Optimisation d'un Mètre-pliant

Hilde ALBRECHT, Thibaut LE GOUEZ et Paul PEREIRA
Élèves en classe de Première

Année 2023-2024

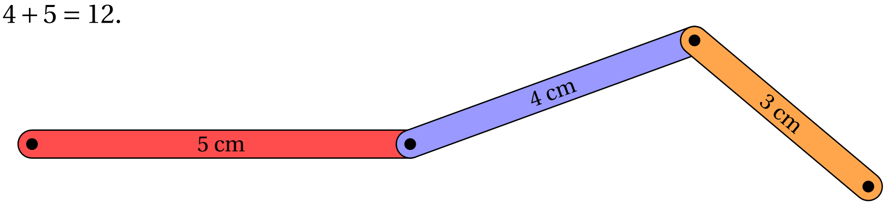
Établissement : Lycée de l'Harteloire, Brest
Enseignant : Jean-Marie GOURMELON
Chercheur : Stéphane RIOUAL, Université de Bretagne Occidentale (Lab - STICC)

1 Présentation du sujet

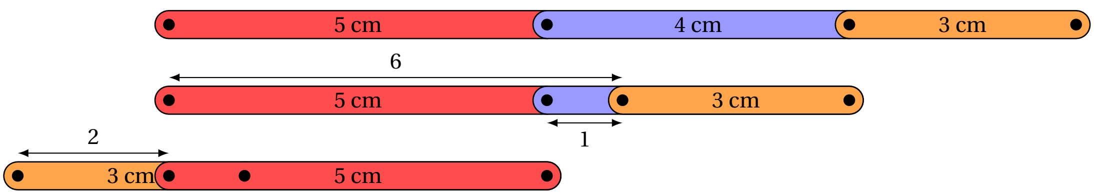
Les maçons utilisent traditionnellement un double-mètre pliant gradué composé de 10 sections de 20 cm qui s'articulent pour pouvoir se ranger facilement. Mais avec le temps et l'usure, les graduations ont tendance à s'effacer...

On souhaite concevoir un mètre pliant non gradué, dont les sections seraint des longueurs de mesures entières en centimètres et qui permettrait de mesurer n'importe quelle longueur de mesure entière en centimètres.

Par exemple le mètre ci-dessous permet de mesurer les longueurs 3, 4, 5 mais aussi $3+4=7$, $4+5=9$ et $3+4+5=12$.



De manière moins évidente, il permet aussi de mesurer les longueurs 1, 2 et 6, mais pas les longueurs 8 ni 10 ni 11 ...



Peut-on faire un meilleur instrument avec trois segments ?

L'idéal serait un instrument avec le moins de segments possible permettant de mesurer toute longueur inférieure à 3m 64, ce qui correspond à la hauteur maximale courante d'un étage de bâtiment de bureaux.

Combien de segments posséderait-il et quelles seraient leurs longueurs ?

2 Résultats

Nous avons durant l'année dans un premier temps étudié la question du mètre pliant à trois segments, ce qui nous a conduits à établir quelques méthodes et résultats plus généraux qui nous ont servi par la suite, notamment sur le nombre maximal de mesures possibles par un mètre pliant à n segments.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes concentrés sur le problème de la conception d'un mètre pliant permettant toutes les mesures consécutives de 1 jusqu'à la somme des longueurs de tous ses segments : l'existence d'un mètre permettant de mesurer toutes les longueurs jusqu'à 364 n'est pas une difficulté (364 segments de longueur 1 !), il s'agissait de trouver une méthode qui permette de gagner plusieurs ordres de grandeur et qui se généralise à n'importe quel nombre.

Nous avons trouvé un système fondé sur les puissances de deux, que nous avons ensuite cherché à optimiser. Dans cet article, nous donnerons la preuve dans la partie **5** qu'un mètre construit suivant ce système a toutes ses mesures consécutives, et dans la partie **6** nous chercherons quelques arguments pour étayer la conjecture que ce système est optimal.

Au préalable dans les premières parties **3** et **4**, nous présenterons les premières étapes de nos recherches qui nous ont permis d'établir le nombre maximal de mesures possibles par un mètre pliant possédant n segments, et qui ont abouti à la caractérisation d'un type de mètre pliant atteignant ce nombre maximal de mesures possibles.

3 Un mètre pliant à trois segments

3.1 Quelques définitions et notations

Pour une plus simple lecture de l'article, il est ici nécessaire de définir certains termes spécifiques et notations que nous emploierons régulièrement.

— Un mètre-pliant connu composé de n segments de longueurs a_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) sera noté de la manière suivante : $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$

— Nous emploierons le terme de « *trou* » pour désigner une longueur que ne permet pas de mesurer un mètre-pliant lorsqu'elle se situe dans un intervalle de deux longueurs mesurables. Lorsqu'il y a un trou, les longueurs mesurables par un mètre-pliant ne sont donc naturellement pas successives. Par exemple, si un mètre-pliant permet de mesurer les longueurs 7 et 9 mais pas 8, alors il y a ici un trou.

— Nous emploierons le terme de « *doublon* » lorsqu'une même longueur est mesurable plusieurs fois par un même mètre-pliant, de différentes manières. Lorsqu'un doublon apparaît, le nombre total de valeurs mesurables par le mètre-pliant est donc réduit, car celui-ci s'emploie de plusieurs façons à la mesure d'une même longueur. Par exemple, le mètre-pliant $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ mesure deux fois la longueur 4 : $1 + 3 = 4$ mais également $7 - 3 = 4$. Il y a donc un doublon.

3.2 Une première approche expérimentale

Notre première démarche : des essais. D'abord avec deux segments, nous avons trouvé rapidement le mètre-pliant optimal, le mètre $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ qui permet de mesurer les longueurs 1, 2, 3 et 4 (FIGURE 1).

Nous sommes partis, dans le choix des premières mesures des trois segments, de quelques principes :

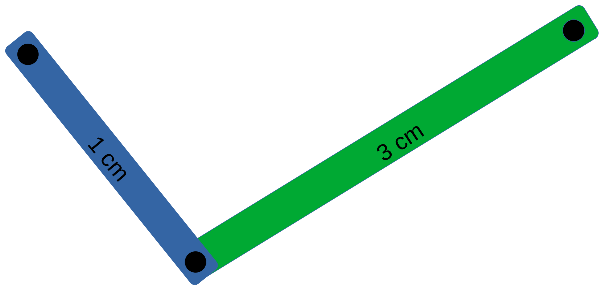


FIGURE 1 – 2 segments, 4 mesures possibles au total : 1, 2, 3 et 4

1. Utiliser un segment de 1cm à l'une des deux extrémités; ceci permet de multiplier par 3 le nombre de longueurs mesurables sans ce segment, par la soustraction ou l'addition de ce segment de 1cm.
2. Ne pas utiliser de segment dont la taille est un nombre pair; les nombres pairs sont facilement calculables comme somme ou différence de deux nombres impairs.
3. Ne pas utiliser plusieurs fois des segments consécutivement impairs (par exemple : $\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\end{bmatrix}$) ; en effet, $3-1=2$ mais $5-3=2$ également, ce qui calcule deux fois la même valeur. Les doublons sont, naturellement, à éviter.
4. Chercher à faire en sorte qu'il y ait le moins possible de doublons et le moins possible de trous parmi les mesures permises par le mètre.

Par ces quatre principes, une combinaison semble intéressante : $\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\end{bmatrix}$.

Nous avons rapidement éliminé cette possibilité car des doublons apparaissent ($1+3=4$ et $7-3=4$; $7-(3+1)=3$, cette valeur étant déjà celle du deuxième segment). Aussi, certaines longueurs ne sont pas mesurables (6 et 8).

Nous avons ensuite essayé la deuxième combinaison « évidente » : $\begin{bmatrix}1 & 3 & 9\end{bmatrix}$.

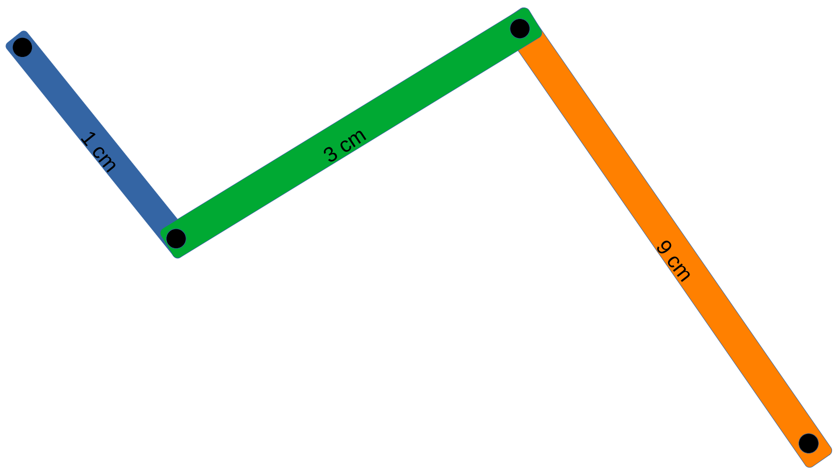


FIGURE 2 – 3 segments, 11 mesures possibles dont 7 nouvelles : 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13

Cette combinaison a été plus fructueuse : elle permet de mesurer les longueurs 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 11 ; 12 ; 13. Les valeurs 8 et 10 sont absentes de cette liste, car elles se calculeraient à l'aide des deux segments situés aux extrémités du mètre-pliant, mais nous considérons ici qu'il est physiquement impossible d'additionner et soustraire les deux segments extrêmes sans utiliser celui du milieu. Cette liste présente 11 valeurs, et aucun doublon semble-t-il. Pour nous en convaincre nous avons cherché à prouver par dénombrement que c'est le nombre maximal de valeurs pour un mètre-pliant de 3 segments. Nous nous y sommes pris « systématiquement », en commençant par un mètre-pliant de 1 segment a, puis 2 segments a et b, et ainsi de suite.

4 Un mètre pliant sans doublon

4.1 Nombre maximal de mesures possibles

Nous avons cherché le nombre de nouvelles mesures trouvables en passant à un n-ième segment, c'est-à-dire le nombre de mesures supplémentaires que permet un mètre-pliant de n segments et que ne permet pas un mètre-pliant de $n-1$ segments.

Nous avons ainsi établi la TABLE 1 pour les quatre premiers segments et nous avons trouvé les résultats suivants :

TABLE 1 – Dénombrement des nouvelles valeurs

a	b	c	d
	$a+b$	$b+c$	$c+d$
	$a-b$	$b-c$	$c-d$
		$a+b+c$	$b+c+d$
		$a-b+c$	$b+c-d$
		$-a+b+c$	$b-c+d$
		$a+b-c$	$b-c-d$
			$a+b+c+d$
			$a+b+c-d$
			$a-b+c+d$
			$a-b+c-d$
			$-a+b+c+d$
			$-a+b+c-d$
			$a+b-c+d$
			$a+b-c-d$

Pour 1 segment, 1 nouvelle valeur : $1 = 2^0$
Pour 2 segments, 3 nouvelles valeurs (4 valeurs au total) : $3 = 2^0 + 2^1$
Pour 3 segments, 7 nouvelles valeurs (11 valeurs au total) : $7 = 2^0 + 2^1 + 2^2$
Pour 4 segments, 15 nouvelles valeurs (26 valeurs au total) : $15 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$

Nous avons alors remarqué que ce nombre de nouvelles valeurs semblait être à chaque fois une somme de puissances de 2, ce que nous avons démontré sous la forme du premier théorème ci-après.

Théorème 1 : *Soit (V_n) la suite qui exprime le nombre maximal de nouvelles valeurs possibles trouvées en ajoutant un n-ième segment à un mètre pliant comportant $n-1$ segments. Alors :*

$$V_n = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Preuve : Le nombre maximal de nouvelles valeurs obtenues en ajoutant un n-ième segment de longueur a_n se trouve en dénombrant :

- la nouvelle mesure a_n
- les deux mesures $a_n - a_{n-1}$ et $a_n + a_{n-1}$
- les quatre mesures $a_n - a_{n-1} - a_{n-2}$ et $a_n - a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_n + a_{n-1} - a_{n-2}$ et $a_n + a_{n-1} + a_{n-2}$
- ... ainsi de suite jusqu'à prendre en compte le premier segment de longueur a_0, qui fournit 2^{n-1} mesures.

On a donc bien :

$$V_n = 2^0 + 2^1 + ... + 2^{n-1}.$$

Soit (W_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$, de raison $q = 2$ et de premier terme $W_1 = 2^0$ telle que $W_n = 2^{n-1}$. La suite (V_n) correspond à la somme des n premiers termes de (W_n). On a :

$$\begin{aligned} V_n &= W_1 + W_2 + ... + W_n \\ &= W_1 \frac{1-2^n}{1-2} \\ &= \frac{1-2^n}{-1} \\ &= -1(1-2^n) \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

□

En faisant la somme de tous les termes de (V_n), nous pourrions exprimer explicitement une suite (U_n) correspondant au nombre total de mesures trouvables pour n segments, c'est-à-dire les nouvelles mesures trouvables et toutes celles précédemment trouvables.

Théorème 2 : *Soit (U_n) la suite qui exprime le nombre de mesures possibles par un mètre pliant comportant n segments. Alors :*

$$U_n = 2^{n+1} - n - 2$$

Preuve : (U_n) correspond à la somme des n premiers termes de (V_n), c'est-à-dire à la somme de toutes les nouvelles valeurs trouvées, en partant du premier segment jusqu'au n-ième. On a :

$$\begin{aligned} U_n &= V_1 + V_2 + ... + V_{n-1} + V_n \\ &= 2^1 - 1 + 2^2 - 1 + ... + 2^{n-1} - 1 + 2^n - 1 \\ &= 2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1} + 2^n - n && \text{(On soustrait } n \text{ car on soustrait 1 } n \text{ fois)} \\ &= 2(2^0 + 2^1 + ... + 2^{n-2} + 2^{n-1}) - n \\ &= 2V_n - n && \text{(En se référant à la première expression de } V_n\text{)} \\ &= 2(2^n - 1) - n \\ &= 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

□

Remarque : Cette suite (U_n) est bien cohérente avec nos premiers résultats :

$U_1 = 2^2 - 1 - 2 = 4 - 3 = 1$
$U_2 = 2^3 - 2 - 2 = 8 - 4 = 4$
$U_3 = 2^4 - 3 - 2 = 16 - 5 = 11$
$U_4 = 2^5 - 4 - 2 = 32 - 6 = 26$

4.2 Généralisation pour un mètre pliant sans doublon

Nous avons vu que le mètre-pliant $\begin{bmatrix}1 & 3 & 9\end{bmatrix}$ est sans doublons et permet de mesurer 11 longueurs, ce qui est le maximum. Nous cherchons la logique à suivre pour un 4^{e} segment, un 5^{e}, etc.

Nous pouvons ici faire apparaître certaines observations de manière à comprendre dans quels cas de figure interviennent les doublons.

— On observe que plus la différence entre deux segments est élevée, plus la distance entre les valeurs trouvables est élevée. On cherche donc le « seuil » à partir duquel la différence entre deux segments est assez élevée pour qu'il n'y ait aucun doublon, c'est-à-dire pour lequel la distance entre deux valeur trouvable n'est jamais nulle.

— On observe que la somme de tous les segments d'un mètre-pliant de n segments ne doit pas être inférieure ou égale à U_n, car autrement il y aura des doublons (voir TABLE 2 partie **5.1** pour l'exemple du mètre à trois segments)

  Ainsi, $1+3+7=11$ donc ce mètre-pliant comporte des doublons. $1+3+8>11$ donc on peut espérer qu'il n'y ait pas de doublons. Or : $1+3=4$ et $1+3-8=-4$ donc ce mètre-pliant mesure 2 fois la longueur 4, il y a un doublon.

— De manière générale, si le dernier segment est égal au double de la somme des segments précédents ($8=2\times(1+3)$), il y aura systématiquement un doublon. En effet : soit un mètre-pliant composé de n segments tels que $\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n\end{bmatrix}$ avec $x_n = 2(x_1+x_2+\dots+x_{n-1})$. Dans ce cas, on a :

$$x_1+x_2+\dots+x_{n-1} = |x_1+x_2+\dots+x_{n-1}-x_n|.$$

  Ainsi, un nouveau principe apparaît dans le but d'éviter les doublons :

— Chaque segment doit être égal au double de la somme des segments précédents, auquel on additionne 1. De cette façon, chaque segment est assez grand pour éliminer le risque de doublons entre les nouvelles mesures obtenues et le précédentes.

Notons que notre mètre-pliant $\begin{bmatrix}1 & 3 & 9\end{bmatrix}$ suit cette dernière règle : $3=1\times2+1$ et $9=(1+3)\times2+1$ et en poursuivant cette règle, nous obtenons pour les longueurs des nouveaux segments la suite des puissances de 3 :

Théorème 3 : *Pour tout entier naturel n non nul, le mètre-pliant $\begin{bmatrix}1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n\end{bmatrix}$, composé de $n+1$ segments, est sans doublon.*

Preuve :

Nous avons déjà vu que $\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1 & 3 & 9\end{bmatrix}$ sont sans doublon.

Soit à présent un mètre-pliant de n segments $\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n\end{bmatrix}$ dont les longueurs sont les puissances successives de 3, et auquel on cherche à ajouter un nouveau segment x_{n+1} en utilisant le procédé décrit précédemment.

On pose $a=3$, de sorte que $x_1=a^0$, $x_2=a$, $x_3=a^2$, ... , $x_n=a^{n-1}$

On a :

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= 2(x_1+x_2+\dots+x_n)+1 && \text{(ce qui assure un mètre sans doublon)}\\
&= (a-1)(1+a+a^2+\dots+a^{n-1})+1 && \text{(sachant que } a=3\text{, on a } 2=a-1)\\
&= (a+a^2+a^3+\dots+a^n)-(1+a+a^2+\dots+a^{n-1})+1\\
&= a+a^2+a^3+\dots+a^n-1-a-a^2-\dots-a^{n-1}+1\\
&= a^n
\end{aligned}$$

Et donc : $x_{n+1} = 3^n$.

On peut donc en conclure que tous les mètres $\begin{bmatrix}1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n\end{bmatrix}$ seront sans doublon ; ainsi, par exemple, le mètre-pliant $\begin{bmatrix}1 & 3 & 3^2 & 3^3\end{bmatrix}$ est bien sans doublon. $\square$

Remarque : Il existe une infinité de mètres-pliants à n segments permettant de mesurer le nombre maximal U_n de valeurs trouvables.

Par exemple, les mètres pliants $\begin{bmatrix}1 & 3 & 9 & 28\end{bmatrix}$ (où, pour trouver le dernier segment, on a ajouté 2 au lieu de 1 au double de la somme des segments précédents) ou encore $\begin{bmatrix}1 & 10 & 100 & 1000\end{bmatrix}$ sont sans doublon. Et, de manière générale, tous les mètres-pliants dont chaque segment est supérieur (ou égal) au double de la somme des segments précédents auquel on additionne 1, sont sans doublon.

Mais le mètre-pliant $\begin{bmatrix}1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n\end{bmatrix}$ reste le plus compact et le plus exploitable parmi ceux qui permettent le nombre maximal de valeurs trouvables.

5 Un mètre pliant sans trou

5.1 Les premiers résultats avec un mètre pliant à trois segments

Cependant, le terme de « meilleur instrument » pourrait également signifier non pas le plus de valeurs, mais le plus de valeurs consécutives. C'est l'objet de la deuxième partie du problème : on cherche désormais à répondre à la deuxième question. Pour cela, on ne cherche plus à obtenir un mètre donnant le plus grand nombre de mesures, mais un mètre donnant le plus grand nombre de mesures consécutives à partir de 1.

On a donc établi deux principes à respecter pour simplifier les recherches :

— Que la somme de tous les segments ne soit pas supérieure à U_n car le nombre de mesures consécutives ne peut pas être supérieur à ce nombre

— Avoir un segment de 1 cm à une des extrémités afin de pouvoir obtenir la mesure $U_n - 1$

Pour les mètres de 1 ou 2 segments, on peut facilement trouver la meilleure combinaison, respectivement 1 segment de 1 cm pour 1 longueur mesurable et 2 segments de 1 et 3 cm pour 4 longueurs mesurables. Ces deux résultats correspondent à la suite (U_n), on est donc certain que ce sont les meilleures solutions.

Pour les mètres de 3 segments, en revanche, la question paraît plus compliquée. Cependant, en appliquant les deux principes, il est possible de faire des essais en gardant un premier segment de 1 cm et en faisant varier les valeurs des deux derniers segments afin que la somme des 3 segments soit égale à 11 cm : les résultats sont consignés dans le premier tableau de la TABLE 2.

On remarque qu'aucune de ces combinaisons ne donne 11 valeurs. Pour 3 segments, le nombre maximal de mesures et le nombre maximal de mesures consécutives est donc différent.

On peut donc réessayer en cherchant 10 mesures consécutives, avec la somme des 3 segments égale à 10 : les résultats figurent dans le deuxième tableau de la TABLE 2.

On remarque que pour $\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1 & 6 & 3\end{bmatrix}$ on trouve 10 valeurs donc le nombre maximal de valeurs consécutives est 10 pour un mètre à trois segments.

5.2 Étude des deux types de mètres-pliants trouvés

On peut alors se demander pourquoi ces deux mètres $\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1 & 6 & 3\end{bmatrix}$ fonctionnent aussi bien : pour cela, observons la manière dont ils donnent les différentes mesures.

TABLE 2 – Mesures possibles pour les mètres de longueurs 11 et 10

Mètre	Mesures possibles	Nombre
$\begin{bmatrix}1 & 1 & 9\end{bmatrix}$	1 ; 2 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11	7
$\begin{bmatrix}1 & 2 & 8\end{bmatrix}$	1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11	10
$\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\end{bmatrix}$	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11	9
$\begin{bmatrix}1 & 4 & 6\end{bmatrix}$	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 11	9
$\begin{bmatrix}1 & 5 & 5\end{bmatrix}$	1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 11	7
$\begin{bmatrix}1 & 6 & 4\end{bmatrix}$	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11	10
$\begin{bmatrix}1 & 7 & 3\end{bmatrix}$	1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11	10
$\begin{bmatrix}1 & 8 & 2\end{bmatrix}$	1 ; 2 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11	9
$\begin{bmatrix}1 & 9 & 1\end{bmatrix}$	1 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11	6

Mètre	Mesures possibles	Nombre
$\begin{bmatrix}1 & 1 & 8\end{bmatrix}$	1 ; 2 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10	7
$\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\end{bmatrix}$	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10	10
$\begin{bmatrix}1 & 3 & 6\end{bmatrix}$	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10	8
$\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\end{bmatrix}$	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 8 ; 9 ; 10	8
$\begin{bmatrix}1 & 5 & 4\end{bmatrix}$	1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10	8
$\begin{bmatrix}1 & 6 & 3\end{bmatrix}$	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10	10
$\begin{bmatrix}1 & 7 & 2\end{bmatrix}$	1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10	9
$\begin{bmatrix}1 & 8 & 1\end{bmatrix}$	1 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10	6

5.2.1 Pour 3 segments :

TABLE 3 – Décompositions des mesures pour le mètre $\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\end{bmatrix}$

Mesure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Décompositions	1 ou $2-1$	2	$2+1$	$7-2-1$	$7-2$	$7-2+1$	7	$7+2-1$	$7+2$	$7+2+1$

On comprend donc le fonctionnement de ce mètre : l'idée est d'obtenir un maximum de mesures en utilisant les segments de 2 et de 1 afin de facilement les additionner ou les soustraire au 7 (On pourrait se dire que cela est aussi possible avec des segments de 1 et de 3 qui donnent 4 mesures au lieu de 3, mais il n'est pas possible d'obtenir la mesure 1 en utilisant le segment de 3 et donc de soustraire ou ajouter cette mesure au segment suivant). Les trois premières mesures sont donc définies par les deux premiers segments, les trois suivantes en soustrayant les trois premières au segment de 7, la suivante avec simplement le dernier segment et les trois dernières en ajoutant les trois premières au dernier segment. Le nombre 7 est utilisé car la mesure minimale trouvable en l'utilisant est égale à la mesure maximale trouvable sans l'utiliser, augmentée de 1.

Autrement dit, c'est le double de la somme des deux premiers segments, augmenté de 1. On retrouve ainsi la même idée que celle exploitée dans la partie **4.2**.

Si l'on voulait appliquer la même idée pour un mètre de n segments, on peut conjecturer que ce mètre serait sous la forme $\begin{bmatrix}2^0 & 2^1 & \ldots & 2^{n-2} & 2s+1\end{bmatrix}$ où s est la somme des premiers segments.

Cette fois-ci, l'idée est d'obtenir un maximum de multiples de 3 en utilisant les segments de 6 et de 3, puis de soustraire ou ajouter 1 à ces valeurs pour obtenir les autres nombres. Pour la mesure 1, on peut donc considérer qu'on effectue $0+1$ car 0 est un multiple de 3. Si l'on voulait appliquer la même idée pour un nombre n de segments, on peut conjecturer que ce mètre serait sous la forme $\begin{bmatrix}1 & 3\left(2^{n-2}\right) & 3\left(2^{n-3}\right) & \cdots & 3^2 & 3\end{bmatrix}$.

TABLE 4 – Décompositions des mesures pour le mètre $\begin{bmatrix}1 & 6 & 3\end{bmatrix}$

Mesure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Décompositions	1	$6-3-1$	3 ou $6-3$	$6-3+1$	$6-1$	6	$6+1$	$6+3-1$	$6+3$	$6+3+1$

5.2.2 Un résultat essentiel :

On peut se dire que pour 4 segments, les mètres donnant le plus de mesures consécutives seraient $\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 15\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1 & 12 & 6 & 3\end{bmatrix}$; pour 5 segments ce seraient $\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 8 & 31\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1 & 24 & 12 & 6 & 3\end{bmatrix}$, etc.

Cependant pour prouver cela, il faut d'abord prouver qu'il est possible d'obtenir tous les entiers multiples de k entre k et $(2^n-1)k$ avec le mètre $\begin{bmatrix}k & 2k & 2^2k & \dots & 2^{n-2}k & 2^{n-1}k\end{bmatrix}$ en utilisant le dernier segment, car ce principe est utilisé dans les deux types de mètres.

Théorème fondamental 4 : *Soit n un entier naturel non nul.*
Le mètre pliant $\begin{bmatrix}1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-2} & 2^{n-1}\end{bmatrix}$ permet de mesurer toutes les longueurs de 1 à 2^n-1 à partir de l'extrémité du segment de longueur 2^{n-1}.

Preuve : Pour cela, on effectue une preuve par récurrence sur n.

• Pour un mètre-pliant d'un seul segment 1, la seule valeur possible est 1 soit touts les entiers entre 1 et $2^n-1=2^1-1=1$ donc le théorème est vrai pour $n=1$.

• Pour $\begin{bmatrix}2^0 & 2^1 & \dots & 2^{n-2} & 2^{n-1}\end{bmatrix}$:

Si l'on suppose que le théorème est vrai pour l'entier $n-1$, c'est-à-dire qu'on peut mesurer toutes les longueurs de 1 à $2^{n-1}-1$ grâce au mètre $\begin{bmatrix}2^0 & 2^1 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2}\end{bmatrix}$ à partir de l'extrémité de son segment de longueur 2^{n-2}, alors en utilisant le dernier segment de longueur 2^{n-1} il est possible d'y ajouter ou soustraire toutes les mesures que l'on obtient en utilisant les segment précédents, soit toutes les mesures de 1 à $2^{n-1}-1$. On note v un entier naturel compris entre ces deux valeurs.

On obtient alors :

— avec $2^{n-1}-v$ toutes les valeurs comprises entre $2^{n-1}-\left(2^{n-1}-1\right)=1$ et $2^{n-1}-1$;

— avec le dernier segment, la valeur 2^{n-1} ;

— avec $2^{n-1}+v$ toutes les valeurs comprises entre $2^{n-1}+1$ et $2^{n-1}+\left(2^{n-1}-1\right)=2^n-1$.

Soit toutes les valeurs entre 1 et 2^n-1 en utilisant le dernier segment. Il est donc possible d'obtenir tous les entiers entre 1 et 2^n-1 en ajoutant le dernier segment de longueur 2^{n-1} au mètre $\begin{bmatrix}2^0 & 2^1 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2}\end{bmatrix}$.

• Comme ce théorème est vrai pour $n=1$, on en conclut qu'il est vrai pour tout entier naturel n non nul. □

Conséquence du Théorème fondamental : *Soient n et k deux entiers naturels non nuls.*
Le mètre pliant $\begin{bmatrix}k & 2k & 2^2k & \dots & 2^{n-2}k & 2^{n-1}k\end{bmatrix}$ permet de mesurer tous les multiples positifs de k jusqu'à $(2^n-1)k$ à partir de l'extrémité du segment de longueur $2^{n-1}k$.

Preuve : D'après le théorème fondamental, le mètre-pliant $\begin{bmatrix}2^0 & 2^1 & \dots & 2^{n-2} & 2^{n-1}\end{bmatrix}$ permet de mesurer toutes les longueurs de 1 à 2^n-1 à partir de l'extrémité de son segment le plus long. Or chacune de ces longueurs m est obtenue comme une somme ou différence des longueurs des segments. Si on multiplie tous les segments par k, on obtient donc la longueur $k\times m$. □

5.2.3 Pour un nombre n de segments

Grâce à cela, on peut prouver que les deux types de mètres vus plus tôt fonctionnent pour tout entier n supérieur ou égal à 2.

Théorème 5 : *Soit n un entier naturel non nul.*
Les mètres pliants $\begin{bmatrix} 2^0 & 2^1 & \dots & 2^{n-2} & 2s+1 \end{bmatrix}$, où $s = 2^{n-1} - 1$, et $\begin{bmatrix} 1 & 3\left(2^{n-2}\right) & 3\left(2^{n-3}\right) & \cdots & 3^2 & 3 \end{bmatrix}$ permettent toutes les mesures consécutives entre 1 et $3(2^{n-1}) - 2$.

Preuve :

• Pour $\begin{bmatrix} 2^0 & 2^1 & \dots & 2^{n-2} & 2s+1 \end{bmatrix}$, d'après le théorème fondamental, il est donc possible de mesurer :

- toutes les longueurs entre 1 et $s = 2^{n-1} - 1$ en utilisant les premiers segments;
- toutes les longueurs entre $2s + 1 - s = 2^{n-1}$ et $2s + 1 - 1 = 2^n - 2$ en soustrayant ces mesures au dernier segment;
- la longueur $2s + 1 = 2^n - 1$ avec le dernier segment;
- toutes les longueurs entre $2s + 1 + 1 = 2^n$ et $2s + 1 + s = 3(2^{n-1}) - 2$ en ajoutant les premières mesures au dernier segment;

Ce mètre mesure donc bien toutes les longueurs entre 1 et $3(2^{n-1}) - 2$.

• Pour $\begin{bmatrix} 1 & 3\left(2^{n-2}\right) & 3\left(2^{n-3}\right) & \cdots & 3^2 & 3 \end{bmatrix}$, d'après la conséquence du théorème fondamental, en prenant $k = 3$, il est donc possible de mesurer :

- la longueur 1 avec le premier segment
- toutes les longueurs multiples de 3 de la forme $3m$ avec $1 \leqslant m \leqslant 2^{n-1} - 1$ avec les derniers segments;
- toutes les mesures $3m-1$ avec les multiples de 3 diminués d'une unité par le premier segment;
- toutes les longueurs $3m + 1$ avec les multiples de 3 augmentés d'une unité par le premier segment;

Or tout entier naturel s'exprime sous forme $3m$ ou $3m - 1$ ou $3m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$; le mètre mesure donc bien toutes les longueurs entre 1 et $3(2^{n-1}) - 2$. □

Remarques : Cela montre également que les deux types de mètre donnent le même nombre de mesures avec un même nombre de segments.

D'autre part, on peut constater que le mètre à deux segments $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ relève simultanément des deux types de mètre.

5.3 Un autre type de mètre-pliant plus efficace

On pourrait alors se dire que ces deux types de mètre sont les meilleurs possibles pour tout n, cependant, lorsque l'on refait des essais pour 4 segments, cette fois-ci on trouve un mètre $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 14 & 7 \end{bmatrix}$ donnant 24 valeurs alors que les mètres $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ ne donnent que 22 valeurs.

En fait, il apparaît que le mètre $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 14 & 7 \end{bmatrix}$ est un « hybride » des deux types de mètres rencontrés jusqu'à présent. On reconnaît en effet des attributs du premier type de mètre avec les puissances de 2 en premiers segments ainsi que $2s+1 = 2\times3+1 = 7$ en dernier segment. On peut aussi reconnaître la fin du deuxième type de mètre avec, cette fois-ci $2s + 1 = 7$ à la place de 3 en facteur. Le fonctionnement de ce mètre est également un mix des deux types de mètre, chacune des deux parties du mètre possédant $\frac{n}{2} = 2$ segments.

5.3.1 Pour un nombre de segments pair :

L'idée est d'obtenir un maximum de valeurs en utilisant les premiers segments pour les additionner ou soustraire aux différents multiples de $2s+1$ que l'on obtient avec les derniers segments (FIGURE 3), chacune des deux parties du mètre possédant $\frac{n}{2}$ segments.

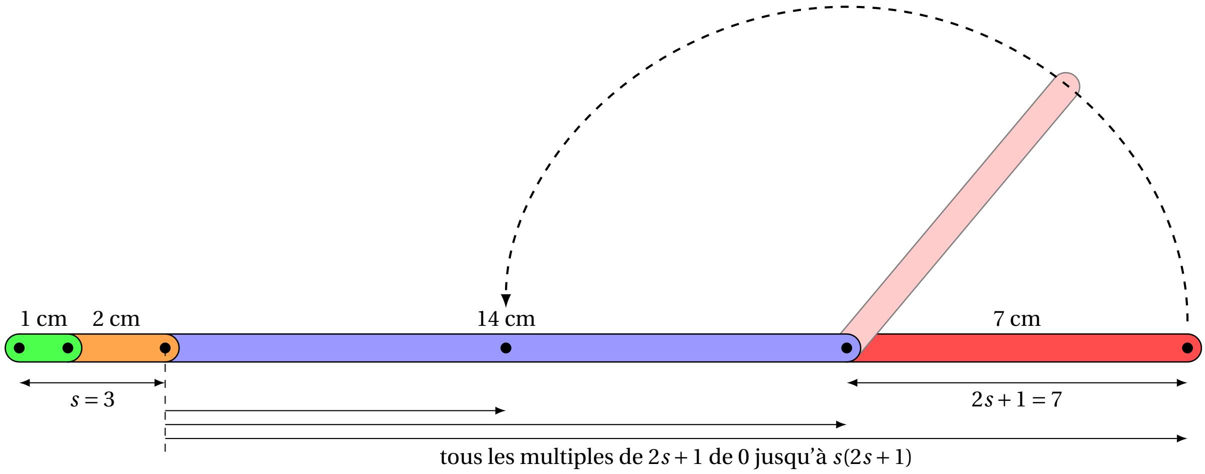


FIGURE 3 – La deuxième partie permet d'obtenir les multiples de $2s+1$

Théorème 6 : *Soit n un entier naturel pair non nul et s l'entier naturel $s = 2^{\frac{n}{2}} - 1$*
Le mètre pliant $\left[2^0 \quad 2^1 \quad \dots \quad 2^{\frac{n}{2}-1} \quad \left(2^{\frac{n}{2}-1}\right)s \quad \left(2^{\frac{n}{2}-2}\right)s \quad \dots \quad 2s \quad s\right]$ *permet toutes les mesures consécutives entre 1 et* $2^{n+1} - 2^{\frac{n}{2}+1}$.

Preuve :

En posant m un entier naturel non nul et r un entier naturel compris entre 1 et s, correspondant à une mesure quelconque obtenable avec la première partie du mètre, on peut alors obtenir :

- toutes les mesures entre 1 et s en utilisant les $\frac{n}{2}$ premiers segments : la somme de leurs longueurs vaut effectivement $s = 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)+1} - 1 = 2^{\frac{n}{2}} - 1$.
- toutes les mesures de la forme $m(2s+1)$ avec m compris entre 1 et s avec les derniers segments (FIGURE 3) ;

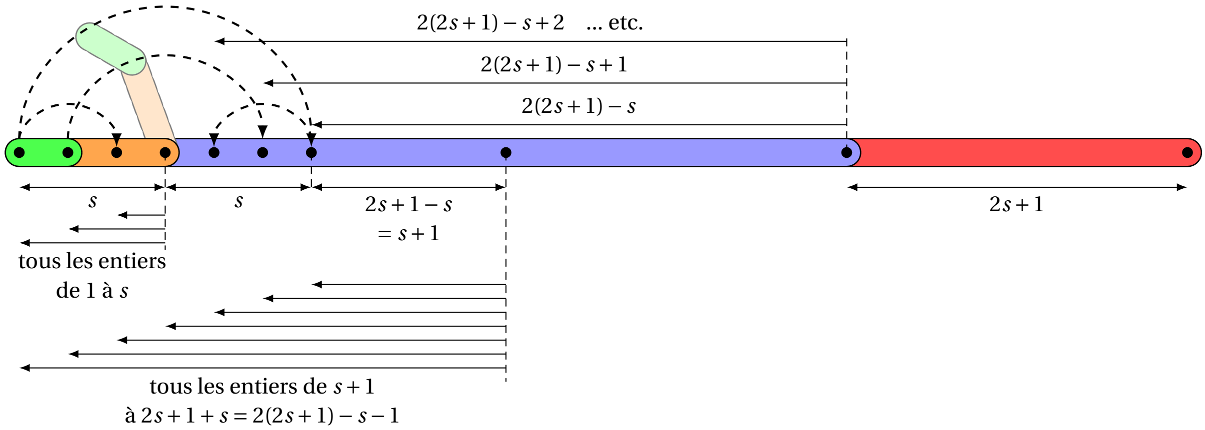


FIGURE 4 – Les entiers de 1 à s, combinés avec les multiples de $2s+1$

— toutes les mesures de la forme $m(2s+1)-r$ où m est compris entre 1 et s, avec les multiples de $2s+1$ diminués des mesures de la première partie du mètre (FIGURE 4) ;

— toutes les mesures de la forme $m(2s+1)+r$ où m est compris entre 1 et s, avec les multiples de $2s+1$ augmentés des mesures de la première partie du mètre (FIGURE 4).

Or tout entier naturel est la somme d'un multiple de $2s+1$ et d'un entier r compris entre $-s$ et s, le mètre mesure donc toutes les longueurs entre 1 et $s(2s+1)+s=2s(s+1)=2^{n+1}-2^{\frac{n}{2}+1}$. □

5.3.2 Pour un nombre de segments impair :

Il n'est possible d'avoir deux parties égales que si le nombre de segments est pair. Pour un nombre de segments impair, il y a donc une « moitié » composée de de $\frac{n+1}{2}$ segments et une autre « moitié » de $\frac{n-1}{2}$ segments. Il y a donc deux mètres-pliants possibles, l'un où la première partie est dominante et l'autre où la deuxième est dominante.

Théorème 7 : *Soit n un entier naturel pair non nul*

$$\text{Les mètres pliants} \quad \begin{bmatrix} 2^0 & 2^1 & \dots & 2^{\frac{n-1}{2}} & \left(2^{\frac{n-3}{2}}\right)s & \left(2^{\frac{n-5}{2}}\right)s & \dots & 2s & s \end{bmatrix} \text{ avec } s=2^{\frac{n+1}{2}}-1$$

$$\text{et} \quad \begin{bmatrix} 2^0 & 2^1 & \dots & 2^{\frac{n-3}{2}} & \left(2^{\frac{n-1}{2}}\right)s & \left(2^{\frac{n-3}{2}}\right)s & \dots & 2s & s \end{bmatrix} \text{ avec } s=2^{\frac{n-1}{2}}-1$$

permettent toutes les mesures consécutives entre 1 et $2^{n+1}-2^{\frac{n+1}{2}}-2^{\frac{n-1}{2}}$.

Preuve :

• En posant m un entier naturel non nul et r un entier naturel compris entre 1 et s, correspondant à une mesure quelconque obtenable avec la première partie du mètre, on a donc pour le premier cas :

— toutes les mesures entre 1 et $2^{\frac{n+1}{2}}-1$ en utilisant les premiers segments : la somme de leurs longueurs vaut effectivement $s=2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)+1}-1=2^{\frac{n+1}{2}}-1$;

— toutes les mesures de la forme $m(2s+1)$ où m est compris entre 1 et $2^{\frac{n-1}{2}}-1$ avec les derniers segments : $2^{\frac{n-1}{2}}-1$ correspond à la somme des coefficients de s dans les mesures des segments de la deuxième partie du mètre ;

— toutes les mesures de la forme $m(2s+1)-r$ où m est compris entre 1 et $2^{\frac{n-1}{2}}-1$ avec les multiples de $2s+1$ diminués des des mesures de la première partie du mètre ;

— toutes les mesures de la forme $m(2s+1)+r$ où m est compris entre 1 et $2^{\frac{n-1}{2}}-1$, avec les multiples de $2s+1$ augmentés des mesures de la première partie du mètre .

Comme dans le cas où n est pair, on en conclut que ce mètre mesure donc toutes les longueurs entre 1 et $\left(2^{\frac{n-1}{2}}-1\right)(2s+1)+s=\left(2^{\frac{n-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{n+3}{2}}-1\right)+2^{\frac{n+1}{2}}-1=2^{n+1}-2^{\frac{n+1}{2}}-2^{\frac{n-1}{2}}$.

• Et pour le deuxième cas :

— toutes les mesures entre 1 et $s=2^{\frac{n-1}{2}}-1$ en utilisant les premiers segments ;

— toutes les mesures de la forme $m(2s+1)$ où m est compris entre 1 et $2^{\frac{n+1}{2}}-1$ avec les derniers segments : $2^{\frac{n+1}{2}}-1$ correspond à la somme des coefficients de s dans les mesures des segments de la deuxième partie du mètre ;

— toutes les mesures de la forme $m(2s+1)-r$ où m est compris entre 1 et $2^{\frac{n+1}{2}}-1$ avec les multiples de $2s+1$ diminués des mesures de la première partie du mètre ;

— toutes les mesures de la forme $m(2s+1)+r$ où m est compris entre 1 et $2^{\frac{n+1}{2}}-1$ avec les multiples de $2s+1$ augmentés des mesures de la première partie du mètre .

Le mètre donne donc toutes les valeurs entre 1 et $\left(2^{\frac{n+1}{2}}-1\right)(2s+1)+s=2^{n+1}-2^{\frac{n-1}{2}}-2^{\frac{n+1}{2}}$. □

Remarques :

— Cela montre également que les deux cas produisent les mêmes résultats.
— On constate que le nombre de mesures avec ce mètre « hybride » est toujours plus grand qu'avec les deux mètres initiaux.
— Cette méthode est la meilleure que nous ayons trouvée pour avoir le plus de valeurs consécutives. Cependant, nous n'avons pas prouvé qu'elle est la plus efficace pour un nombre n de segments au-delà de $n = 4$: la question reste ouverte.

5.4 Réponse à la deuxième question

Il est désormais possible de répondre à la deuxième question :

En utilisant la suite (U_n), on trouve que le premier terme supérieur à 364 est $U_8 = 502$ donc dans tous les cas ça ne marchera pas avec un mètre possédant moins de 8 segments. En utilisant la méthode montrée dans la partie **5.3** on trouve le mètre $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 248 & 124 & 62 & 31 \end{bmatrix}$.

En additionnant les longueurs de tous ses segments on trouve 480. On a donc trouvé un mètre donnant toutes les mesures entre 1 et 480, ce qui est supérieur à 364. Avec ce résultat, on peut également remarquer que le nombre maximal de mesures consécutives est très proche du nombre maximal de mesures sans contraintes (environ à 4% près).

6 Évolution des proportions de doublons

Comme on a pu le voir avec les résultats précédents, le nombre de mesures consécutives reste très proche du nombre maximal de mesures, ce qui signifie un nombre de doublons qui reste très bas car leur nombre correspond à la différence entre le nombre maximal de mesures et le nombre de mesures consécutives. Par exemple, pour 8 segments on a donc un nombre de doublons de $502 - 480 = 22$. Le taux de doublons quant à lui s'obtient en divisant ce nombre de doublons par U_n. Pour 8 segments on obtient alors un taux de $\frac{22}{502} \approx 4\%$ ce qui est plutôt bas. On peut alors se demander s'il reste bas lorsque le nombre de segments augmente, ou plus généralement, comment évolue le taux de doublons lorsque n augmente.

6.1 Deux suites

Il est possible de calculer le nombre de doublons en fonction de U_n et du nombre de mesures consécutives pour un nombre n de segments. Cependant, comme ce nombre de mesures consécutives s'exprime différemment selon la parité de n , il faut deux suites que nous noterons respectivement Dp (nombre de doublons si n est pair) et Di (nombre de doublons si n est impair) pour les deux cas de figure.

On a ainsi, pour tout entier naturel n pair :

$$\begin{aligned} Dp_n &= U_n - \left(2^{n+1} - 2^{\frac{n}{2}+1}\right) \\ &= 2^{n+1} - n - 2 - 2^{n+1} - 2^{\frac{n}{2}+1} \\ &= 2^{\frac{n}{2}+1} - n - 2 \end{aligned}$$

Et, pour tout entier naturel n impair :

$$\begin{aligned}
Di_n &= U_n - \left(2^{n+1} - 2^{\frac{n+1}{2}} - 2^{\frac{n-1}{2}}\right) \\
&= 2^{n+1} - n - 2 - 2^{n+1} + 2^{\frac{n+1}{2}} + 2^{\frac{n-1}{2}} \\
&= 2^{\frac{n+1}{2}} + 2^{\frac{n-1}{2}} - n - 2
\end{aligned}$$

6.2 Évolution du nombre de doublons

Avec les premiers résultats que l'on a obtenu, on peut conjecturer que le nombre de doublons augmente toujours lorsque n augmente. On a alors encore une fois deux cas de figure. Pour connaître l'évolution du nombre de doublons entre un nombre n pair de segments et le nombre suivant $n+1$, qui est impair, on va étudier le signe de $Di_{n+1} - Dp_n$, et pour le cas inverse on va étudier le signe de $Dp_{n+1} - Di_n$.

Si n est pair on a :

$$\begin{aligned}
Di_{n+1} - Dp_n &= 2^{\frac{n}{2}+1} + 2^{\frac{n}{2}} - n - 3 - \left(2^{\frac{n}{2}+1} - n - 2\right) \\
&= 2^{\frac{n}{2}+1} + 2^{\frac{n}{2}} - n - 3 - 2^{\frac{n}{2}+1} + n + 2 \\
&= 2^{\frac{n}{2}} - 1
\end{aligned}$$

$Di_{n+1} - Dp_n$ est positif lorsque $2^{\frac{n}{2}+1} \geqslant 1$, soit lorsque $n \geqslant 0$:

Or un mètre pliant a un nombre entier supérieur à 0 de segments et n est pair, donc $n \geqslant 2$. On peut en déduire qu'entre un mètre avec nombre de segments pair et un avec un nombre de segments impair, le nombre de doublon augmente toujours.

Si n est impair on a :

$$\begin{aligned}
Dp_{n+1} - Di_n &= 2^{\frac{n+1}{2}+1} - n - 3 - \left(2^{\frac{n+1}{2}} + 2^{\frac{n-1}{2}} - n - 2\right) \\
&= 2^{\frac{n+1}{2}+1} - n - 3 + 2^{\frac{n+1}{2}} - 2^{\frac{n-1}{2}} + n + 2. \\
&= 2^{\frac{n+1}{2}+1} - 2^{\frac{n+1}{2}} - 2^{\frac{n-1}{2}} - 1. \\
&= 4 \times 2^{\frac{n-1}{2}} - 2 \times 2^{\frac{n-1}{2}} - 2^{\frac{n-1}{2}} - 1. \\
&= 2^{\frac{n-1}{2}} - 1.
\end{aligned}$$

$Dp_{n+1} - Di_n$ est positif lorsque $2^{\frac{n-1}{2}} \geqslant 1$, soit lorsque $n - 1 \geqslant 0$ ou $n \geqslant 1$:

Or un mètre pliant a un nombre entier supérieur à 0 de segments et n est impair, donc $n \geqslant 1$. On peut en déduire qu'entre un mètre avec nombre de segments impair et un avec un nombre de segments pair, le nombre de doublon augmente toujours, sauf entre 1 et 2 segments où le résultat reste constant On peut alors en déduire que le nombre de doublons augmentera toujours lorsque le nombre de segments augmente.

6.3 Évolution du taux de doublons

On cherche à présent à répondre à la problématique de cette partie, à savoir : « comment évolue le taux de doublons lorsque n augmente ? ». Le taux de doublons se calcule par :

$$\frac{Dp_n}{U_n} = \frac{2^{\frac{n}{2}+1} - n - 2}{2^{n+1} - n - 2}$$

pour les nombres pairs et

$$\frac{Di_n}{U_n} = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} + 2^{\frac{n-1}{2}} - n - 2}{2^{n+1} - n - 2}$$

pour les nombres impairs.

Une table de valeurs des ces quotients permet de conjecturer que lorsque n tend vers l'infini, la proportion de doublons tend vers 0. On cherche à présent à prouver cette limite.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{Dp_n}{U_n}$?

Lorsque n tend vers $+\infty$, les termes $-n-2$ deviennent négligeables par rapport aux puissances de 2 .
Par conséquent, l'expression $\dfrac{Dp_n}{U_n}$ se comporte comme :

$$\frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{Dp_n}{U_n} = 0$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{Di_n}{U_n}$?

Lorsque n tend vers $+\infty$, les termes $-n-2$ deviennent négligeables par rapport aux puissances de 2 .
Par conséquent, l'expression $\dfrac{Di_n}{U_n}$ se comporte comme :

$$\frac{3 \times 2^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n+1}} = \frac{3}{4 \times 2^{\frac{n-1}{2}}}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{Di_n}{U_n} = 0$

Ces résultats confirment notre hypothèse. Cela montre que même si le type de mètre trouvé n'est pas optimal pour un nombre élevé de segments, celui-ci reste très efficace avec un nombre de mesures consécutives devenant toujours proportionnellement de plus en plus proche de (U_n)

7 Conclusion

En conclusion, le mètre-pliant de 8 segments que nous avons créé remplit bien son cahier des charges (capable de mesurer consécutivement toutes les valeurs jusqu'à 3m64, norme des hauteurs de bureaux), bien que nous n'ayons pas encore prouvé qu'il est optimal, même si les résultats très performants qu'il offre permettent toutefois d'être optimiste à ce sujet.

Mais l'intérêt de cette recherche a surtout été de modéliser la situation et de faire apparaître la logique à suivre afin de créer un mètre-pliant efficace avec le moins possible de segments, en fonction de ce que l'on attend de lui : des valeurs sans doublon ou alors des valeurs consécutives. Nous avons ainsi trouvé un type de mètre-pliant dont la proportion de doublons tend vers zéro à mesure que le nombre de segments augmente, ce qui était assez inattendu au début de la recherche.

Remerciements : nous tenons à remercier l'association MATh.en.JEANS qui a organisé le 35^{e} Congrès de mathématiques à Nantes, le chercheur Stéphane Rioual qui nous a accompagnés et régulièrement conseillés tout au long de l'année, ainsi que notre professeur M. Gourmelon qui a transcrit en LaTeX les tables ainsi que les deux dernières figures de cet article et qui nous a épaulés dans sa rédaction, sans lesquels l'atelier de recherche n'aurait pas été possible.