Petit carré deviendra grand

Année 2023 – 2024

Yanis Khiat (seconde) ; Lisa Pouget (première) ; Emma Petit, Sarah Capron, Thomas Bricout, Rachel Rezgui, Noé Belan, Valentine Mouy, Killian Legezynski (terminale)

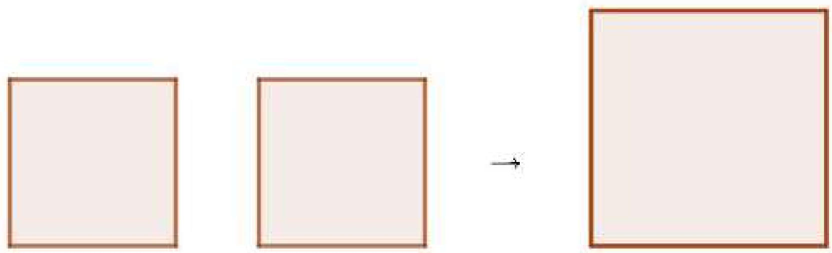
Établissement(s) : Lycée Jean-Baptiste Corot, Douai

Enseignantes : Claire De Backer, Claire De Vittori

Chercheur : Mamadou N'diaye, Université Polytechnique Hauts de France.

1. Présentation du sujet

Le problème consiste à assembler n carrés de surface 1 pour en former un seul dont la surface est n (la somme des surfaces des petits carrés). On commence par deux carrés, puis trois carrés …



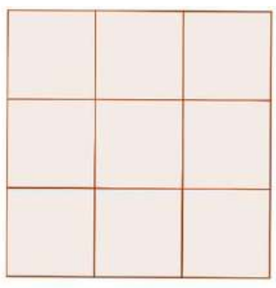
2. Résultats

Nous commençons par des cas évidents ou faciles. Nous avons trouvé des méthodes dans le cas particulier des nombres de la forme n^2+1, nous avons observé comment, par découpage, passer d'un carré au carré d'aire double ou moitié du carré de départ. Et nous terminons par une méthode permettant de construire, par découpage de deux carrés déjà faits, un carré dont l'aire est la somme des aires des deux carrés de départ.

3. Texte de l'article.

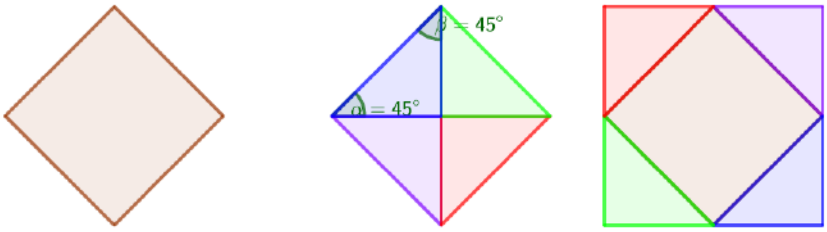
Cas évidents

Il y a un ensemble de nombres pour lesquels il est inutile de découper pour former un plus grand carré : les nombres carrés ($4, 9, 16, 25, 36$,…). Il suffit de les assembler et de les mettre côte à côte.



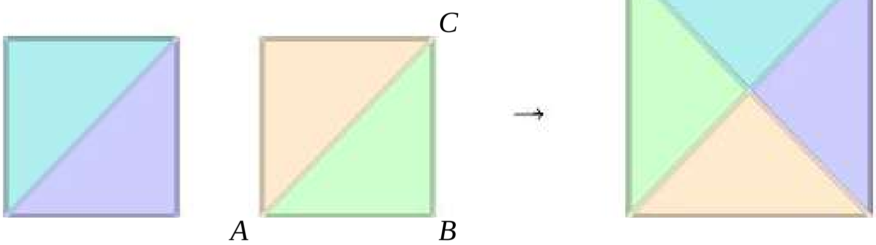
Solutions pour 2 (3 façons)

<u>Première façon : on coupe un des deux carrés suivant les deux diagonales</u>



Chaque demi-diagonale est le côté d'un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse mesure 1 donc chaque demi-diagonale mesure $1\times\cos(45°)$ ce qui correspond à la moitié de racine carrée de 2.
La figure finale obtenue a bien quatre angles droits puisque les diagonales d'un carré se coupent en formant quatre angles droits .
$45°+90°+45°=180°$ donc les triangles découpés replacés autour du premier carré s'alignent bien et la longueur de chaque côté est bien la racine carrée de 2.

<u>Deuxième façon : on coupe les deux carrés selon une diagonale</u>

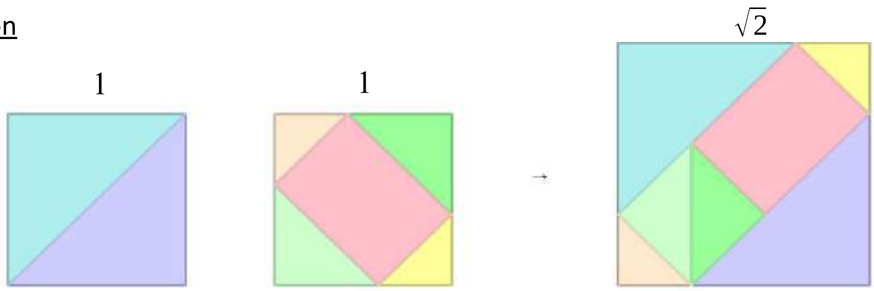


D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle ABC rectangle en B :

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2+AB^2 \\ &= 1^2+1^2 \\ &= 2 \\ AC &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

L'hypoténuse AC, qui est la diagonale des carrés de côté 1, est égale au côté du carré $\sqrt{2}$.

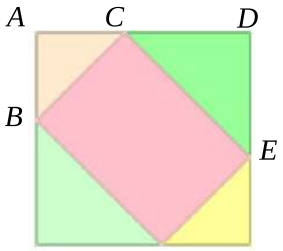
<u>Troisième façon</u>

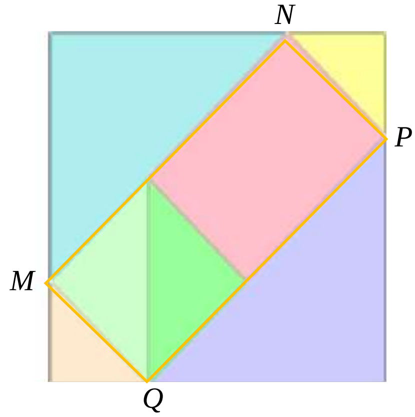


Le premier carré a été coupé en diagonale.
Le deuxième carré a été découpé en un rectangle et deux couples de triangles rectangles isocèles superposables.

Pour pouvoir compléter le côté du grand carré de côté $\sqrt{2}$:

- Le triangle jaune a pour côté de l'angle droit $\sqrt{2}-1$
- Le triangle vert a pour côté de l'angle droit $1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$.





Pour vérifier que le découpage est correct, il faut vérifier que

- $MN=BC+CE$ donc que la somme des côtés BC et CE est égale à $\sqrt{2}$.
- $MQ=BC=CD$.

Pour cela, nous utilisons le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A, de manière à trouver l'hypoténuse BC :

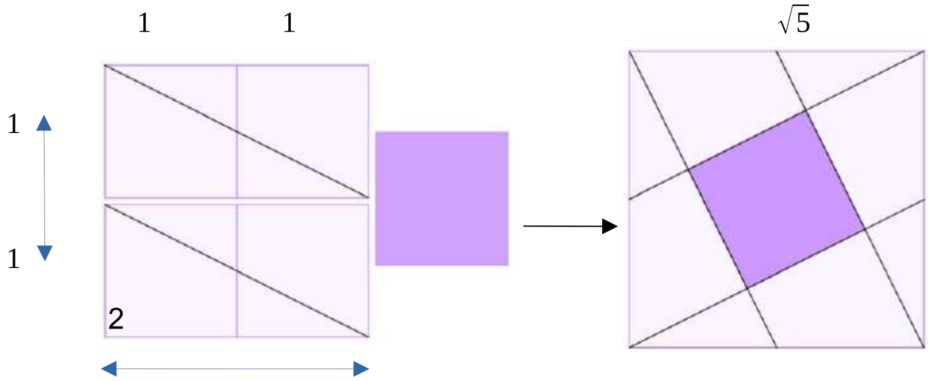
$$\begin{aligned}
CB^2 &= CA^2+AB^2\\
&= (\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}-1)^2\\
&= 6-4\sqrt{2}\\
CB &= 2-\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Puis,nous utilisons à nouveau le théorème de Pythagore dans le triangle CDE rectangle en D, afin de trouver l'hypoténuse CE (la figure n'est pas à la même échelle que la précédente) :

$$\begin{aligned}
EC^2 &= DC^2+DE^2\\
&= \left(1-(\sqrt{2}-1)\right)^2+\left(1-(\sqrt{2}-1)\right)^2\\
&= 12-8\sqrt{2}\\
EC &= \sqrt{12-8\sqrt{2}}\\
&= -2+2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Ainsi : $EC+CB=\sqrt{2}=MN$ et $BC=CD$.

Solution pour 5 et généralisation à n^2+1



Avec 5 carrés de côté 1, on cherche un carré de côté $\sqrt{5}$, on découpe deux carrés selon la diagonale du rectangle formé.

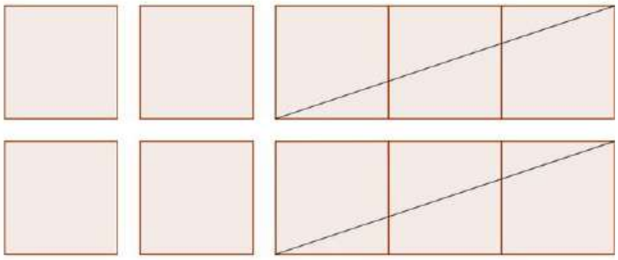
D'après le théorème de Pythagore, cette diagonale mesure $\sqrt{5}$.
On place les quatre demi-rectangles autour du carré restant.

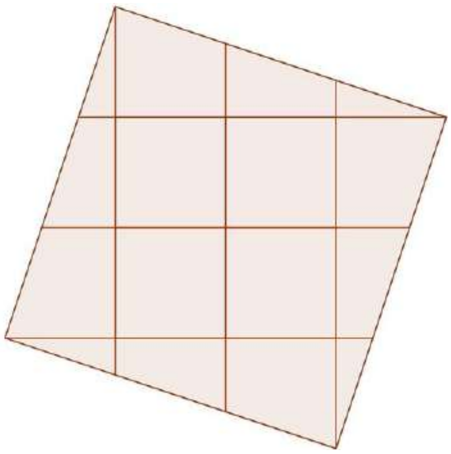
On a utilisé le fait que $5=2^2+1$, donc nous généralisons cette méthode à tout nombre de la forme n^2+1.

Généralisation à n^2+1 carrés

Lorsqu'on a n^2+1 carrés, on forme 2 groupes de n carrés que l'on va aligner et on les découpe selon la diagonale du rectangle formé. Il nous restera $(n-1)^2$ carré(s) qui servira(ont) de base à la figure, placé(s) au centre.

Pour 10 carrés



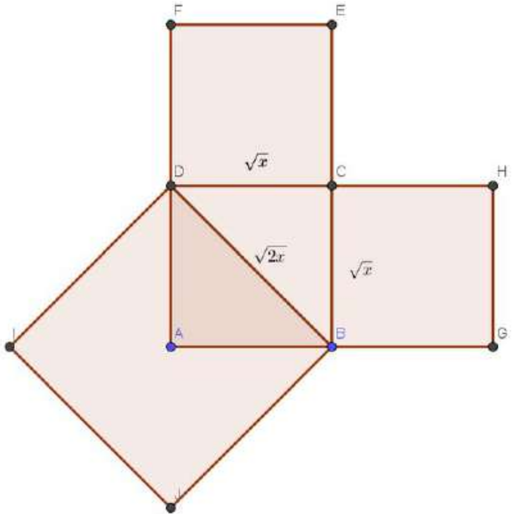


Généralisation à double et moitié

Double

x est un nombre entier naturel.
On suppose qu'on peut faire un carré de côté $\sqrt{x}$: c'est-à-dire qu'on a construit un carré avec x petits carrés de côté 1.
Si l'on prend ce même carré et qu'on le découpe suivant sa diagonale, on obtient deux triangles rectangles ayant une hypoténuse égale à $\sqrt{2x}$ et ayant une aire égale à la moitié de notre carré de départ.

En effet :



D’après le théorème de Pythagore dans le triangle BCD rectangle en C :

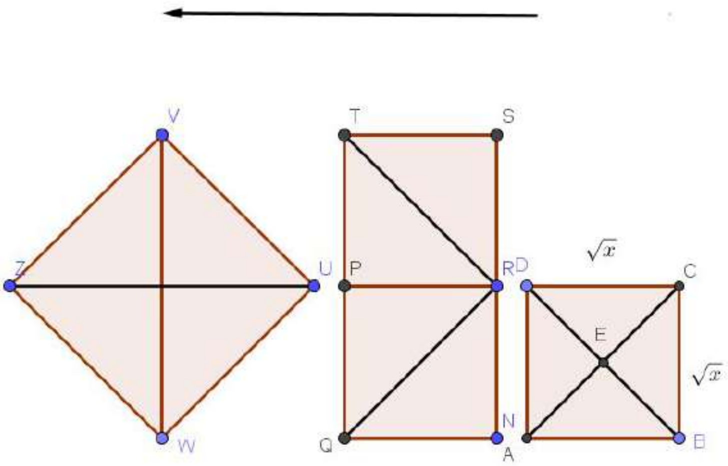
$$DC^2+CB^2=DB^2$$

Ce qui veut dire que si on additionne les carrés des cotés DC et CB on obtient le carré du coté DB.
Nous savons que $DC^2=\sqrt{2}=x$.
Ainsi que $CB^2=\sqrt{2}=x$.
Nous pouvons donc conclure que

$$DB^2=2x$$

et donc que $DB=\sqrt{2x}$.

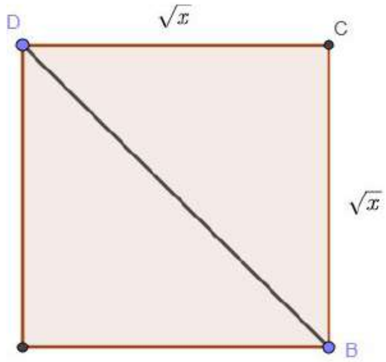
Pour doubler.



Carré de départ.

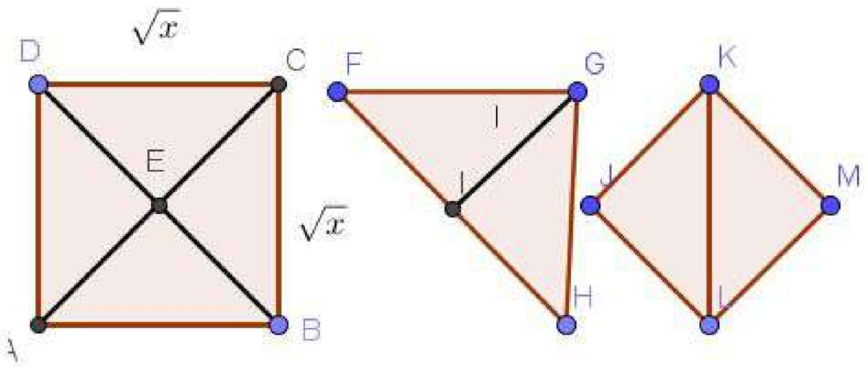
On prend x un nombre pair.
On prend deux carrés de côté $\sqrt{x}$: les deux carrés d’aire x font à eux deux une aire de $2x$.
On découpe ces deux carrés suivant leur diagonale afin d’obtenir 4 triangles égaux.
On obtient un carré d’aire $2x$ (c’est-à-dire deux fois plus grand que notre carré de base) en assemblant ces 4 triangles

Moitié



Si l’on prend le triangle BCD et qu’on le coupe en deux triangles égaux, nous obtenons 2 triangles rectangles ayant tous deux, une aire de $x/2$.

Si l’on prend ces 2 triangles et qu’on les assemble (figure ci-dessous), on obtient un carré d’aire $x/2$ et donc on obtient un carré avec une aire deux fois plus petite que celle de notre carré de base.



Carré de départ.

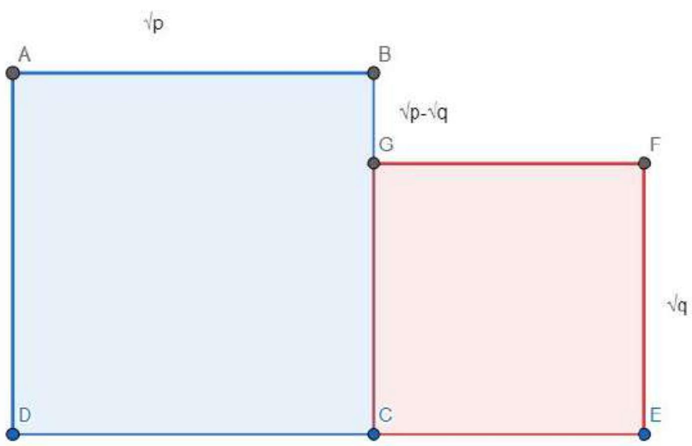
Généralisation à $p+q$

On souhaite faire un carré d'aire $p+q$. On suppose que l'on peut utiliser deux carrés d'aires respectives p et q, tous les deux formés à partir de p ou q carrés d'aire 1.

On suppose que $p \geq q$. Si $p=q$, le carré sera d'aire $2p$, et on sera dans le cas double.

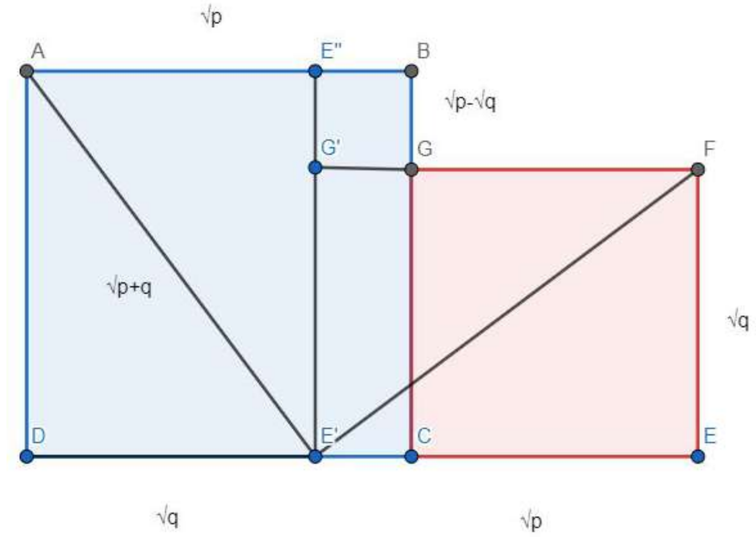
On prend : $ABCD$, carré d'aire p et de côté $\sqrt{p}$ et $CEFG$, carré d'aire q et de côté $\sqrt{q}$.

On les place côte à côte, de sorte que C, G et B soient alignés dans cet ordre, ainsi que D, C et E.
On suppose que $p>q$.



On obtient $BG = BC - CG = \sqrt{p} - \sqrt{q}$.

Ensuite, on reporte la longueur CE (= $\sqrt{q}$) sur le segment DC (= $\sqrt{p}$), afin d'avoir $DE'=CE=\sqrt{q}$.
On reporte DE' sur AB, afin d'avoir $E''BGG'$.
On trace le segment $E'E''$, sur lequel on reporte la longueur BG, afin d'obtenir $E''G'=BG=\sqrt{p}-\sqrt{q}$.
On se retrouve avec $E''B=AB-AE'=\sqrt{p}-\sqrt{q}=G'G$.

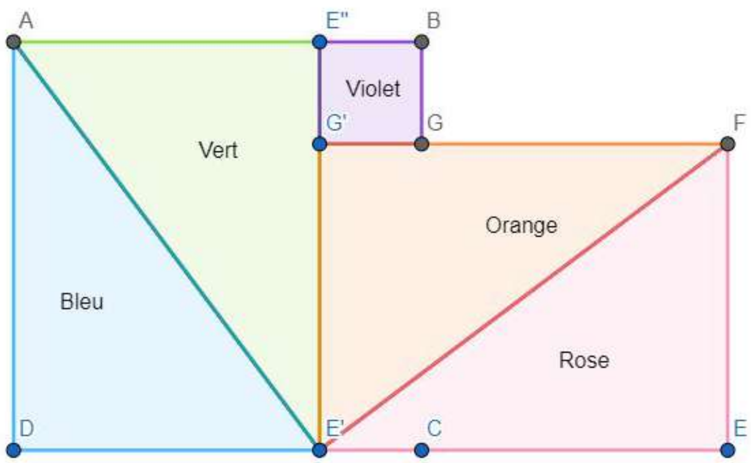


On se retrouve avec :

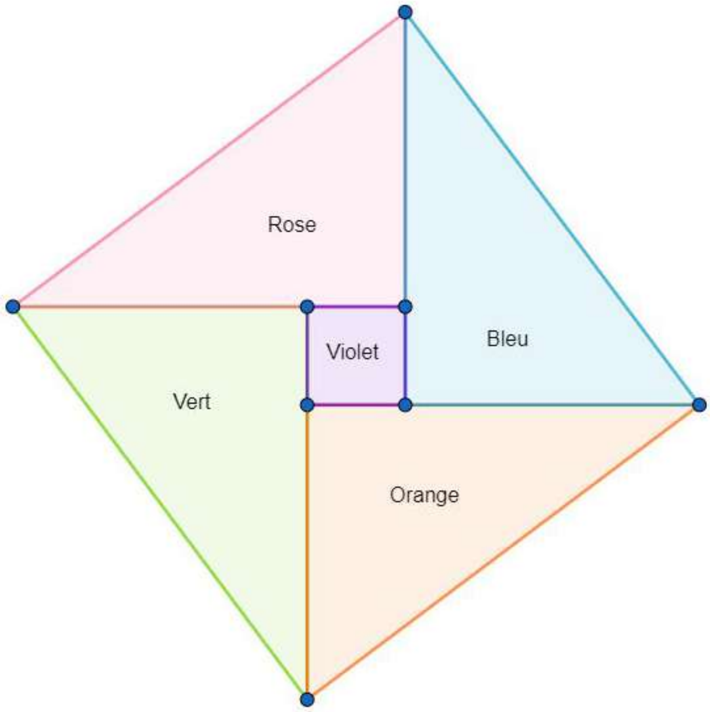
- Le carré $E''BGG'$ de côté $\sqrt{p}-\sqrt{q}$.
- Le rectangle $AE''E'D$ de longueur $\sqrt{p}$ et de largeur $\sqrt{q}$.
- Le rectangle $E'EFG'$ de longueur $\sqrt{p}$ et de largeur $\sqrt{q}$.

On trace les diagonales AE' et $E'F$ afin d'obtenir 4 triangles rectangles :

- Le triangle $AE'D$ rectangle en D où $AD=\sqrt{p}$, $DE'=\sqrt{q}$ et $AE'=\sqrt{AD^2+DE'^2}=\sqrt{\sqrt{p}^2+\sqrt{q}^2}=\sqrt{p+q}$.
- Le triangle $AE'E''$ rectangle en E'' où $E'E''=\sqrt{p}$, $AE''=\sqrt{q}$ et $AE'=\sqrt{p+q}$.
- Le triangle FEE' rectangle en E où $EE'=\sqrt{p}$, $FE=\sqrt{q}$ et $FE'=\sqrt{EE'^2+FE^2}=\sqrt{\sqrt{p}^2+\sqrt{q}^2}=\sqrt{p+q}$.
- Le triangle $FE'G'$ rectangle en G' où $FG'=\sqrt{p}$, $G'E'=\sqrt{q}$ et $AE'=\sqrt{p+q}$.



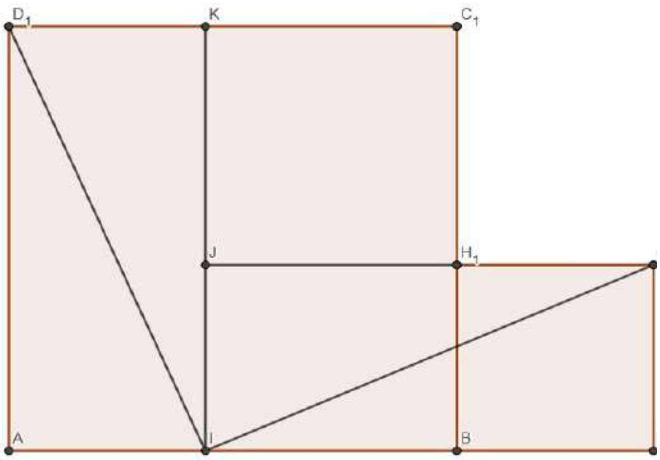
On déplace enfin les triangles rose et bleu (en faisant une translation) afin que AB et $E'E$ soient confondus et que GF et DE' soient confondus.



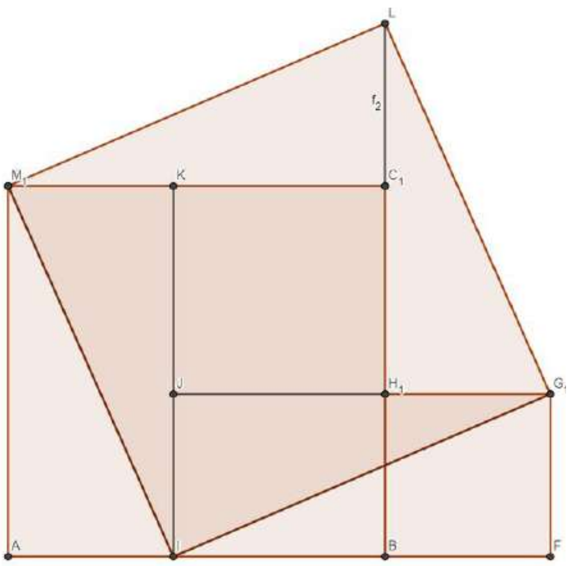
Ainsi, le côté du carré est égal à l'hypoténuse des triangles rectangles, qui valent $\sqrt{p+q}$, donc l'aire du carré est égale à $(\sqrt{p+q})^2$, soit $p+q$.

Conclusion et défi

Nous nous sommes lancé un défi : réussir à faire un carré de 431 petits carrés avec le moins de découpages possible. On a d'abord cherché quels sont les carrés parfaits qui pourraient composer le carré 431, nous avons trouvé 400 (20×20) et il nous reste donc 31. On s'est dit que 31 pouvait être composé de $26+5$. Or 26 et 5 sont des cas pour lesquels on peut trouver n tel que n^2+1 soit le nombre cherché : $5=2^2+1$ et $26=5^2+1$ (1).



<u>1ère étape :</u> On pose les deux carrés de 5 (BFG_1H_1) et 26 (ABC_1D_1) côte à côte.
On reporte la longueur du petit carré (racine de 5) sur le côté du grand carré (comme sur le schéma) et on obtient un point que l'on appellera P. On crée deux segments qui forment un angle droit en P afin d'avoir deux triangles rectangles égaux.



2ème étape : On déplace nos deux triangles rectangles sur la figure afin de former un carré.

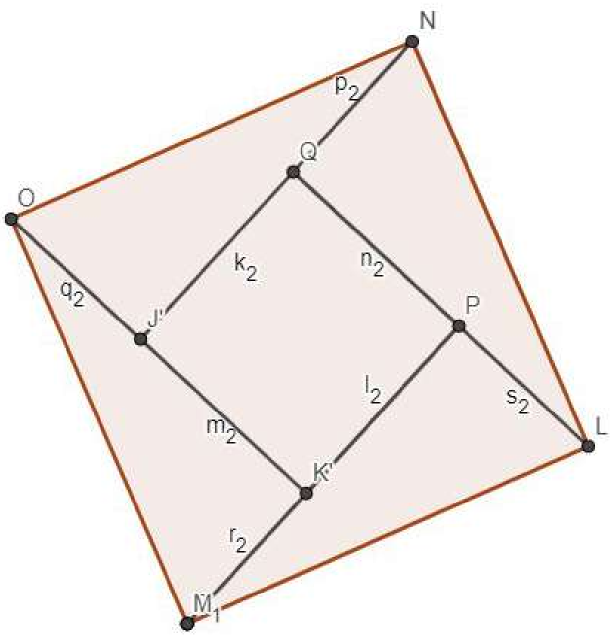


Figure Finale :On obtient un carré d'aire 31

On répète l'opération à l'identique pour $400+31$ avec le carré de 31 et un carré de 400 (de côté 20).

Note d'édition

(1) On peut d'abord conclure, avec la construction pour réunir deux carrés de surfaces p et q, que l'on peut construire des carrés de n'importe quelle surface entière à partir de carrés de surface 1.

Pour le "défi", comme le carré de surface n^2 ne nécessite pas de découpage, il est naturel de partir d'une décomposition du nombre cherché en une somme de carrés parfaits, avec le moins de termes possible.

Ici, on écrit 431 comme somme de 5 carrés parfaits : $431=400+25+1+4+1=20^2+5^2+1^2+2^2+1^2$.

Le lecteur pourra chercher une décomposition de 431 en somme de moins de 5 carrés parfaits, de façon à obtenir une construction avec encore moins de découpages.