Article Marche aléatoire

Année 2023 – 2024

Julian CESARI, élève de première générale

Établissement : Lycée Raynouard

Enseignant·es : Nelly Mourau, Denis Guicheteau

Chercheur: Thierry Champion, Labo imath et Frédéric Havet, INRIA.

Introduction

1.1. Présentation du sujet

On part d'un quadrillage infini avec un point de départ noir et le reste des carreaux sont blancs. A chaque tour, on se déplace aléatoirement sur une des cases contiguës, si celle-ci est noire, on recommence, sinon on colorie la case en noir et on revient au point de départ. Je me suis donc demandé quelle était la probabilité d'obtenir un disque de rayon 1 soit que les quatre case contiguës de notre point de départ soit coloriées

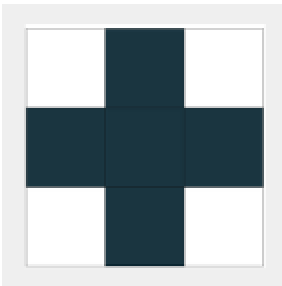
1.2. Résultat

- Il y a un peu plus de 14% de chances de faire un disque de rayon 1 en 4 étapes.

2. Premiers tests et définitions.

2.1. Définitions

On appelle disque de rayon 1, dans un quadrillage, l'ensemble des cases qui sont à un carreau ou moins de la case centrale. Le disque de rayon 1 ressemble donc à une croix.

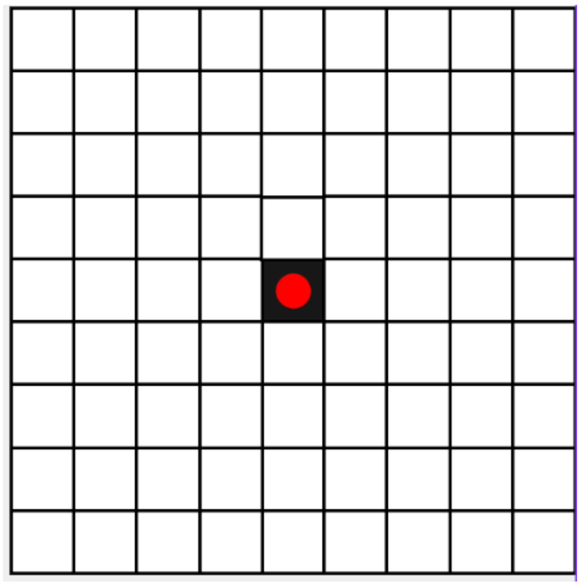
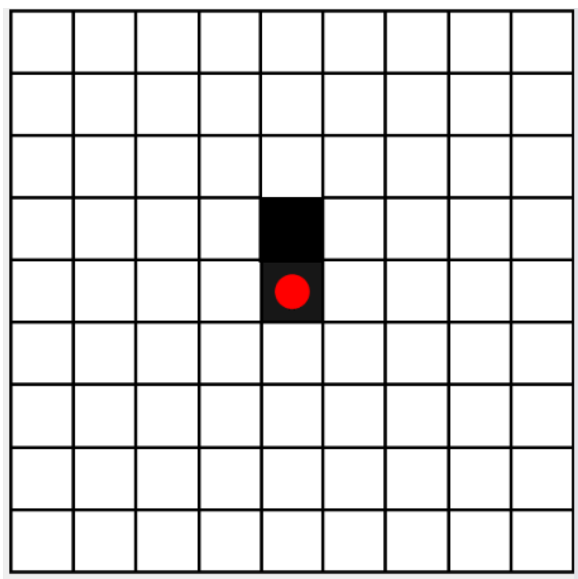


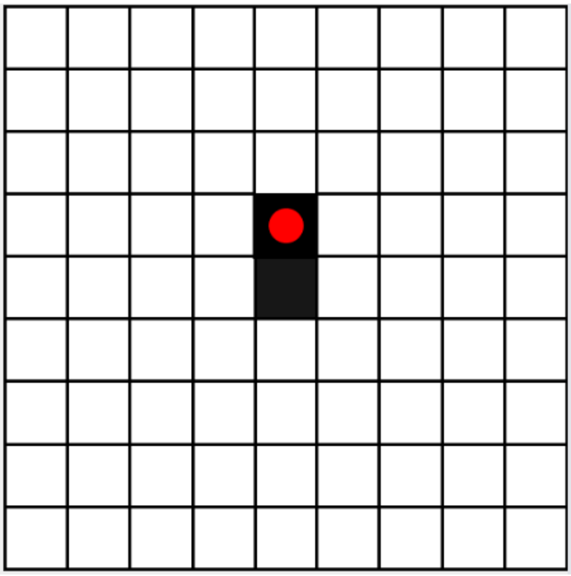
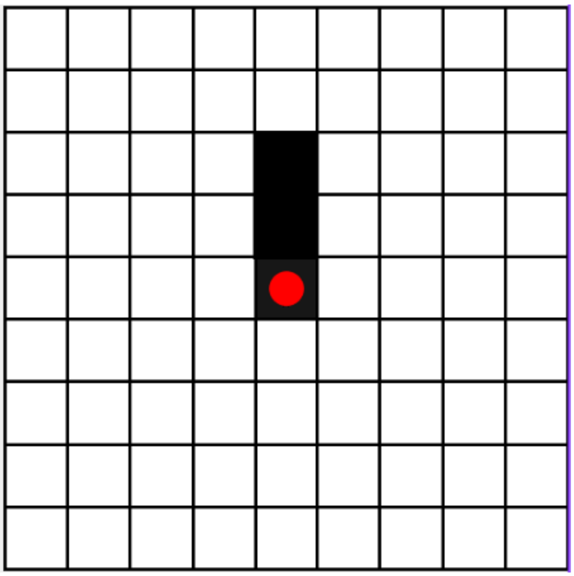
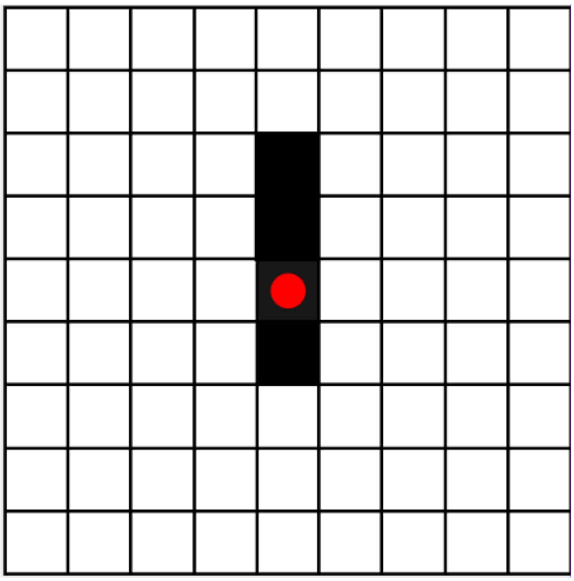
On appelle tour ou étape, le fait de colorier une case et de revenir au point de départ.

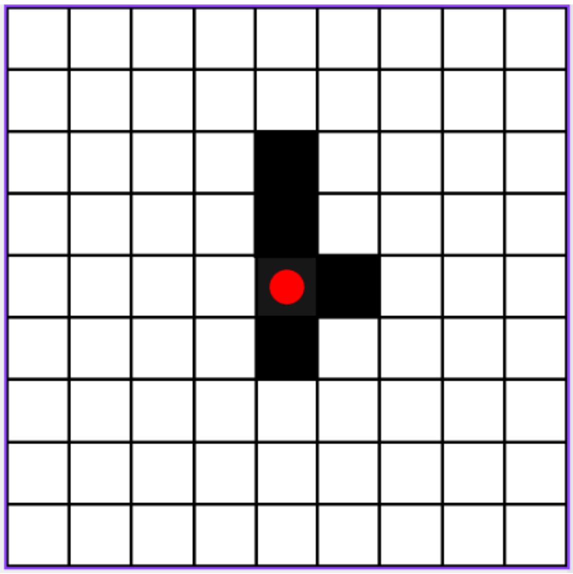
2.2. Premiers tests :

Au départ, il a fallu décider comment générer les déplacements. J'ai donc utilisé la calculatrice pour avoir une liste de valeurs aléatoires comprises entre 1 et 4 avec l'instruction randint(1,4).

Voilà ce que j’ai pu avoir : 1, 1 ,1, 1, 3, 2.
Ensuite j’ai décidé que le 1 serait le déplacement vers le haut, le 2 vers la droite, le 3 vers le bas et le 4 vers la gauche.
Voici donc la succession des déplacements provoqués par cette liste :

position de départ	
1	

1	
1	
3	

2	

On remarque que l'on obtient pas le disque voulu, mais on en n'est pas loin.
Cette façon de faire est plutôt longue et fastidieuse, donc rapidement j'ai fait un programme python pour simuler beaucoup d'étapes.

3. Simulation en python

3.1. Le programme :

Tout d'abord j'ai commencé par créer un programme Python pour modéliser la forme obtenue en un certain nombre de lancers.
La fenêtre de la calculatrice fait 320 pixels par 222. Le point (0;0) se trouve en haut à gauche et l'axe des ordonnées est dirigé vers le bas (donc quand y augmente, on descend).
Pour simuler un déplacement on a utilisé ce bout de code :

```
d= randint(1,4)
if d==1:
  x,y=haut(x,y)
if d==2:
  x,y=bas(x,y)
if d==3:
  x,y=gauche(x,y)
if d==4:
  x,y=droite(x,y)
```

Pour faire le déplacement, on a utilisé des fonctions qui testent si on sort de la calculatrice, puis qui se déplace ainsi :

```
def droite(x,y) :
  if x<319:
    return x+1,y
  else:
    draw_string("fini",0,200)
    exit()

def haut(x,y):
  if y>0:
    y=y-1
    return x,y
  else:
    draw_string("fini",0,200)
    exit()

def bas(x,y):
  if y<221:
    y=y+1
    return x,y
  else:
    draw_string("fini",0,200)
    exit()
```

Pour colorier les pixels, on a utilisé le module kandinsky ainsi :

```
if get_pixel(x,y)==blanc:
  set_pixel(x,y,noir)
  x,y=xc,yc
```

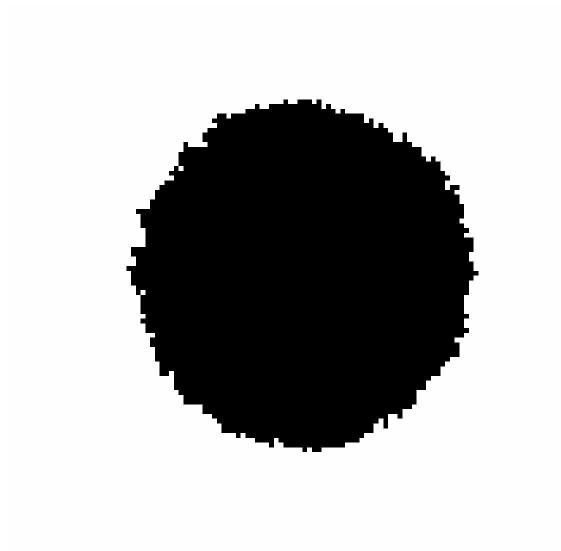
Ce programme permet donc ici de modéliser 10 000 lancers

```
#nombre d'etape
n=10000
x,y=xc,yc
set_pixel(x,y,noir)

for i in range (n):
  while get_pixel(x,y)==noir:
    d= randint(1,4)
    if d==1:
      x,y=haut(x,y)
    if d==2:
      x,y=bas(x,y)
    if d==3:
      x,y=gauche(x,y)
    if d==4:
      x,y=droite(x,y)
  if get_pixel(x,y)==blanc:
    set_pixel(x,y,noir)
    x,y=xc,yc
draw_string("fini",0,200))
```

3.2. La modélisation graphique

Ici on peut voir la forme que l'on obtient lorsque le programme s'exécute 10 000 fois.

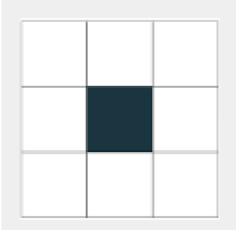


On remarque que la forme obtenue ressemble à un disque.

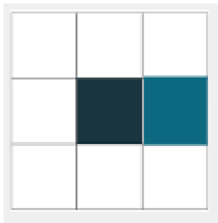
4. Calcul de la probabilité d'obtenir un disque de rayon 1

Un disque de rayon 1 est un disque dans lequel les 4 cases adjacentes à la case de départ sont colorées.

- Détaillons les étapes.
  - Etape 1 : on commence avec la position de départ qui est coloriée en noir, donc peu importe le déplacement, nous colorierons une case du disque.



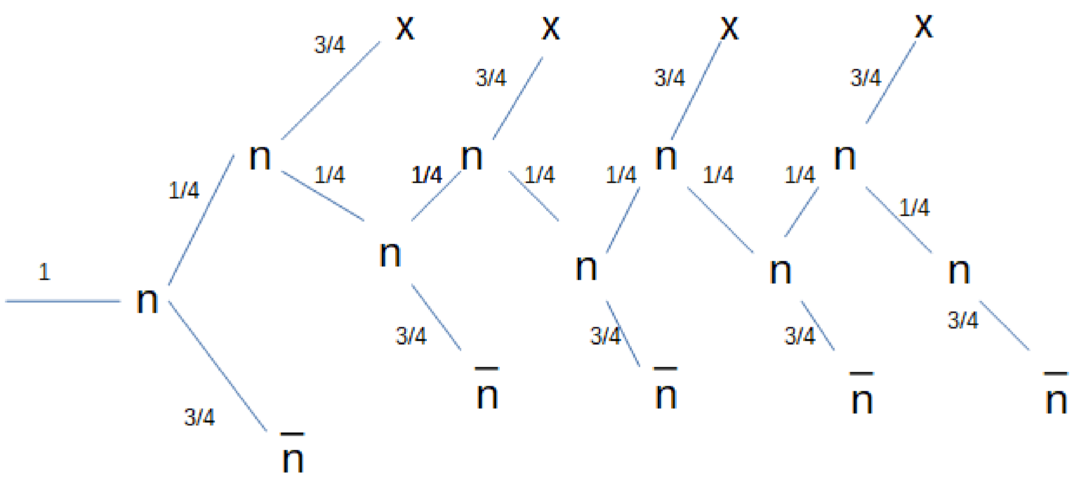
La probabilité de colorier une case du disque à l’étape 1 est donc de 1.
Supposons que nous ayons colorié la case de droite. (Cela n’a aucune importance car les dispositions sont symétriques.)
On obtient donc :



- Etape 2 : On peut soit tomber sur une case blanche avec un probabilité de $\frac{3}{4}$, soit tomber sur la seule case noire et donc recommencer un déplacement, dans ce dernier cas, il y a une chance sur 4 de revenir au point de départ, et 3 chances sur 4 de sortir du disque de rayon 1.

Si on note n l’événement : “je tombe sur une case noire”, $\underline{n}$ l’événement : “je tombe sur une case blanche du disque de rayon 1” et x l’événement : “je tombe sur une case blanche hors du disque de rayon 1”. On peut alors faire un arbre de probabilité infini (car je peux très bien faire des allers-retours entre le point de départ et la case noire). Pour des raisons de lecture, nous n’avons mis que les premières branches de cet arbre ci-dessous.

-



Je cherche $P(\underline{n})$. Dans cette situation, sur chaque niveau nous avons une partition de l’univers des possibles et donc je trouve $P(\underline{n})$ en ajoutant les probabilités de toutes les branches qui se terminent par $\underline{n}$.

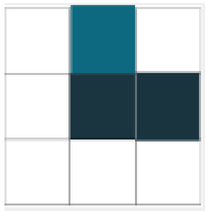
$P(n) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \ldots = \frac{3}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{3}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{16}\right)^k \times \frac{3}{4}$ (1) avec k un nombre entier naturel.

On peut écrire plus simplement cette somme car on remarque une certaine régularité : il s'agit d'une somme de suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$ et de premier terme $\frac{3}{4}$.

$P(n) = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{16}\right)^k \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{16}}$ or ceci tend vers $\frac{3}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{4}{5}$. (2)

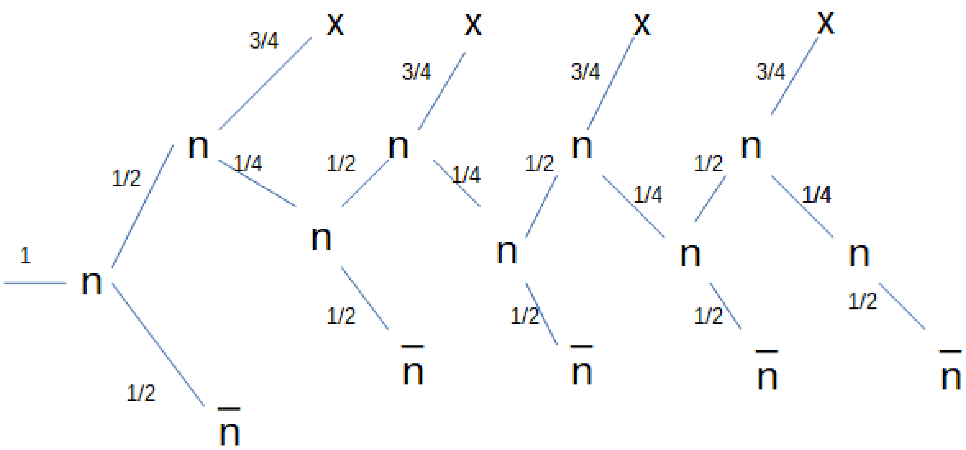
La probabilité de rester dans le disque de rayon 1 au bout de deux étapes est de $\frac{4}{5}$.

On va supposer que nous avons colorié la case du haut.



- Etape 3 : En partant de cette nouvelle configuration, en gardant les notations de l'étape 2, nous arrivons au même arbre pondéré mais avec des probabilités différentes. En effet, il y a une chance sur 2 de tomber sur une case blanche du disque de rayon 1, et si on est sur une des cases noires, il y a une chance sur 4 de revenir au point de départ.

Voici l'arbre de l'étape 3 :



De la même façon que précédemment, on peut calculer la probabilité de colorier une case blanche du disque de rayon 1.

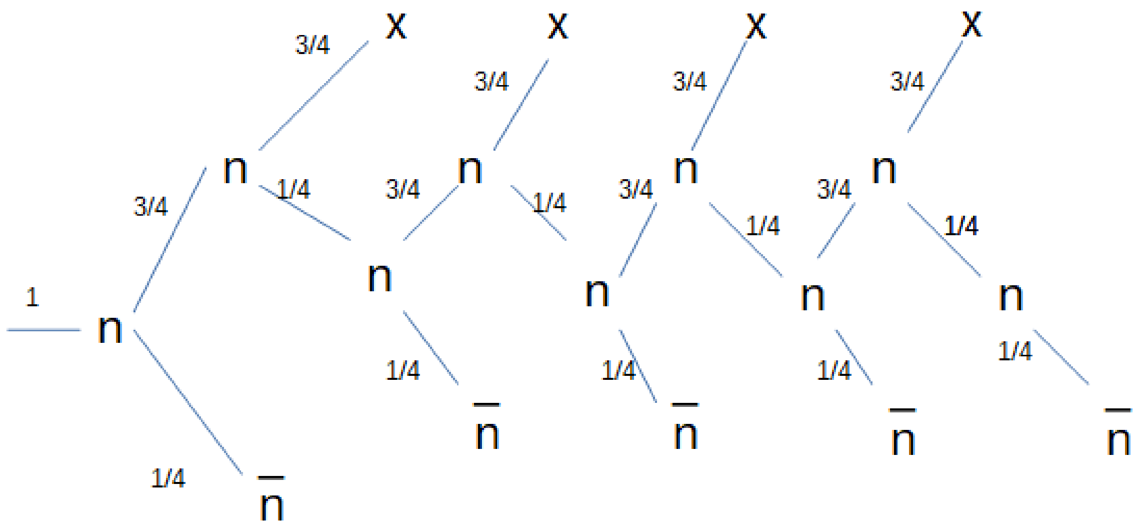
On trouve

$P(n) = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right)^k \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{8}}$ qui tend vers $\frac{4}{7}$. (3)

La probabilité de rester dans le disque de rayon 1 au bout de trois étapes est de $\frac{4}{7}$.

On va supposer que nous avons colorié la case de gauche.

- Etape 4 : il faut finir le disque. On utilise la même technique.



On trouve $P(n) = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right)^k \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{3}{16}\right)^{k+1}}{1-\frac{3}{16}}$ qui tend vers $\frac{4}{13}$. (4)

La probabilité de rester dans le disque de rayon 1 au bout de quatre étapes est de $\frac{4}{13}$.

5. Conclusion

La probabilité de rester dans le disque de rayon 1 durant les 4 étapes correspond à la multiplication des probabilités précédentes, on obtient donc :

$$\frac{4}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{13} = \frac{64}{455} \simeq 0{,}14$$

On a donc une probabilité d'environ 14 % de réussir un disque en 4 étapes.

6. Et pour poursuivre ?

Bien entendu, lorsque l'on fait un certain nombre de fois l'expérience, on remarque que le résultat n'est pas un disque parfait, car les bordures ne sont pas très régulières.
Pour poursuivre, j'aimerai voir la probabilité pour faire un disque de rayon 2 en 12 étapes.

Notes d'édition

(1) L'auteur oublie de mettre une limite sur cette deuxième expression de P(n) (dans la première, la limite est implicitement cachée dans les trois petits points à la fin). En effet P(n) est la limite quand k tend vers l'infini de cette expression.

(2) Ici encore, l'auteur oublie de mettre une limite sur k.

(3) Ici encore, l'auteur oublie de mettre une limite sur k.

(4) Ici encore, l'auteur oublie de mettre une limite sur k.