Les tactiques de TIC & TAC !

Année 2023- 2024

Violette BERGEOT, élève de 3ème.
Alexane BROGARD-VALENTIN, Arman ASATRYAN, Garance CHENOT, Gaspard DENIEL, Louise CHAMPAGNAT, Timothé BELTRAMO, élèves de 4ème.
Alexis COEURCHINOUX-ZAZBINSEC, Anaé GRANDJEAN, Andréa MARNE-HEINRICH, Gabrielle GRADECK, Sacha RAY, élèves de 5ème.

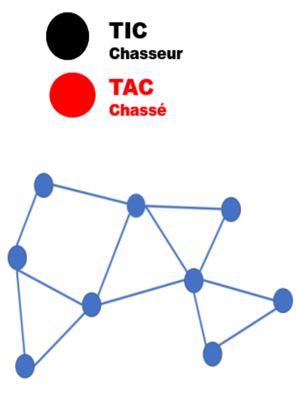
Encadrés par HIRIART Louisette, FINDIK Ziya

Établissement : Collège George CHEPFER de VILLERS lès NANCY

Chercheuse : Marie DUFFLOT-KREMER, LORIA Nancy.

1. Présentation du sujet

Sur un graphe, **TIC (pion noir)** se place le premier sur un sommet qu'il choisira puis **TAC (pion rouge)** se place sur un autre sommet qu'il aura convenablement choisi**. TIC** part à la chasse de **TAC**.



Il s'agit d'un jeu de course-poursuite de **TIC, le chasseur** contre **TAC, le chassé**. Les déplacements se font à chaque fois d'un sommet à un sommet voisin du graphe le long d'une arête, à tour de rôle d'abord **TIC** puis TAC, *sans possibilité de rester sur place*. **TIC** doit attraper **TAC,** c'est-à-dire arriver sur le même sommet que **TAC**.

Sur un graphe donné, si **TIC** peut attraper **TAC** quelle que soit la façon de jouer de **TAC,** on dira que **TIC a une stratégie gagnante et que le graphe est TIC-gagnant**. Dans le cas contraire, si **TAC** arrive indéfiniment à éviter **TIC** quelle que soit la façon de jouer de **TIC**, on dira que **TAC a une stratégie gagnante et le graphe est TAC-gagnant**.

Le but de cet exposé est de déterminer si un graphe est **TIC-gagnant** ou **TAC-gagnant** et de trouver peut-être certaines caractéristiques de ces graphes !

2. Sommaire

A – Certains graphes sont de manière évidente TIC-gagnants ou TAC-gagnants.

1) Une chaîne est un graphe **TIC-gagnant.**

2°) Un cycle de longueur 3 est un graphe **TIC-gagnant.**

3°) Un cycle seul de longueur ≥ 4 est un graphe **TAC-gagnant.**

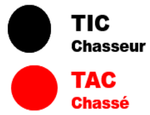
4°) Un graphe non connexe est **TAC-gagnant.**

5°) Un graphe complet est **TIC-gagnant.**

6°) Un arbre est **TIC-gagnant.**

7°) Un graphe en forme de cerf-volant est **TAC-gagnant**.

8°) Un graphe en forme de roue est **TIC-gagnant.**



B – Quelques propriétés :

1°) Concernant les graphes dont un sommet est relié à tous les autres.

2°) Concernant des graphes contenant un cycle de longueur ≥ 4.

3°) Concernant des graphes où **TAC** peut jouer « symétriquement » par rapport à **TIC.**

4°) Concernant des graphes coloriables de deux couleurs.

C – Des graphes TIC-gagnant ou TAC-gagnant :

De nombreux graphes étudiés et proposés au congrès sur notre stand !

3. Conclusion

Ce sujet nous a permis de parcourir un large éventail de graphes, mais nous n'avons pas su trouver les caractéristiques générales pour des graphes **TIC-gagnant** ou **TAC-gagnant** si elles existent avec notre règle du jeu.

Nous n'avons trouvé que quelques résultats pour des cas particuliers de graphes.

Pour un dernier graphe, nous n'avons pas réussi à trouver la stratégie pour **TIC** ou **TAC** avec certitude, tout en sachant qu'il en existe forcément une. Le congrès nous a permis de soulever cette difficulté et de donner une stratégie gagnante pour **TAC** à ce graphe.

Développement

Une première remarque :

Un graphe sera toujours soit **TIC-gagnant**, soit **TAC-gagnant**, **TIC** et **TAC** jouant de la manière la plus favorable :

- **TIC** pour attraper **TAC** au bout d'un certain nombre de tours,
- **TAC** en essayant de s'échapper indéfiniment.

A – Certains graphes sont de manière évidente TIC-gagnants ou TAC-gagnants.

1) **Une chaîne** est un graphe **TIC-gagnant.**

Une chaîne ressemble à une corde à nœuds , où les nœuds sont des sommets du graphe et où il y a un nœud à chaque extrémité de la corde. Sa longueur sera égale aux nombres d'arêtes qui la constituent.

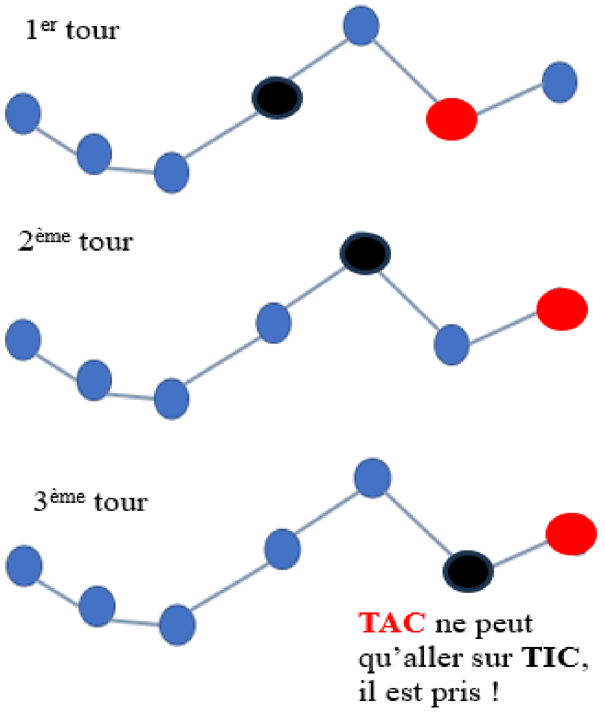


Fig 1 (Un exemple de chaîne de longueur 6)

Sur la chaîne représentée figure 1, **TIC** va se placer vers le milieu de la chaîne, puis **TAC** sur un des 2 bouts de la chaîne à une distance ≥ 2 de **TIC** pour ne pas être attraper par **TIC** au tour suivant**.**

Puis **TIC** va s'approcher de **TAC** et **TAC** va s'éloigner jusqu'à un moment où il sera en fin de chaîne et finira par être pris par **TIC.**

Une chaîne est donc un graphe **TIC-gagnant.**

2°) **Un cycle de longueur 3** est un graphe **TIC-gagnant.**

Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités sont un même sommet du graphe. Sa longueur est égale au nombre d'arêtes.

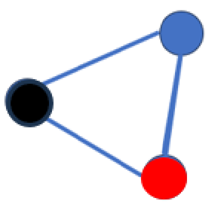


Fig. 2 (cycle de longueur 3)

Pour ce cycle de longueur 3, **TIC** va se placer sur un des sommets du cycle.

TAC ne pourra alors que se placer sur un des deux sommets voisins de **TIC**.

TIC va l'attraper immédiatement au 2ème tour en se plaçant sur le même sommet que lui. C'est donc un graphe **TIC-gagnant.**

3°) **Un cycle seul de longueur ≥ 4** est un graphe **TAC-gagnant.**

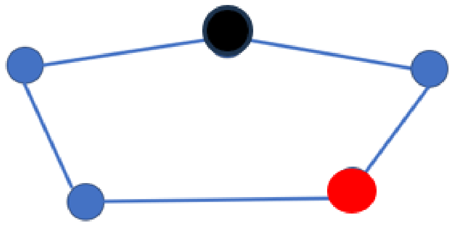


Fig. 3

TIC va se placer sur n'importe quel sommet du cycle de longueur ≥ 4.
TAC pourra toujours se placer sur un sommet du cycle à une distance ≥ 2 de **TIC** que ce soit dans un sens ou dans l'autre du cycle.

Puis **TIC** se déplace dans un sens sur le cycle pour attraper **TAC**, **TAC** va alors faire de même dans le même sens que **TIC.** Ainsi **TAC** se trouvera toujours à une distance ≥ 2 de **TIC** dans les deux sens du cycle et ne pourra donc jamais être attrapé pas **TIC**.

4°) **Un graphe non connexe** est un graphe **TAC-gagnant.**

Un graphe non connexe est un graphe constitué d'au moins 2 sous-graphes non reliés l'un à l'autre par une arête, par exemple comme sur la figure 4 par un cycle de longueur 3 et un cycle de longueur 4 non reliés l'un à l'autre par une arête.

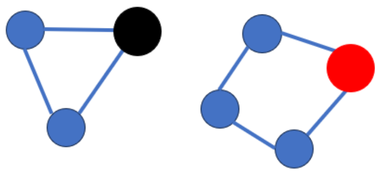


Fig. 4

TIC va se placer sur n'importe quel sommet d'un des deux sous-graphes par exemple le cycle de longueur 3.
TAC se placera alors sur n'importe quel sommet sur l'autre sous-graphe, le cycle de longueur 4.

Ainsi, comme il n'existe pas d'arête reliant ces 2 sous-graphes, **TIC** restera toujours sur le cycle de longueur 3 et **TAC** sur celui de longueur 4. **TIC** ne pourra donc jamais attraper **TAC**.

Dans la suite de l'exposé, tous les graphes seront connexes (en un seul morceau).

5°) **Un graphe complet** est un graphe **TIC-gagnant.**

Un graphe complet est un graphe dans lequel chacun des sommets est relié à tous les autres sommets du graphe.

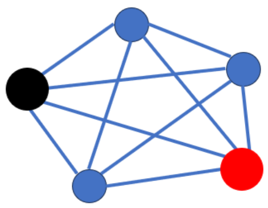


Fig. 5

TIC va se placer sur n'importe quel sommet du graphe. Quelque soit le sommet du graphe sur lequel va se placer **TAC**, ce sera un sommet voisin de **TIC**. **TIC** va attraper **TAC** au tour suivant.

Remarque : Un cycle de longueur 3 est un graphe complet et est donc **TIC-gagnant** comme nous l'avons déjà vu.

6°) **Un arbre** est un graphe **TIC-gagnant.**

Un arbre est un graphe fini connexe (en un seul morceau) qui ne possède aucun cycle.

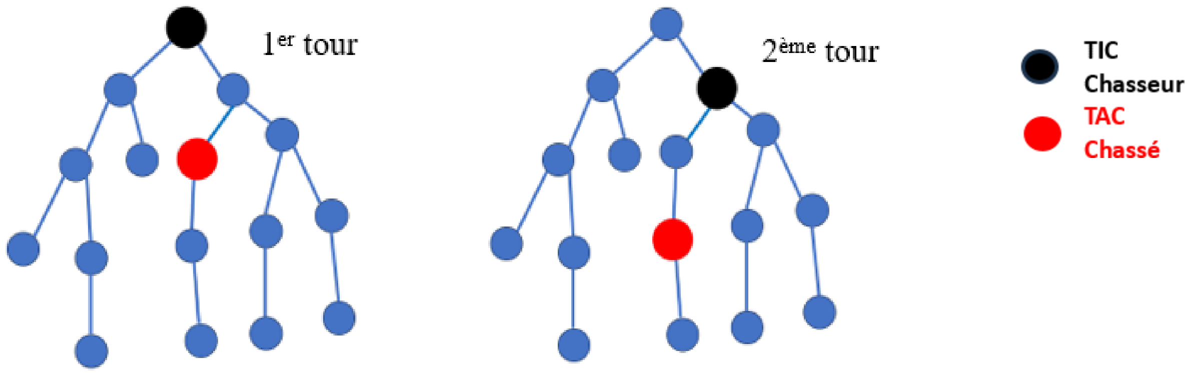


Fig. 6

Au 1er tour, **TIC** va se placer au départ de tous les embranchements puis **TAC** va se placer sur une des chaines qui y partent à une distance ≥ 2 de **TIC** pour ne pas être attraper immédiatement après.
Au 2ème tour, **TIC** se rapproche de **TAC** puis pour s'échapper, **TAC** va se déplacer sur la chaîne sur laquelle il se trouve. (Fig. 6)
TAC va finir à la fin par se faire attraper par **TIC** comme sur une chaîne.

7°) **Un graphe en forme de cerf-volant contenant un cycle de longueur 4** est **TAC-gagnant**.

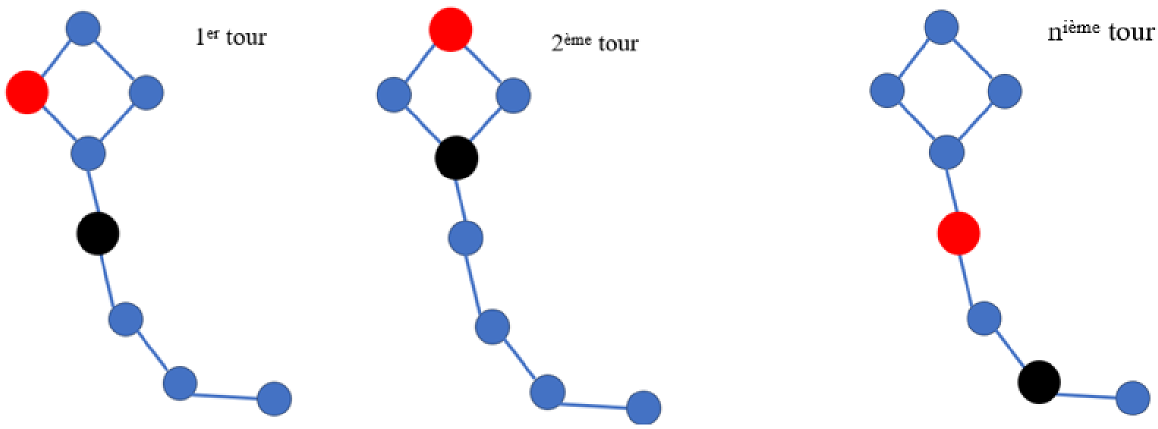


Fig. 7

TIC qui démarre, se place sur n'importe quel sommet du graphe. La stratégie de **TAC** va être de se placer du côté du cycle de longueur 4 à une distance égale à 2 de **TIC** (1et tour de figure 7)
Si à un moment donné, **TIC** descend dans la chaîne, **TAC** le suit pour rester toujours à une distance égale à 2 de **TIC** (nième tour de la figure 7). Si **TIC** remonte, **TAC** aussi toujours à une distance égale à 2 de **TIC**.
Ainsi, **TAC** sera toujours bien positionné quand **TIC** retournera dans le cycle de longueur 4 pour ne jamais se faire attraper par **TIC**. **TAC** pourra toujours se placer sur le sommet opposé du cycle de longueur 4 d'où se trouve **TIC** et être à une distance 2 de **TIC** et ne jamais se faire prendre.
TAC ne descendra jamais dans la chaîne avant **TIC** pour ne pas se faire attraper en fin de chaîne.
Avec cette stratégie **TAC** va indéfiniment pouvoir s'échapper.

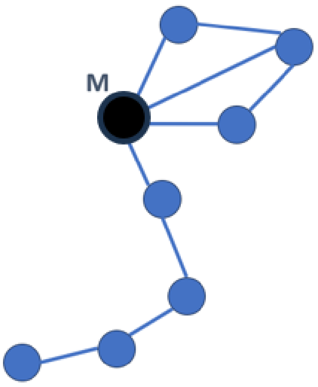
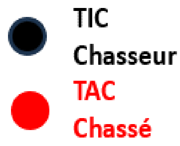


Fig. 8

Cependant, le graphe en forme de cerf-volant de la figure 8 est **TIC-gagnant** car il n'y a pas de cycle de longueur ≥ 4.
En effet, **TIC** se place sur le sommet M du graphe.
Si **TAC** se place sur la chaîne, il sera attrapé par **TIC** comme sur on l'a déjà vu pour une chaîne.
Si **TAC** se place sur un sommet d'un des cycles de longueur 3, il sera sur un sommet voisin de **TIC** et va être attrapé par **TIC.**
Dans les deux cas, **TAC** ne pourra s'échapper et sera pris par **TIC**.

8°) **Un graphe en forme de roue** est **TIC-gagnant.**



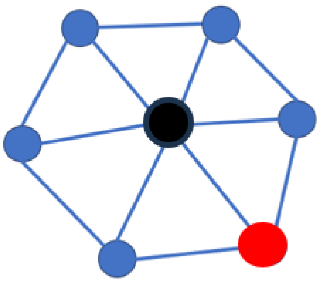


Fig. 9

Sur ce graphe en forme de roue, **TIC** va se placer au centre de la roue.
TAC n'aura d'autre choix que de se placer sur un sommet voisin de celui où est **TIC**.
TIC va alors l'attraper au tour suivant.
TAC n'a aucune échappatoire.

B – <u>Quelques résultats :</u>

1°) Graphe dont un sommet est relié à tous les autres :

Tout graphe dont un sommet a pour voisins tous les autres sommets du graphe est **TIC-gagnant**.

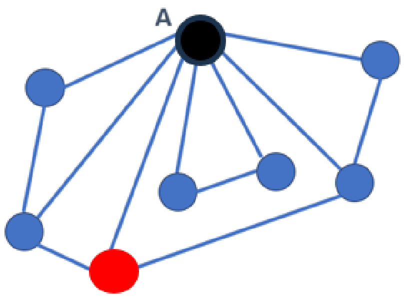


Fig. 10

Sur le graphe de la figure 10, le sommet A est relié à tous les autres sommets du graphe par une arête, il a donc pour sommets voisins tous les autres sommets du graphe.
Comme pour le graphe en forme de roue, **TIC** va se placer sur le sommet A.
TAC n'aura d'autre choix que de se placer sur un sommet voisin de celui où est **TIC**. **TIC** va alors l'attraper au tour suivant.
TAC n'a aucune échappatoire.

2°) Graphe contenant un cycle de longueur ≥ 4 :

Un graphe contenant un cycle de longueur ≥ 4 n'est pas <u>nécessairement</u> **TAC-gagnant.**

Nous avons vu qu'un cycle seul de longueur ≥ 4 est un graphe **TAC-gagnant** au paragraphe A – 3°)
Nous allons voir que n'est plus vrai pour un graphe contenant un cycle de longueur ≥ 4.

a) Pour des graphes de longueur 4 :
Nous avons vu que le graphe en forme de cerf-volant contenant un cycle de longueur 4 était **TAC-gagnant** (paragraphe A – 7°))
Etudions maintenant le graphe ci-dessous de la figure 11, il est formé d'un cycle de longueur 4 et du sommet A relié par 2 arêtes à 2 sommets consécutifs du cycle de longueur 3.

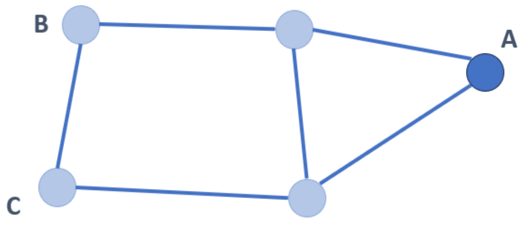


Fig. 11

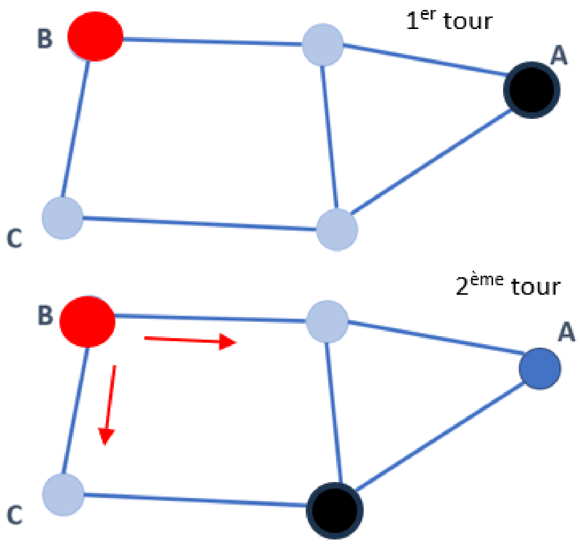


Fig. 12

Au 1er tour, **TIC** choisit de se placer au départ sur le sommet A.
TAC ne peut alors que se placer sur les sommets B ou C qui sont les deux seuls sommets non voisins du sommet A.
Au 2ème tour, la tactique de **TIC** va être de se placer dans le cycle de longueur 4 sur le sommet opposé de celui où est placé **TAC**.
TAC est alors coincé, il ne peut que se déplacer sur un sommet voisin de **TIC** et va être attrapé au tour suivant.
Ce graphe contenant un cycle de longueur 4 est donc **TIC-gagnant.**

Nous avons donc deux graphes contenant un cycle de longueur 4, l'un est **TIC-gagnant**, l'autre est **TAC-gagnant**.

b) De même pour des graphes contenant un cycle de longueur 5 :

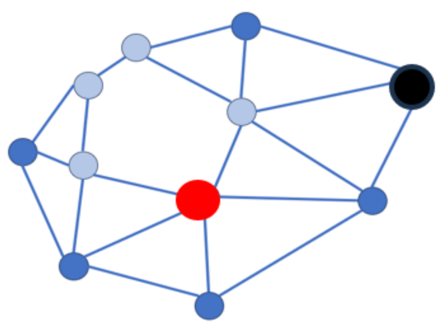


Fig. 13

Le graphe de la figure 13 qui contient un cycle de longueur 5 est **TAC-gagnant**.
La tactique de **TAC** pour sans cesse échapper à **TIC** va être de se placer toujours sur le cycle de longueur 5 à une distance ≥ 2 de **TIC**, quelque soit la position de **TIC** sur le graphe.
Remarque : Cette stratégie ne fonctionne que s'il n'existe aucune arête joignant deux sommets non consécutifs du cycle de longueur 5 comme on va le voir dans l'exemple suivant.

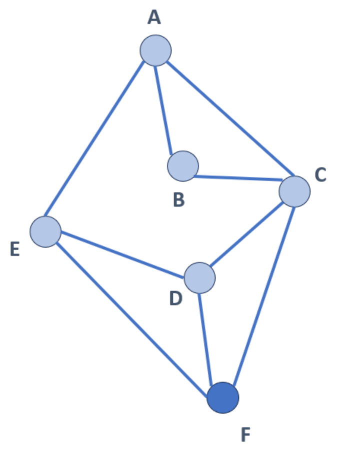
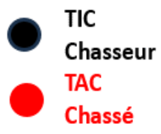


Fig. 14



Le graphe de la figure 14 qui contient un cycle de longueur 5 mais avec l'arête [AC] qui joint deux sommets non consécutifs du cycle 5.
Ce graphe est **TIC-gagnant**.
Au 1er tour, **TIC** va choisir de se placer sur le sommet D.
TAC n'a alors que le choix de se placer sur les sommets A ou B du graphe qui sont les 2 seuls sommets du graphe non voisins du sommet D.

▪ Si **TAC** se place sur le sommet A :
- au 2ème tour, **TIC** va choisir de se placer sur le sommet F et **TAC** ne peut que se déplacer en B pour ne pas aller sur un sommet voisin de F.
- au 3ème tour, **TIC** se déplace en C et **TAC** ne peut que se déplacer en A qui est un sommet voisin de C.
- au 4ème tour, **TIC** attrape **TAC** en allant sur le sommet A.

▪ Si **TAC** se place sur le sommet B :
- au 2ème tour, **TIC** va choisir de se placer sur le sommet C et **TAC** ne peut que se déplacer en A.
- au 3ème tour, **TIC** attrape **TAC** en allant sur le sommet A.

Quoique fasse **TAC**, **TIC** a une stratégie pour l'attraper.

Nous avons donc deux graphes contenant un cycle de longueur 5, l'un est **TIC-gagnant**, l'autre est **TAC-gagnant**.

Ces exemples illustrent la propriété énoncée.

3°) Graphes sur lesquels TAC peut jouer « symétriquement » par rapport à TIC :

a) Graphe avec un centre de symétrie

Un graphe qui a un centre de symétrie qui n'est pas un sommet du graphe et qui n'est pas sur une arête du graphe est **TAC-gagnant.**

Exemple :

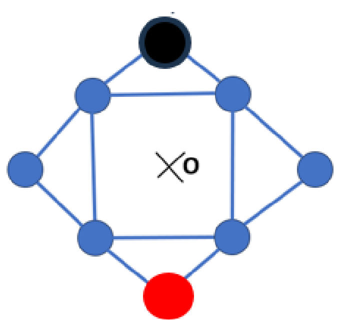


Fig. 15

Sur ce graphe où on peut considérer que le point O est un centre de symétrie, la stratégie de **TAC** pour indéfiniment échapper à **TIC** sera de se placer sur le sommet symétrique de celui où est placé **TIC,** par rapport au centre de symétrie.
Ce graphe est donc **TAC-gagnant**.

Cette stratégie ne fonctionne que si aucune arête ne joint 2 sommets symétriques du graphe et si le centre de symétrie n'est pas un sommet du graphe connexe.

b) Graphe avec un axe de symétrie

Un graphe qui a un axe de symétrie, dont aucune arête ne joint 2 sommets symétriques et aucun sommet n'est sur l'axe de symétrie est **TAC-gagnant.**

Exemple :

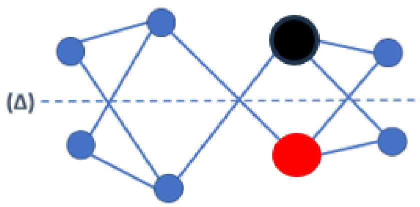


Fig. 16

Sur ce graphe où on peut considérer que la droite (Δ) est un axe de symétrie, la stratégie de **TAC** pour indéfiniment échapper à **TIC** sera de se placer sur le sommet symétrique de celui où est placé **TIC,** par rapport à l'axe de symétrie. Ce graphe est donc **TAC-gagnant**.

TIC
Chasseur
TAC
Chassé

Cette stratégie ne fonctionne que si aucune arête ne joint 2 sommets symétriques du graphe et si aucun sommet du graphe connexe n'est sur l'axe de symétrie.

c) Graphe avec ni centre, ni axe de symétrie !!!

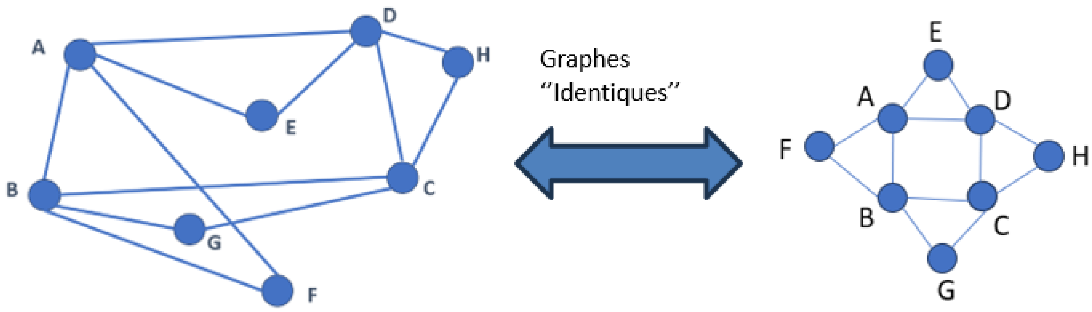


Fig. 17

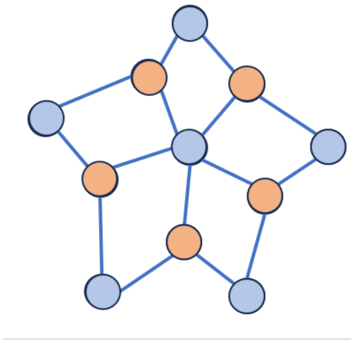
Les deux graphes de la figure 17 sont ''identiques''.
En effet, de chaque sommet partent le même nombre d'arêtes et allant vers les mêmes sommets du graphe.
Par exemple, du sommet A partent 4 arêtes vers les sommets B, D, E et F sur les deux graphes. C'est de même pour tous les sommets des 2 graphes.
On a vu que le graphe de droite est **TAC-gagnant** car **TAC** peut toujours éviter **TIC** en allant sur le sommet symétrique de celui où est placé **TIC** par rapport à un centre de symétrie.
TAC peut se déplacer de même sur le graphe de gauche que sur le graphe de droite.
Si **TIC** va sur le sommet A, **TAC** s'échappe sur le sommet C.
Si **TIC** va sur le sommet B, **TAC** s'échappe sur le sommet D.
Si **TIC** va sur le sommet F, **TAC** s'échappe sur le sommet H.
Si **TIC** va sur le sommet E, **TAC** s'échappe sur le sommet G.
Et inversement.

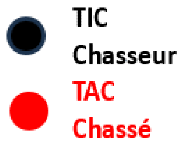
Un graphe où **TAC** peut jouer comme s'il était sur un graphe ayant un centre ou un axe de symétrie est TAC-**gagnant.**

3°) Graphes dont on peut colorier les sommets avec 2 couleurs seulement.

<u>Définition :</u> Un graphe sera **dit coloriable avec 2 couleurs** lorsque tous les sommets sont coloriés avec les 2 couleurs de façon que 2 sommets reliés par une arête sont de 2 couleurs différentes

Exemple :





Le graphe de la figure 18 est **coloriable avec 2 couleurs**.
Tous les sommets sont coloriés avec les 2 couleurs et il n'existe aucune arête joignant 2 sommets de la même couleur.

Fig. 18

> Un graphe dont on peut colorier les sommets avec deux couleurs seulement <u>et</u> dont il part au moins 2 arêtes de chaque sommet est **TAC-gagnant.**

En effet, **TIC** se plaçant en premier, la stratégie de **TAC**, quoique fasse **TIC** sera de se placer sur un sommet de la même couleur que **TIC** qui n'est pas celui où est **TIC**. C'est toujours possible puisqu'il part au moins deux arêtes de chaque sommet.
Comme il n'existe aucune arête joignant 2 sommets de la même couleur, **TAC** s'échappera indéfiniment en n'étant jamais sur un sommet voisin de celui où est **TIC.**

Remarque :

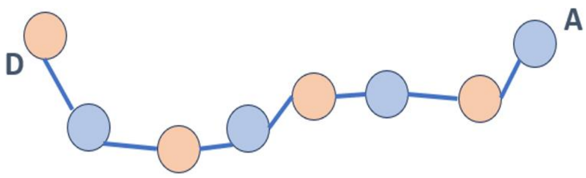


Fig. 19

La chaîne de la figure 19 est coloriable avec deux couleurs, elle est **TIC-gagnant** comme nous l'avons vu en début de l'article et non pas **TAC-gagnant** car il ne part pas 2 arêtes des deux sommets D et A aux extrémités de la chaîne.

Exemples de graphes coloriables de 2 couleurs **TAC-gagnant** :

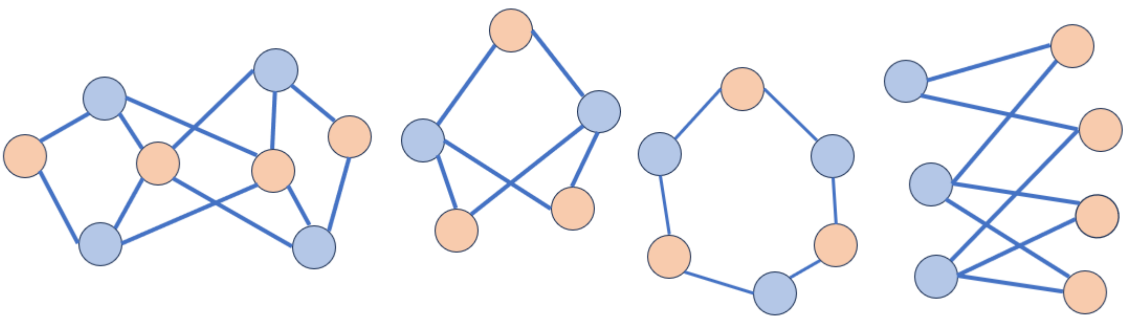


Fig. 20

Remarque : Le nombre de sommets d'un graphe coloriable de deux couleurs peut être pair ou impair.

Construction de graphes **TIC-gagnant** à partir d'un graphe coloriable en 2 couleurs et l'ajout d'un sommet supplémentaire.

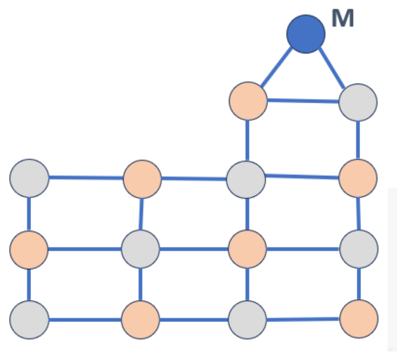


Fig. 21

Le graphe de la figue 21 ci-contre est constitué d'un graphe initial coloriable de 2 couleurs **TAC-gagnant**, auquel on a ajouté un sommet supplémentaire M relié à 2 sommets voisins du graphe initial.
Ce graphe devient alors **TIC-gagnant.**
En effet, au 1er tour, **TIC** choisit de se placer sur le sommet M et **TAC** se place alors sur un sommet quelconque du graphe à une distance ≥ 2 du sommet M.
Au 2ème tour et tout au long de la partie, la stratégie de **TIC** sera alors de se placer sur un sommet de la même couleur que le sommet où est **TAC**.

Au bout d'un certain nombre de tour, quel que soit la manière de jouer de **TAC**, **TIC** va réussir à coincer **TAC** dans un coin du graphe ou bien dans le cycle de longueur 3 et **TAC** sera attrapé par **TIC** car il n'aura d'autre choix possible que de se placer sur un voisin du sommet où est **TIC.**

<u>Remarque :</u>
Il ne faut pas généraliser trop vite cette méthode de construction de graphe TIC-gagnant.

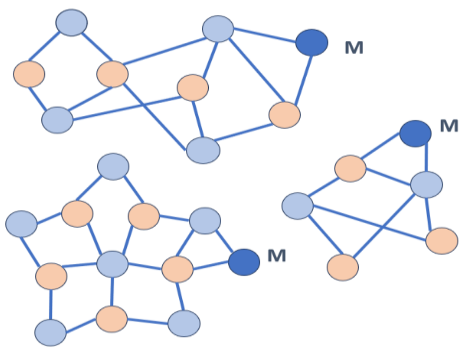


Fig. 22

Les 3 graphes de la figue 22 sont bien **TIC-gagnant**.

On remarquera pour les 3 graphes que le graphe initial coloriable de 2 couleurs n'est constitué que de cycles de longueur 4. La stratégie de **TIC** sera celle décrite ci-dessus.

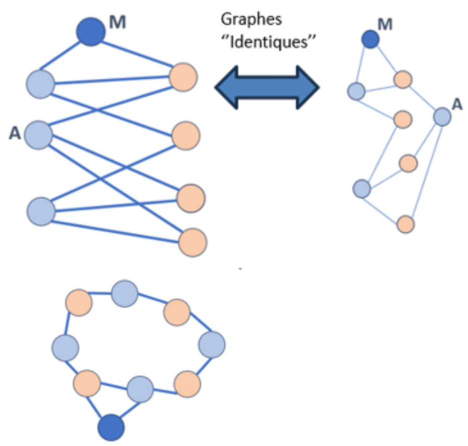


Fig. 23

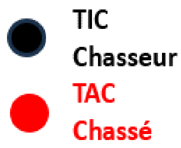
Les 2 graphes de la figure 23 restent **TAC-gagnant** comme les graphes coloriables de 2 couleurs, l'ajout du sommet A ni change rien.

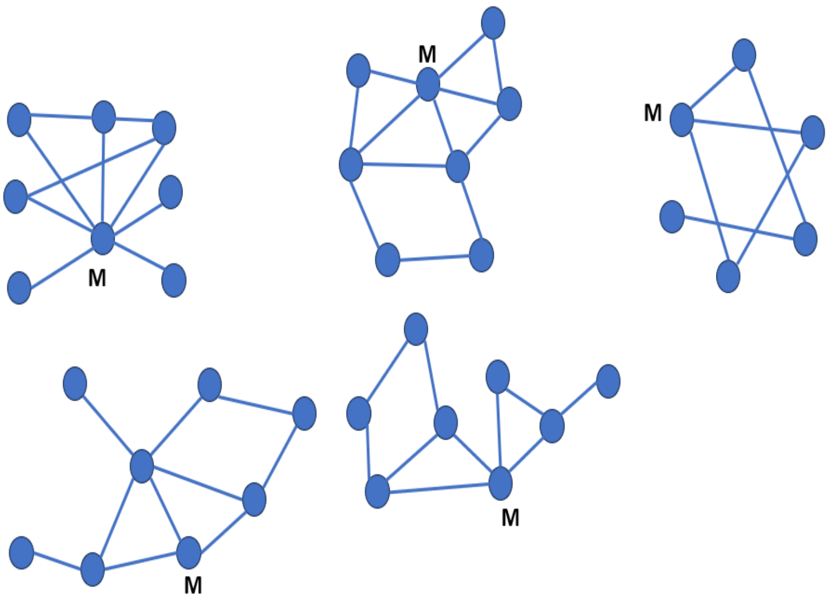
On remarquera que ces graphes contiennent des cycles de longueur 6 ou 8 sans aucune arête à l'intérieur. La tactique de **TAC**, quel que soit la façon de jouer de **TIC** sera de toujours se placer sur le cycle de longueur 6 ou 8 à une distance ≥ 2 du sommet où est **TIC** dans les deux sens du cycle pour ne jamais se faire attraper.

C – Des graphes TIC-gagnant ou TAC-gagnant :

Sur notre stand, en plus des graphes étudiés précédemment, nous avons proposés de nombreux graphes demandant au public de trouver une stratégie gagnante pour **TIC** ou **TAC**.

1°) Les graphes **TIC-gagnant** :





Ces 5 graphes sont **TIC-gagnant.**
Au départ, **TIC** se place sur le sommet M, **TAC** ne pourra s'échapper quoiqu'il fasse. (Voir les stratégies de base dans le paragraphe A).

Fig. 24

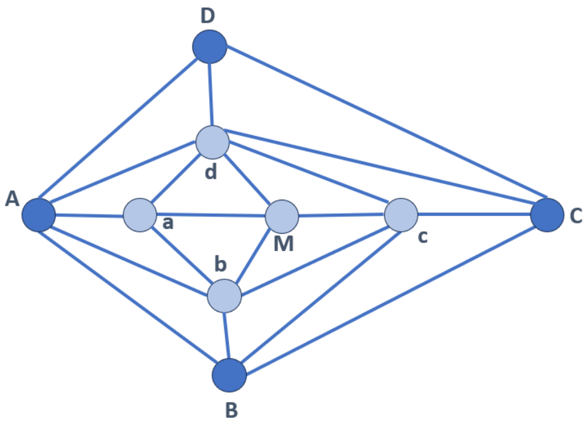


Fig. 25

Le graphe de la figure 25 est **TIC-gagnant**.
Il est constitué du graphe avec les sommets en bleu ciel où le sommet M est relié au 4 autres sommets a, b, c et d)) auquel on a ajouté les sommets A, B, C et D.
TIC démarre en se plaçant sur le sommet M qui est relié à tous les sommets en bleu ciel. Quoique fasse **TAC** pour ne pas se faire attraper, **TIC** réussira toujours à obliger **TAC** à se placer à la fin sur le sommet D (''piège''). **TIC** pourra alors se placer sur le sommet d et attrapera **TAC** au tour d'après car **TAC** ne pourra se déplacer que sur A ou C qui sont voisins du sommet d.

La stratégie de **TIC** qui est en M sera la suivante :
- Si **TAC** va en A, **TIC** ira en a,
- Si **TAC** va en B, **TIC** ira en b,
- Si **TAC** va en C, **TIC** ira en c,
- Si **TAC** va en D, **TIC** ira en d, **TAC** ne pourra alors qu'aller en A ou C et il sera pris car les sommets A et C sont des voisins du sommet d.

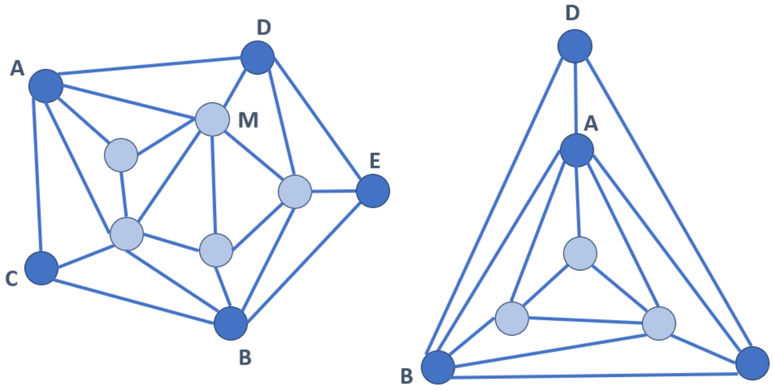


Fig. 26

Les deux graphes de la figure 26 sont également **TIC-gagnant**.
Sur le 1er, **TIC** devra démarrer sur le sommet M, il arrivera toujours amener **TAC** en en C ou en E (″pièges″) où ce dernier sera coincé.
Sur le 2ème, **TIC** se placera au départ sur un sommet en bleu ciel et arrivera toujours amener **TAC** en D (″piège″) où il sera également coincé.

2°) Les graphes **TAC-gagnant** :

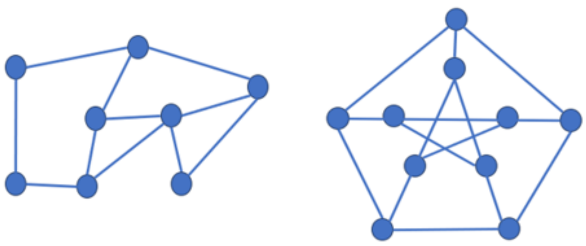


Fig. 27

Les deux graphes de la figure 27 sont **TAC-gagnant** car ils possèdent tous les deux au moins un cycle de longueur 5 sans aucune autre arête qui relie 2 sommets non consécutifs d'un de ces cycles de longueur 5.
Comme on l'a vu dans le paragraphe A, la stratégie de **TAC** sera de toujours se trouver sur ce cycle à une distance ≥ 2 de **TIC**.

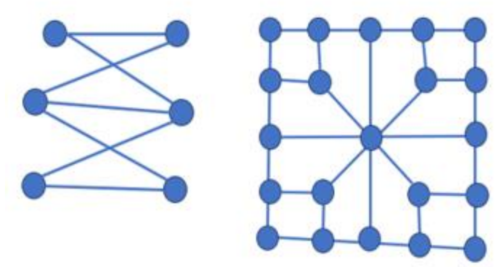


Fig. 28

Les deux graphes de la figure 28 sont **TAC-gagnant** car ils sont tous les deux coloriables de 2 couleurs.
Comme on l'a vu au paragraphe A, la stratégie de **TAC** sera de toujours se placer sur un sommet de même couleur que **TIC**.

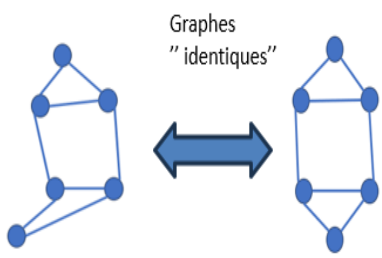


Fig. 29

Le graphe de la figure 29 est **TAC-gagnant**.
TAC peut se déplacer comme s'il était sur un graphe ayant un centre de symétrie.

Pour un dernier graphe (figure 30), nous pensions qu'il était **TAC-gagnant** mais n'avions pas réussi à trouver la stratégie pour **TAC** avec certitude, tout en sachant qu'il en existe forcément une. Le congrès nous a permis de soulever cette difficulté et de donner une stratégie gagnante pour **TAC**. Nous vous la proposons pour finaliser cet exposé.

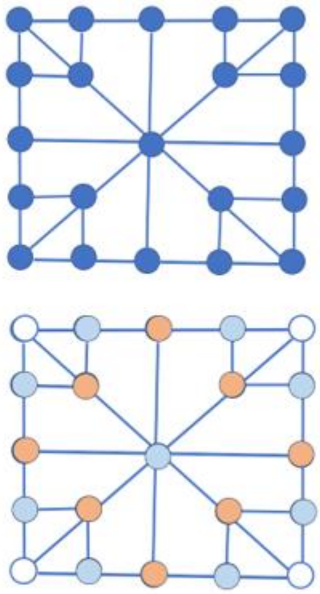


Fig. 30

L'idée est de commencer à colorier les sommets de 2 couleurs, il reste les 4 sommets aux 4 coins qui ne peuvent être coloriés comme le montre la figure 30

- Si **TIC** se place sur un sommet d'une des 2 couleurs (bleu ou rose), **TAC** se placera sur un sommet de même couleur et sur un des 2 cycles de longueur 4 sur lequel se trouve **TIC**. **TIC** ne peut attraper **TAC**. Ce positionnement de **TIC** et **TAC** est une configuration gagnante pour **TAC** après son tour.

- Si **TIC** se place sur un sommet en blanc, **TAC** pourra se positionner sur un sommet à une distance 1 d'un autre sommet blanc.
Le tour d'après, **TIC** se positionnera sur un sommet voisin de couleur bleu ou rose.

▪ soit **TAC** peut se placer sur un sommet de la même couleur que **TIC**, il ne sera pas sur un même cycle de longueur 4 que **TIC**, mais il pourra s'y remettre les tours suivants, et retrouver sa position gagnante. (Voir l'exemple de la figure 31)

▪ Sinon **TAC** se placera sur le sommet blanc voisin.
Le tour d'après, **TIC** se placera sur une autre couleur que celle où il était et **TAC** pourra se positionner sur un sommet voisin de celui où il est de la même couleur que **TIC**. De même que précédemment , **TAC** ne sera pas forcément sur un même cycle de longueur 4 que **TIC**, mais il pourra s'y remettre les tours suivants, et retrouver sa position gagnante.

En respectant ces consignes, **TAC** pourra indéfiniment éviter **TIC**. Ce graphe est donc bien **TAC-gagnant**.

Exemple de jeux :

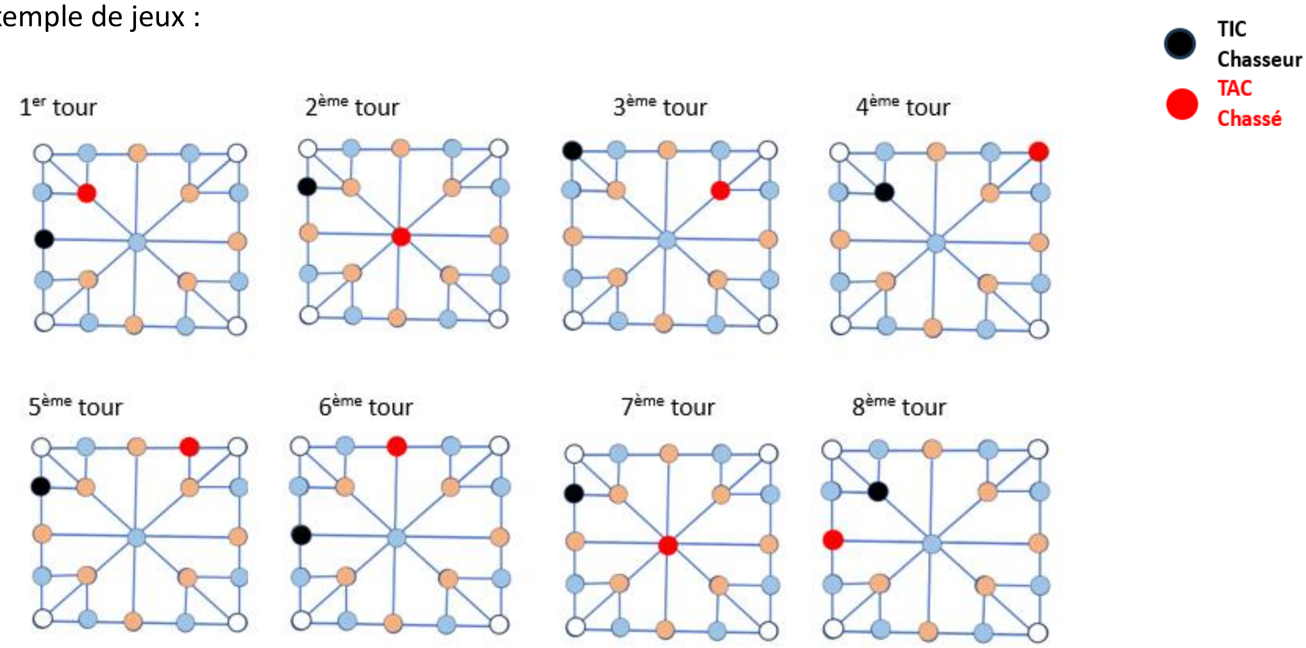


Fig. 31

Ce sujet nous a permis de parcourir un large éventail de graphes. Nous n’avons pas su trouver les caractéristiques générales pour des graphes **TIC-gagnant** ou **TAC-gagnant** si elles existent avec notre règle du jeu.
Nous n’avons trouvé que quelques résultats pour des cas particuliers de graphes, notamment pour les graphes coloriables de deux couleurs toujours **TAC-gagnant**.
Pour un dernier graphe, nous n’avions pas réussi à trouver la stratégie pour **TIC** ou **TAC** avec certitude, tout en sachant qu’il en existe forcément une. Le congrès nous a permis de soulever cette difficulté et de donner une stratégie gagnante pour **TAC**.

Remerciements

Nous tenons à remercier tous nos partenaires :

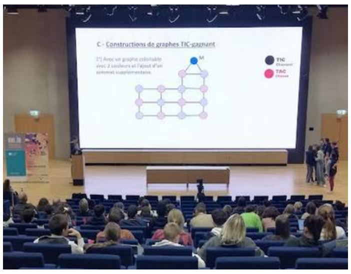
- l’association MATh.en.JEANS
- le rectorat
- le collège G. Chepfer
- le FSE du collège G. Chepfer
- l’INRIA
- l’université du Luxembourg
- la région Grand Est
- le département 54

Sans leurs soutiens, le voyage au congrès à la faculté des Sciences du Luxembourg (campus Belval à Esch sur Alzette) n’aurait pas été possible.

Nous remercions aussi chaleureusement notre chercheuse Marie Duflot-Kremer, pour le choix de ce sujet de recherche, son aide bienveillante tout au long de l’année et son dynamisme.

Photos des élèves du collège G. Chepfer de Villers lès Nancy

Devant la Maison du Savoir
Campus Belval Esch sur



Présentation dans l’auditorium
de la Maison du Savoir

Echanges sur le forum