Les diamants sont éternels …
… mais ont un prix.

Année 2023 – 2024

Ariane Barbe-Almori, Lise Burguès, Ana Dutouquet-Moreau, Élodie Gonzalez Do Nascimento, Lila Levasseur, Brunhilde Marchal-Bessat, Clémence Rousseau, Clémentine Roy,
élèves de 4^e et 3^e.

Établissements : Collèges Alain-Fournier et Alexander Fleming, Orsay.

Enseignantes : Florence Ferry et Delphine Filllion.

Chercheurs : Emmanuel Kammerer, École Polytechnique et Balthazar Fléchelles, IHÉS.

Le sujet : Le prix du diamant est proportionnel au carré de sa masse. Selon quelles proportions doit-on découper un diamant en deux pour que le prix devienne minimal ? et en trois morceaux ? et en n morceaux ? Le prix d'un saphir est proportionnel au cube de sa masse. Le découpera t-on de la même manière ?

Résultats : nous avons démontré que le prix du diamant était minimal lorsqu'il était coupé en des parties de même masse. Pour le saphir nous avons conjecturé un résultat identique sans arriver à le démontrer.

Dans toute la suite de notre article nous utiliserons les notations suivantes :

- M : la masse du diamant initial
- M_i : la masse du morceau numéro i
- P : le prix du diamant initial
- P_i : le prix du morceau numéro i

I – On coupe le diamant en deux parties

1 – Exemples

Prenons un diamant de masse $M = 10\text{ g}$ pour un prix $P = 100\,€$.
D'après le sujet, nous pouvons faire le tableau de proportionnalité suivant :

Masse au carré en g	100
Prix en €	100

Le coefficient de proportionnalité est 1. (1)

On partage par exemple ici le diamant en deux morceaux : un de 2 g et un de 8 g.
Prix de ces deux morceaux ajoutés : $2^2 + 8^2 = 4 + 64 = 68\,€$. Ces deux morceaux ensemble valent donc moins cher que le diamant entier.

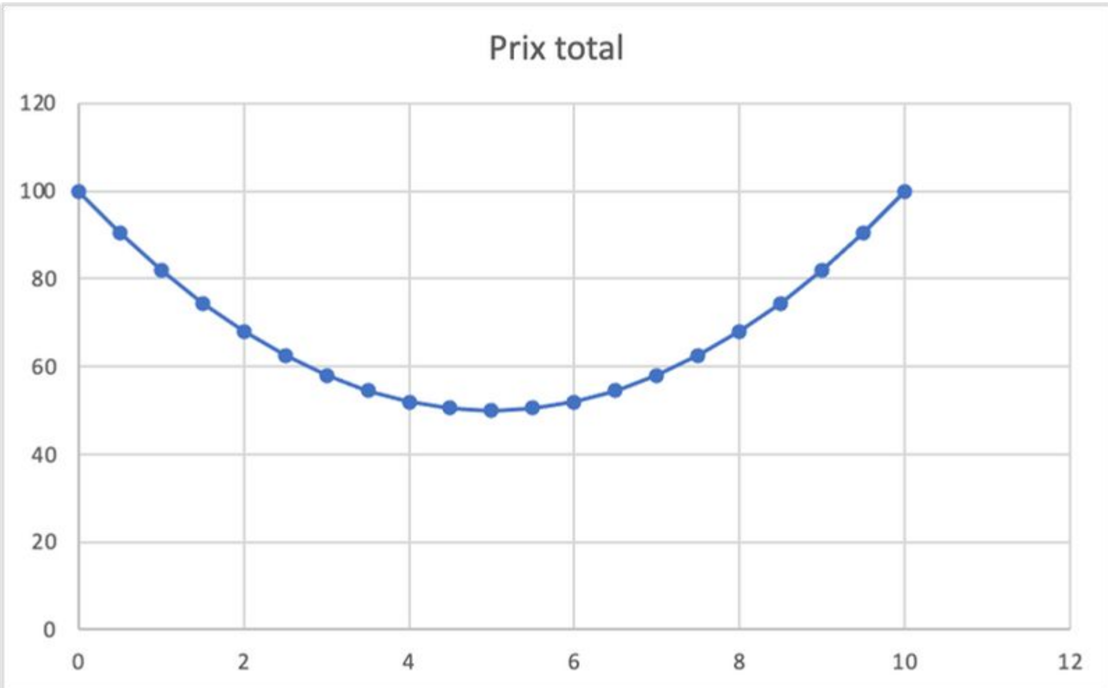
Le but est de trouver comment le découper pour avoir un prix minimal.
Pour cela nous avons fait beaucoup d'exemples de découpages que nous avons mis dans un tableau :

M_1(en g)	M_2 (en g)	$P_1 = M_1^2$	$P_2 = M_2^2$	Prix total
1	9	1	81	82
2	8	4	64	68
3	7	9	49	58
4	6	16	36	52
5	5	25	25	50

On observe que plus les nombres sont "écartés", plus le prix est important.

	A	B	C	D	E
1	M1	M2	P1	P2	Prix total
2	0,2	9,8	0,04	96,04	96,08
3	0,5	9,5	0,25	90,25	90,5
4	0,8	9,2	0,64	84,64	85,28
5	1,1	8,9	1,21	79,21	80,42
6	1,4	8,6	1,96	73,96	75,92
7	1,7	8,3	2,89	68,89	71,78
8	2	8	4	64	68
9	2,3	7,7	5,29	59,29	64,58
10	2,6	7,4	6,76	54,76	61,52
11	2,9	7,1	8,41	50,41	58,82
12	3,2	6,8	10,24	46,24	56,48
13	3,5	6,5	12,25	42,25	54,5
14	3,8	6,2	14,44	38,44	52,88
15	4,1	5,9	16,81	34,81	51,62
16	4,4	5,6	19,36	31,36	50,72
17	4,7	5,3	22,09	28,09	50,18
18	5	5	25	25	50

Puis avec un graphique (en abscisse la masse du premier morceau ; en ordonnée le prix des deux morceaux ajoutés) :



On observe que le minimum du prix semble être avec deux morceaux de 5 g.

On a procédé de même pour des diamants de 50 g et 20 g , avec d'autres prix, et nous avons encore observé des résultats similaires.

Propriété : le prix est minimal lorsque le diamant est coupé en deux parties égales.

2 – Démonstration

1) Première démonstration

On donne au diamant la masse M ; on le divise en deux morceaux de même masse m auxquels on ajoute au premier la masse x qu'on retire au deuxième morceau.

On obtient que $M=2m+x-x=m+x+m-x$.

Prix des deux morceaux :

$$P=(m+x)^2+(m-x)^2=m^2+2mx+x^2+m^2-2mx+x^2=2m^2+2x^2$$

Comme x^2 est une quantité strictement supérieure ou égale à 0, le prix sera minimal quand x sera nul, donc quand les deux morceaux auront une masse m égale à la moitié de M.

2) Deuxième démonstration

Le diamant a une masse M et un prix P.
On a $M=M_1+M_2$ et $P=(M_1+M_2)^2$. Le prix des deux morceaux est $P_1+P_2=M_1^2+M_2^2$.

Chaque morceau du diamant coupé en deux parties égales a une masse de $(M_1+M_2)/2$.

Le prix de ces deux morceaux ensemble sera donc $2\times\left(\frac{M_1+M_2}{2}\right)^2$.

On doit démontrer que P_1+P_2 est supérieur ou égal à ce prix, c'est à dire que

$$M_1^2+M_2^2-2\times\left(\frac{M_1+M_2}{2}\right)^2\geq 0.$$

$$\begin{aligned}
M_1^2+M_2^2-2\times\left(\frac{M_1+M_2}{2}\right)^2 &= M_1^2+M_2^2-2\times\left(\frac{M_1^2+M_2^2+2M_1M_2}{4}\right)\\
&= M_1^2+M_2^2-\frac{M_1^2+M_2^2+2M_1M_2}{2}\\
&= \frac{2M_1{}^2+2M_2{}^2}{2}-\frac{M_1^2+M_2^2+2M_1M_2}{2}\\
&= \frac{2M_1^2+2M_2^2-M_1^2-M_2^2-2M_1M_2}{2}\\
&= \frac{M_1^2+M_2^2-2M_1M_2}{2}
\end{aligned}$$

Donc $M_1^2+M_2^2-2\times\left(\frac{M_1+M_2}{2}\right)^2=\frac{(M_1-M_2)^2}{2}$.

Ce résultat est bien positif puisque numérateur et dénominateur sont tous deux positifs.

Conclusion : le prix sera minimal si on coupe le diamant en deux parties de même masse.

II – On coupe le diamant en trois, quatre, … *n* parties

1– Exemples

Nous reprenons par exemple un diamant de 10 g pour 100 €. On coupe le diamant en plusieurs morceaux. Voici nos résultats sur les prix des morceaux ensemble :

M_1 (en g)	M_2 (en g)	M_3 (en g)	Prix total
1	3	6	46
2	2	6	44
5	1	4	42
3,3	3,3	3,4	33,34

M_1 (en g)	M_2 (en g)	M_3 (en g)	M_4 (en g)	Prix total
1	3	4	2	30
2	5	1	2	34
1	4	1	4	34
2,5	2,5	2,5	2,5	25

On observe encore que plus les nombres sont “écartés”, plus le prix est important.

Propriété : Le prix du diamant est minimal lorsqu’il est coupé en n parties égales.

2 – Démonstrations

1) Démonstration pour trois morceaux

On donne au diamant de départ la masse M ; on le divise en trois morceaux de même masse m auxquels on ajoute des masses *x, y* et *z*, sachant que la somme $x+y+z$ vaut 0.

On a : $M=m_1+m_2+m_3$ avec : $m_1=m+x\,;\,m_2=m+y\,;\,m_3=m+z$ et $x+y+z=0$

Prix des trois morceaux :

$$\begin{aligned} P &= m_1^2+m_2^2+m_3^2=(m+x)^2+(m+y)^2+(m+z)^2 \\ &= m^2+2mx+x^2+m^2+2my+y^2+m^2+2mz+z^2 \\ &= 3m^2+2mx+2my+2mz+x^2+y^2+z^2 \end{aligned}$$

(2)

$3m^2+x^2+y^2+z^2$ est supérieure ou égale à $3m^2$ car $x^2+y^2+z^2$ est forcément supérieure ou égale à 0. Pour que ce résultat soit minimum il faut donc $x^2+y^2+z^2=0$, ce qui implique que *x, y et z* soient nuls.

2) Première démonstration pour *n* morceaux

On va raisonner par l'absurde.

Supposons qu'on coupe le diamant en n morceaux qui ne sont pas tous égaux et que le prix est minimal ; il a alors au moins deux morceaux qui ne sont pas de même masse. En prenant ces deux morceaux et en appliquant ce qu'on a vu dans I, on peut encore baisser le prix en coupant la partie formée par ces deux morceaux différents, en deux parties identiques. Ceci contredit le fait que le prix était minimal puisqu'on a trouvé moins cher.

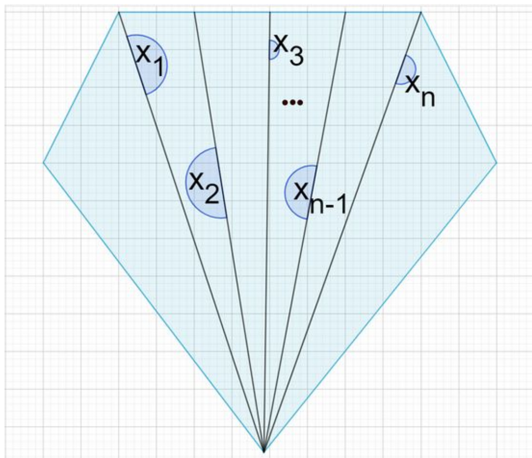
Il ne peut donc y avoir deux morceaux de masses différentes, sinon on peut encore réduire le prix.

3) Deuxième démonstration pour *n* morceaux

On donne au diamant de départ la masse M ; il est divisé en n morceaux de même masse *m*, auxquels on ajoute des masses x_1, x_2, x_3,… x_n, sachant que la somme $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$ vaut 0.

$$\begin{aligned} P &= (m+x_1)^2+(m+x_2)^2+\cdots+(m+x_n)^2 \\ &= m^2+x_1^2+2mx_1+m^2+x_1^2+2mx_1+\cdots+m^2+x_n^2+2mx_n \\ &= nm^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \end{aligned}$$

Comme pour la démonstration pour deux ou trois morceaux, le résultat est forcément positif, car nm^2 et la somme des x_i^2 pour tout i sont eux-même positifs. P sera donc minimum pour $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ égal à 0 ce qui implique que $x_i=0$ pour tout i.



Conclusion : Le prix du diamant est minimal s'il est coupé en n morceaux de même masse.

III – Le saphir

On considère maintenant le saphir qui a un prix proportionnel au cube de sa masse.

Prenons par exemple un saphir de 10 g valant 1000 €.
Nous pouvons faire le tableau de proportionnalité suivant :

Masse (en g) au cube	1000
Prix en €	1000

Le coefficient de proportionalité est 1.

On coupe le saphir en deux :

M_1 (en g)	M_2 (en g)	P_1	P_2	Prix total
0	10	0	1000	1000
1	9	1	729	730
2	8	8	512	520
3	7	27	343	370
4	6	64	216	280
5	5	125	125	250

Puis en quatre :

M_1 (en g)	M_2 (en g)	M_3 (en g)	M_4 (en g)	Prix total
1	3	4	2	100
2	5	1	2	142
1	4	1	4	130
2,5	2,5	2,5	2,5	62,5

Après de nombreux exemples nous avons fait une conjecture.

Conjecture : Le prix du saphir est minimal lorsqu'il est coupé en n morceaux de même masse.

Nous n'avons pas réussi à démontrer cette conjecture.

Notes d'édition

(1) Dans tout l'article, le coefficient de proportionnalité considéré est 1. Si l'on considère un autre coefficient, cela change-t-il les résultats ?

(2) $P=3m^2+2m(x+y+z)+x^2+y^2+z^2=3m^2+x^2+y^2+z^2$ car $x+y+z=0$.