la 2eme minute on a :

$(5 – 2) \times 2^0 + (5 – 3) \times 2^1 + (5 – 4) \times 2^2 + (5 - 5) \times 2^3$ = 3×1+2×2+1×4 = 11 sous-officiers issus de la branche du 1er sous-officier.

- Pour le deuxième sous-officier informé par un officier à la 3ème minute, on commence à

O-3 : $(5 – 3) \times 2^0 + (5 – 4) \times 2^1$ = 2×1+1×2 = 4 sous-officiers.

- Enfin pour le sous-officier issu du troisième officier on a, en commençant à O-4 :

$(5 – 4) \times 2^0$ = 1×1=1 sous-officier informé.

Donc SI_2=11+4+1=16 sous-officiers informés par les sous-officiers eux-mêmes.

Enfin SI=10+16=26 sous-officiers informés en 5 minutes.

-– **Si $SI \geq S$ alors T=O** sinon on doit calculer le nombre de sous-officiers informés à chaque minute à la suite.
Dans notre cas 26 < 189 donc T > 5 minutes.

Après $T = O$ (cas où $SI < S$)

Après cela, chaque personne informée informe à son tour donc le nombre de personnes informées double à chaque minute soit une augmentation de 2^t . **Donc à chaque minute le nombre de sous-officiers informés est égal au nombre de sous-officiers informés à la minute précédente plus le nombre total de personnes informées N, à T=O, qui double.** On peut donc généraliser cela sous la forme d'une suite U_t qui permet de savoir le nombre total de sous-officiers informés à chaque minute t après $T=O$ et de la comparer au nombre de sous-officiers devant recevoir un appel.

$$U_{t+1} = U_t + N\times 2^t \quad \text{avec } N=O+SI \text{ et } U_0=SI.$$

Ici $N=O+SI=5+26=31$ et $U_0=26$.

Donc

$U_1=U_0+31*2^0 = 26+31*1=57 < 189$

$U_2= U_1+31*2^1 = 57+31*2=57+62=119 < 189$

$U_3= U_2 +31*2^2 = 119+31*4=119+124=243 > 189$

Lorsque $U_t \geq S$ on s'arrête de calculer et on cherche le temps final :

$\boldsymbol{T=O+t}$ et on a le temps de la transmission.

Ici il nous aura fallu 3 minutes après avoir informé tous les officiers les 5 premières minutes donc : $T=5+3=8$ minutes de transmission pour que tous soient informés.

Notes d'édition

(1) Une autre question intéressante : combien a-t-on en moyenne de personnes ayant reçu la bonne information ?

(2) On pourrait se contenter des chaînes de sous-officiers issues d'un officier, puisque la générale informe les officiers, qui n'informent que des sous-officiers.

(3) On sait déjà qu'il y a 2^n personnes informées après n minutes ; on a aussi le nombre d'officiers : on peut donc ne pas faire ce calcul pour les sous-officiers.