# Le facteur ne repassera pas

Année 2021 – 2022

**Élèves de 3ème :** Thomas BORGARD, Léo BRAULT, Malo COLLET—HAGLUND, Romain CRAUET, Julien JOLY, Gaïa OGUEIVESTKAIA—GAUTREAU et Eugénie Tempier.
**Établissement :** Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
**Enseignante :** Florence FERRY.
**Chercheur :** Olympio HACQUARD.

**Le sujet :** Un facteur doit distribuer le courrier dans une rue. Celle-ci ne comporte qu'une seule rangée de maisons régulièrement espacées et numérotées 1, 2, ..., $n$. Le facteur doit distribuer une lettre par maison. Pour cela, il laisse son vélo à la maison 1, y dépose le courrier correspondant, et ensuite distribue les lettres au hasard, puis revient à la maison 1 récupérer son vélo. Il effectue ainsi un trajet, représenté par les numéros successifs des maisons où il a déposé le courrier. Par exemple, si n = 5, un trajet possible est 1, 5, 2, 4, 3, 1. La distance totale parcourue, appelée longueur du trajet, vaut 12 ici. Combien y a-t-il de trajets possibles ? Montrer que tout trajet est de longueur supérieure ou égale à $2(n-1)$. Combien y a-t-il de trajets de longueur minimale ? Dans les cas où n = 5 et n = 6, déterminer la longueur maximale d'un trajet et donner un exemple dans ce cas.

**Nos résultats** : Nous avons démontré que le facteur a $(n-1)!$ trajets possibles, que tout trajet est bien de longueur supérieure ou égale à $2(n-1)$ et qu'il y a $2^{n-2}$ trajets de longueur minimale. Nous avons ensuite étendu le sujet à $n$ maisons positionnées sur un quadrillage et nous avons conjecturé la longueur minimale d'un trajet en fonction de $n$.

## I – Exemples – Longueur d'un trajet

Pour bien comprendre le sujet, considérons quelques exemples. $n$ désigne le nombre de maisons. Le facteur démarre et termine toujours par la maison 1. On suppose dans la suite de l'article que deux maisons à côté l'une de l'autre sont séparées d'une unité.

**Exemple 1** : supposons que $n = 4$.
Le facteur peut par exemple parcourir les maisons dans cet ordre : 1 – 3 – 2 – 4 – 1.
Pour calculer la longueur du trajet, il faut ajouter toutes les distances séparant deux maisons visitées l'une après l'autre.

**Définition**
La valeur absolue d'un nombre $a$, notée $|a|$, est définie par : $|a| = a$ si $a \geq 0$ et $|a| = -a$ si $a \leq 0$.

Chaque distance ici, est calculée avec la valeur absolue de la différence entre les nombres correspondants aux positions des maisons.
Ainsi la distance entre les maisons 2 et 4 est : $|4-2|=2$ .

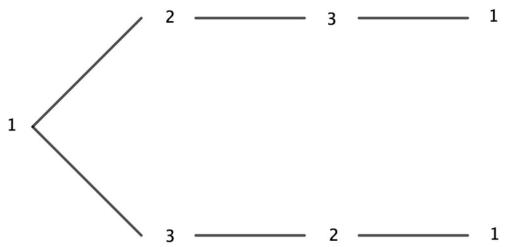
Calculons la longueur L du trajet 1 – 3 – 2 – 4 – 1 : L = $|3-1|+|2-3|+|4-2|+|1-4|=2+1+2+3=8$
Voici un autre trajet possible : 1 – 2 – 4 – 3 – 1.
On a alors : L = $|2-1|+|4-2|+|3-4|+|1-3|=1+2+1+2=6$

**Exemple 2** : $n = 6$.
Voici un trajet possible : 1 – 4 – 6 – 5 – 2 – 3 – 1
Sa longueur : L = $|4-1|+|6-4|+|5-6|+|2-5|+|3-2|+|1-3|=3+2+1+3+1+2=12$
Autre trajet possible : 1 – 5 – 6 – 2 – 4 – 3 – 1
Sa longueur : L = $|5-1|+|6-5|+|2-6|+|4-2|+|3-4|+|1-3|=4+1+4+2+1+2=14$

# II – Nombre de trajets possibles

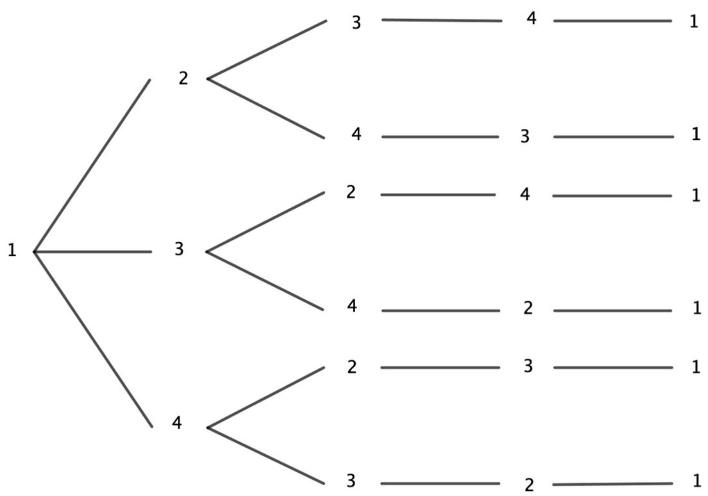
Le nombre de trajets que peut faire le facteur dépend du nombre de maisons.
Pour trouver ce nombre, nous traçons des arbres donnant toutes les possibilités de trajets, d'abord pour 3 maisons, puis pour 4 maisons, 5 ...

Pour 3 maisons :



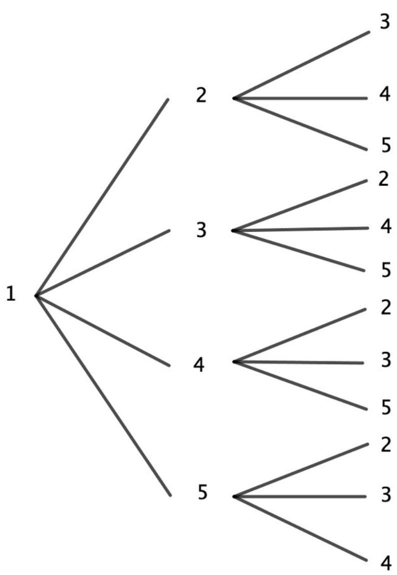

Il y a deux trajets possibles :
1 – 2 – 3 – 1 ou 1 – 3 – 2 – 1

Pour 4 maisons :




Il y a six trajets possibles.

Pour 5 maisons, nous avons tracé ci-dessous le début de l'arbre. Chaque dernière branche donne encore naissance à deux autres qui en donnent chacune une unique pour revenir à la maison 1.




Il y a 24 trajets possibles.

**Remarque** : notons T le nombre de trajets possibles.
- Pour $n = 3$ : T = 2 = $1\times2$ = 2 !
- Pour $n = 4$ : T = 6 = $1\times2\times3$ = 3 !
- Pour $n = 3$ : T = 2 = $1\times2\times3\times4$ = 4 !

**Proposition** : Si $n$ est le nombre de maisons, le nombre de trajets T est de $(n – 1)$ !

**Définition** : on appelle « factorielle $n$ » et on note $n$ !, le produit des $n$ premiers nombres entiers strictement positifs.

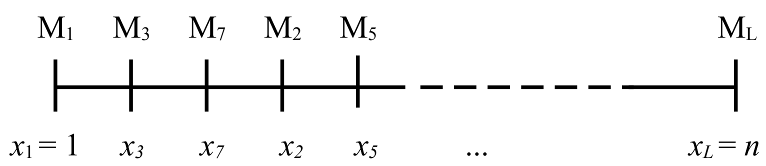
Avant de démontrer cette proposition, nous avons fait un programme en Python (à retrouver en annexe) qui calcule le nombre de trajets possibles et leur longueur moyenne, le nombre de trajets de longueur maximale et minimale ainsi que la longueur de chacun. Les résultats obtenus avec ce programme nous ont permis de nous conforter dans ce que nous pensions : notre conjecture semblait vraie. Cependant, il nous restait encore à démontrer cette conjecture pour tous les nombres car notre programme bloquait au bout d'une dizaine de maisons.

**Démonstration.**
Le facteur partant de la maison 1, il a $n – 1$ possibilités pour aller à une autre maison. Une fois cette première étape passée, il a $n – 2$ possibilités pour aller à une autre maison que celles déjà visitées. A la troisième étape, il a $n – 3$ possibilités pour aller à une maison qu'il n'a pas encore visitée. Le processus continue ainsi jusqu'à ce qu'il ne reste plus que la maison 1 où il doit retourner. Au dernier trajet, il n'y a qu'un chemin possible, celui de revenir directement à la maison 1. Nous avons donc :
$(n-1)(n-2)(n-3)...\times2\times1$ possibilités, ce qui nous donne bien $(n – 1)!$ trajets possibles.

## III – Longueur des trajets

Il y a énormément de trajets possibles, mais les plus interessants sont les plus courts.
Nous voulons démontrer ici que tout trajet est de longueur supérieure ou égale à $2(n – 1)$.

**Démonstration** :
On suppose que le facteur visite les $n$ maisons dans cet ordre : $M_1, M_2, M_3, ... , M_n$.
- La maison 1 est $M_1$, c'est celle d'où il part.
On regarde alors la suite des maisons comme si elles étaient représentées par des points $M_1, M_2, M_3, ... , M_n$ placés sur une droite graduée représentant la route, d'abscisses respectifs $x_1, x_2, x_3, ... , x_n$.




Remarque : $M_2$ est la deuxième maison que le facteur visite cependant ce n'est pas forcément la maison en deuxième position sur la route.
La longueur du trajet est : $L = |x_2 – x_1| + |x_3 – x_2| + ... + |x_n – x_{n-1}| + |x_n – x_1|$.

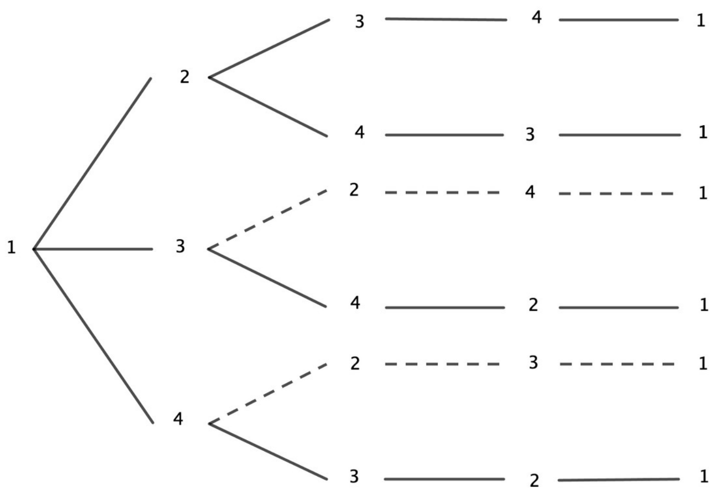
Notons $M_L$, d'abscisse $x_L$, la maison la plus éloignée de $M_1$ ; on a : $1 < L \leq n$ et $x_L = n$.
Par définition : $M_1M_L = x_L – x_1 = n – 1$ ; $M_1M_L$ est la distance la plus courte pour aller de $M_1$ à $M_L$.
Donc, quand le facteur arrive en $M_L$, il a parcouru une distance supérieure ou égale à $n – 1$ (il n'est pas forcément allé en ligne droite). Pour revenir à $M_1$, il fait aussi une distance supérieure ou égale à $n – 1$.
Donc la distance totale parcourue sera supérieure ou égale à $2(n – 1)$.

# IV – Nombre de trajets de longueur minimale

Ensuite, nous nous sommes intéressés au nombre de trajets de longueur minimale. Pour parvenir à visualiser ces trajets, nous avons repris les arbres de possibilités qui nous avaient permis de connaître le nombre de trajets possibles (Voir II).

Pour $n$ = 3, nous avions trouvé deux trajets, 1 – 2 – 3 – 1 ou 1 – 3 – 2 – 1, il sont tous deux de longueur minimale égale à 4.

Pour $n$ = 4 :



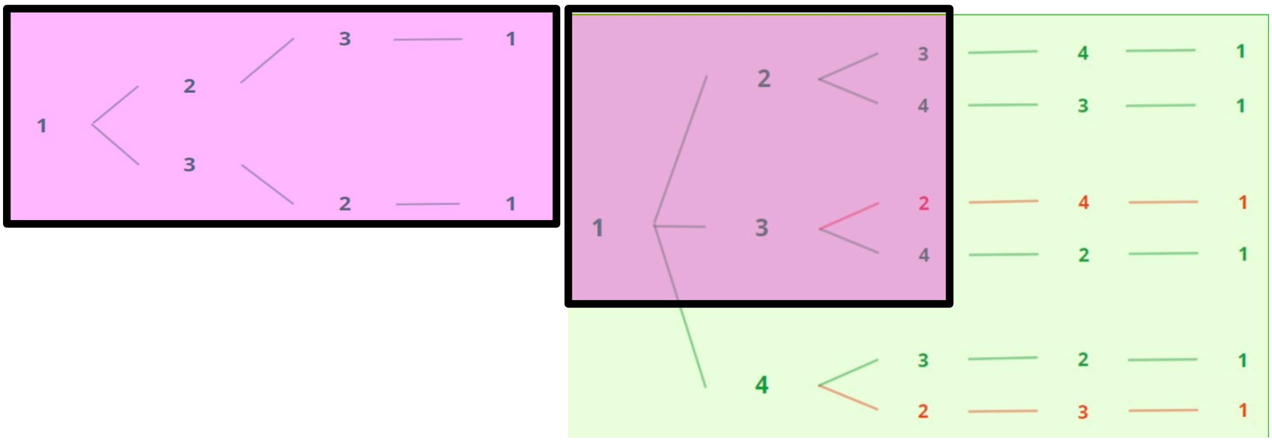
Nous représentons ici les trajets de longueur minimale en trait plein et ceux qui ne le sont pas en pointillés.
Par exemple le trajet 1 ; 3 ; 4 ; 2 ; 1 est un trajet de longueur minimale car il n'implique pas d'aller-retour.
A l'inverse, 1 ; 3 ; 2 ; 4 ; 1 ne l'est pas : le facteur va à la maison 3 pour retourner à la maison 2, il retourne donc sur ses pas pour aller ensuite à la maison 4.

Pour $n$ = 4, nous avons donc 4 trajets de longueur minimale sur un total de 6.

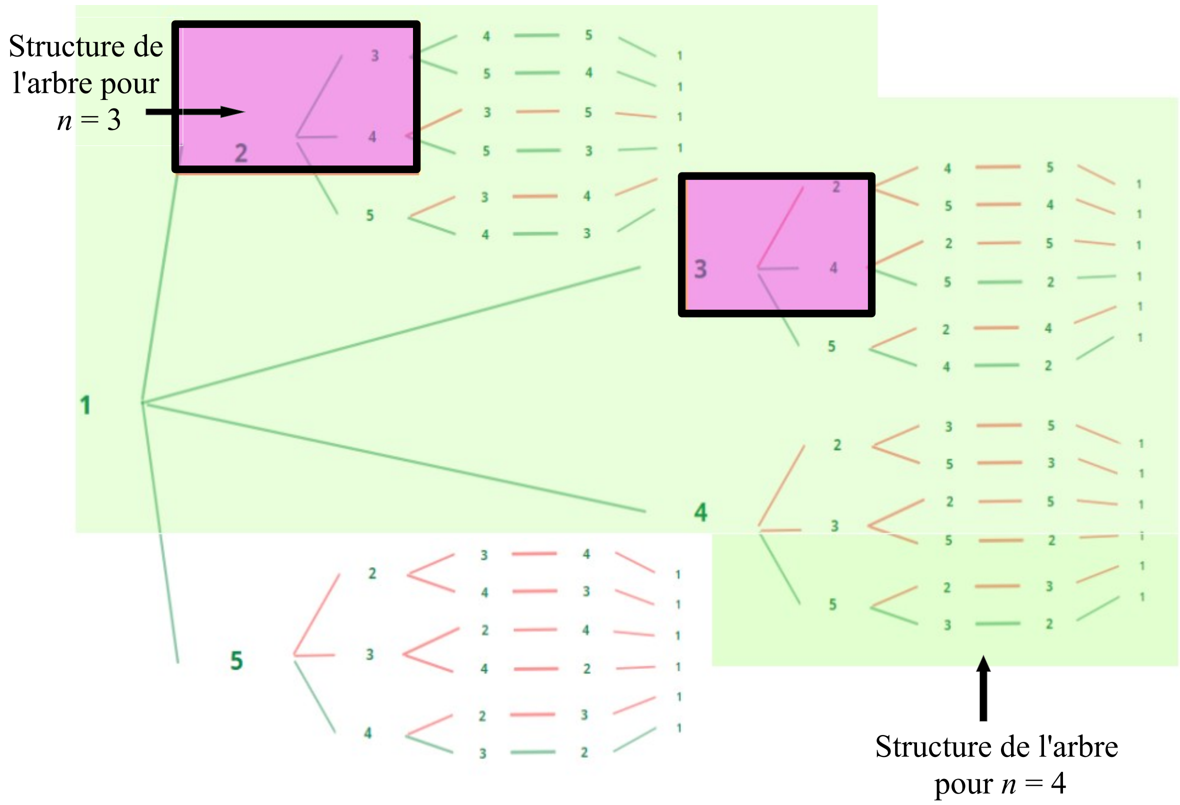
Pour $n$ = 5 nous comptons 8 trajets de longueur minimale sur les 24 trajets au total.

L'arbre se complexifie de plus en plus quand $n$ augmente. Ainsi, nous avons essayé de déterminer un lien qui pourrait unir ces arbres entre eux et qui nous permettrait de savoir directement (à l'aide d'une formule) le nombre de trajets de longueur minimale en fonction de $n$.
Grâce au schéma ci-dessous nous avons pu nous rendre compte de plusieurs éléments.

Premièrement, nous avons remarqué que les arbres s'imbriquaient les uns dans les autres ; ainsi l'arbre pour $n$ = 3 se retrouve dans l'arbre pour $n$ = 4.



Ce n'est pas exactement le même arbre car on a ajouté le passage à la maison 4 qui ne figurait pas pour $n = 3$, mais sa « structure » est identique. Le reste de l'arbre est « nouveau » car il prend en compte le passage à la quatrième maison.
Nous observons ce même emboîtement de l'arbre pour $n = 4$ dans l'arbre pour $n = 5$.



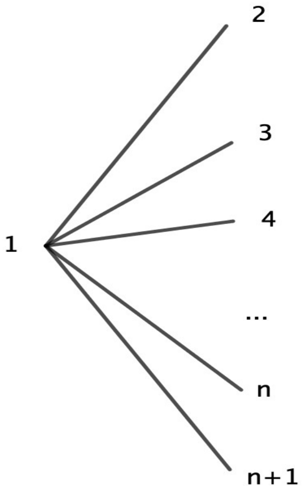

De plus, nous remarquons que le nombre de trajets minimums se réduit au fur et à mesure des branches.
Pour $n = 5$ par exemple :
- Pour la première branche où la deuxième maison visitée est la 2, il y a quatre chemins minimums.
- Pour la deuxième branche où la deuxième maison visitée est la 3, nous n'avons plus que deux chemins de longueur minimale.
- Pour la branche $n - 1$, nous n'avons plus qu'un seul chemin de longueur minimale : aller à la maison $n$ et revenir à la 1.
-Pour la branche $n$ : un seul trajet de longueur minimale est possible également.

Regardons maintenant le nombre de trajets minimums M en fonction du nombre de maisons.
Pour $n = 3$ : $M = 2 = 2^1 = 2^{3-2}$
Pour $n = 4$ : $M = 4 = 2^2 = 2^{4-2}$
Pour $n = 5$ : $M = 8 = 2^3 = 2^{5-2}$

**Conjecture :** s'il y a $n$ maisons, $n$ est un entier tel que $n > 1$, il y a $2^{n-2}$ trajets de longueur minimale.

**Démonstration par Récurrence.**
Soit la propriété $P_n$ : « Pour un nombre $n$ de maisons, il y a $2^{n-2}$ trajets de longueur minimale ».
Initialisation :
Pour $n = 2$, il n'y a qu'un seul trajet de longueur minimale : $1 = 2^0 = 2^{2-2}$. Donc $P_2$ est vraie.
Pour $n = 3$, il y a deux trajets de longueur minimale : $2 = 2^1 = 2^{3-2}$. Donc $P_3$ est vraie.
Supposons que $P_n$ est vraie pour $n > 1$. $P_1$ ; $P_2$ ; $P_3$ ; ... et ainsi de suite jusqu'à $P_n$ sont donc supposées vraies. Démontrons alors que $P_{n+1}$ est alors vraie.

Pour $n + 1$ maisons, le nombre de trajets de longueur minimale va être la somme de tous les trajets minimums trouvés dans chaque sous-arbre commençant à la maison 2, 3, 4 …, $n + 1$.




- Si le facteur visite la maison 2 après la 1, il reste $n$ maisons à visiter (toutes sauf la 2).
On retrouve ici la propriété $P_n$ : pour $n$ maisons, il y a $2^{n-2}$ trajets de longueur minimale.
- Si le facteur visite la maison 3 après la 1, il reste $n - 1$ maisons à visiter : toutes sauf la 1et la 2, car de la maison 3, on ne peut pas aller à la 2 ; 2 étant inférieur à 3 le facteur reviendrait en arrière et le chemin ne serait plus minimum. Ce raisonnement est valable s'il y a au moins 4 maisons.
On retrouve ici la propriété $P_{n-1}$ : pour $n - 1$ maisons, il y a $2^{n-3}$ trajets de longueur minimale.
- Si le facteur visite la maison 3 après la 1, il reste $n - 2$ maisons à visiter, toutes sauf la 1, la 2, et la 3 (raisonnement valable s'il y a au moins 5 maisons).
On retrouve ici la propriété $P_{n-2}$ : pour $n - 2$ maisons, il y a $2^{n-4}$ trajets de longueur minimale.
- Nous continuons ce raisonnement jusqu'à ce qu'il visite la maison $n$ : il n'a plus de choix, il doit se rendre à la maison $n + 1$ puis à la 1 ; il y a un seul chemin minimum ici. De même, s'il visite la maison $n + 1$, il doit revenir à la maison 1 ; il n'y a alors qu'un seul chemin minimum.

Finalement, le nombre de trajets minimums pour $n + 1$ maisons est : $P_{n+1} = 1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-2}$
Il faut maintenant démontrer que : $\mathbf{P_{n+1} = 2^{(n+1)-2}}$, soit $\mathbf{P_{n+1} = 2^{n-1}}$.

On a :
Pour $\underline{n = 2}$ : $1 + 2^0 = 2 = \boxed{2^1}$

Pour $\underline{n = 3}$ : $\boxed{1 + 2^0} + \boxed{2^1} = 2^1 + 2^1 = 2^{1+1} = \boxed{2^2}$

Pour $\underline{n = 4}$ : $\boxed{1 + 2^0 + 2^1} + 2^2 = \boxed{2^2} + 2^2 = = 2^3$

A chaque maison supplémentaire, on retrouve le somme précédente, à laquelle on rajoute la puissance de 2 suivante.

Nous généralisons pour $n$ : $\boxed{1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots} + 2^{n-2} = 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$

Donc : $P_{n+1} = 2^{n-1}$ et donc $P_{n+1}$ est vraie.

**Conclusion : la conjecture est démontrée : il y a $2^{n-2}$ trajets de longueur minimale.**

# V – Trajets de longueur maximale

A l'aide de l'arbre fait au IV, pour $n$ = 5, nous comptons 8 trajets de longueur maximale ; ils ont une longueur de 12.
Exemple : 1 – 3 – 5 – 2 – 4 – 1.

Pour $n$ = 6, il y a 12 trajets de longueur maximale chacun de longueur 18.
Exemple : 1 – 4 – 3 – 6 – 2 – 5 – 1.

Pour trouver à coup sûr un trajet de longueur maximale, il faut effectuer la plus longue distance possible à chaque étape.
Pour $n$ = 6, on démarre à la maison 1 ; la plus éloignée est la 6, c'est celle que le facteur visite ensuite. La maison la plus éloignée de la 6 c'est la 2, le facteur s'y rend donc puis il visite la maison 5 puis la 3 et enfin la 4 pour revenir à la 1. Cette technique donne une longueur maximale de 18. Mais il y a d'autres façons de procéder comme le montre le premier exemple pour $n$ = 6 ci-dessus.

# VI – Extension du sujet – Le facteur dans la 2D

Que se passe-t-il si le facteur évolue dans un plan en deux dimensions avec des maisons positionnées sur un quadrillage. Nous fixons deux règles : le facteur ne peut pas aller d'une maison à une autre en diagonale et toutes les maisons doivent être reliées entre elles. (Aucune maison n'est sans un chemin d'une unité la reliant à une autre maison). Dans ce cas, quel est le trajet minimum que fera le facteur ?

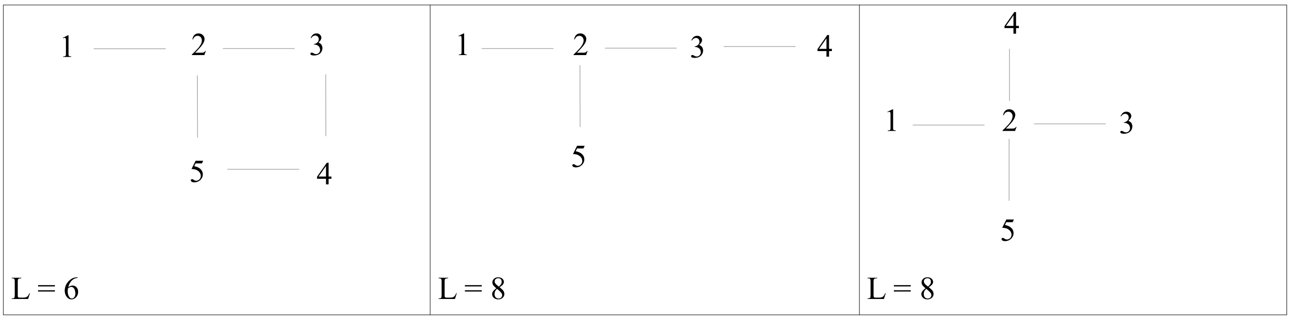
Voici quelques exemples.
Pour $n$ = 3 : 3 cas.

<table>
<tr>
<td>1 — 2 — 3<br><br>Longueur L = 4.</td>
<td>1 — 2<br>│<br>3<br>L = 4<br>Cas identique au précédent.</td>
<td>1 — 2<br>│<br>3<br>Ce cas est impossible car pour aller à la maison 3, le facteur est obligé de repasser par la maison 1, ce qui est interdit.</td>
</tr>
</table>

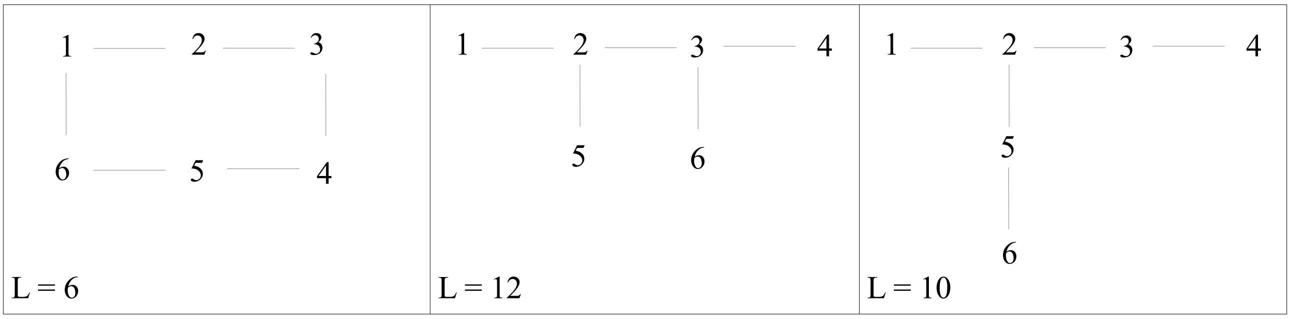
Pour $n$ = 4 : 3 cas.

<table>
<tr>
<td>1 — 2<br>│ │<br>4 — 3<br>Deux chemins sont possibles : commencer par la maison 2 ou par la maison 4.<br><br>L = 4</td>
<td>1 — 2 — 4<br>│<br>3<br><br>L = 6</td>
<td>1 — 2 — 3<br>│<br>4<br>Cas identique au précédent.<br><br>L = 6</td>
</tr>
</table>

Pour $n$ = 5 : 3 cas.



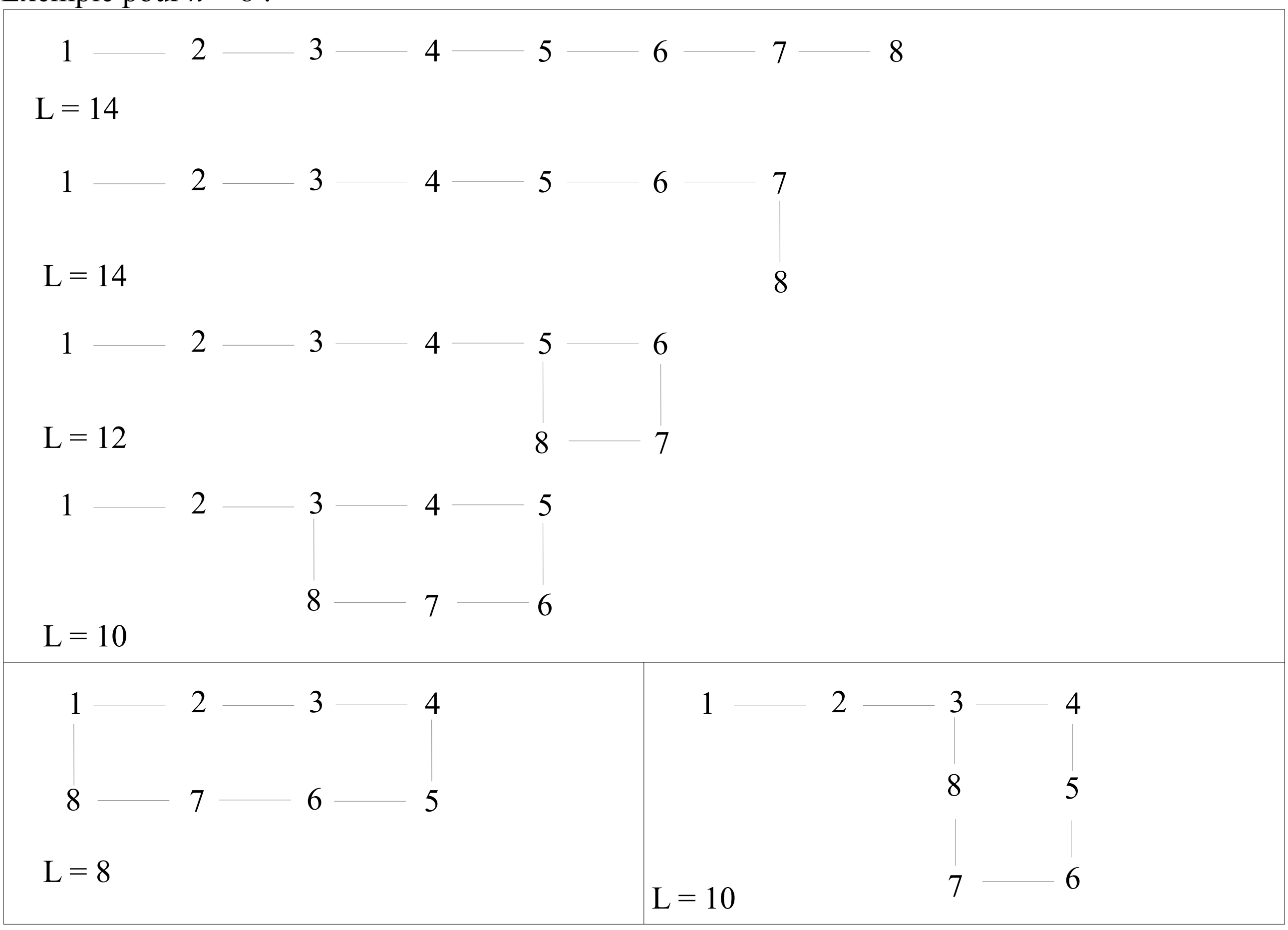

Pour $n$ = 6 : 3 cas.




Remarque : L semble être minimale lorsque les maisons sont situées le plus « circulairement possible » (premières cases des tableaux) ; ce sont des cas qui nécessitent le moins d'allers-retours.

Méthode pour trouver la longueur des chemins minimaux pour un nombre de maisons donné (on ne doit faire aucun aller-retour) : à chaque nouvelle étape, on abaisse une nouvelle maison, la plus éloignée de la maison numéro 1.

Exemple pour $n$ = 8 :



| | |
|---|---|
| 1 — 2 — 3<br>8       4<br><br>L = 8 | 6<br><br>Cas identique au précédent : L = 8. |

Pour $n$ = 5 : il y aura forcément une maison « sortie », qui nécessitera un aller-retour.

1 — 2 — 3 — 4 — 5

L = 8

1 — 2 — 3 — 4

5

L = 8

1 — 2 — 3

5 — 4

L = 6

1 — 2

5 — 4 — 3

L = 6

Conjecture :
Si le nombre $n$ de maisons est pair, la longueur minimale des trajets est $\boldsymbol{n}$.
S'il est impair : la longueur minimale est $\boldsymbol{n+1}$.

En effet si le nombre $n$ de maisons est pair, on peut former un rectangle avec l'ensemble des maisons qui vont alors se trouver sur un trajet sans aller-retour. Dans le cas où $n$ est impair, il y aura une maison « sortie », qui nécessitera un aller-retour.

*Annexe : programme Python*

```
from statistics import mean, median # importation d'outils statistiques
from itertools import permutations
houses = [i+1 for i in range(0, int(input('Nombre de maisons dans la rue : ')))] # création d'une liste de maisons allant de 1 à un n donné
ways = [] # création d'une liste de chemins possibles, vide
for way in permutations(houses, len(houses)): # on récupère la liste de maisons et on la "mélange" pour avoir toutes les possibilités de chemins
way = list(filter(lambda x: x != 1, list(way))) # on supprime les trajets où on retourne à la première maison avant la fin
if way[0] != 1: # vu qu'on mélange une liste de maison 1, 2, 3, 4, 5, il n'y a qu'un seul "1". Il se trouve donc au début ou à la fin (dû à l'opération précédente) et il faut le rajouter à l'endroit manquant
way.insert(0, 1)
if way[-1] != 1:
way.append(1)
ways.append(way) # on ajoute ce chemin possible à la liste de chemins possibles
ways = list(set(["; ".join(str(house) for house in way) for way in ways])) # on met en forme la liste (des ";" sont insérés entre chaque maison) et on supprime les doublons
lengths = [] # création d'une liste de longueurs de chemins, vide
with open("possibilites.txt", "w") as file:
# inscriptions de tous les trajets et leurs longueurs dans "possibilites.txt"
for way in ways:
way = list(map(int, way.split("; ")))
length = 0
for number, house in enumerate(way):
length += abs(way[number-1] – house) # calcul de la longueur du chemin avec les valeurs absolues
lengths.append(length) # ajout de la longueur dans la liste des longueurs de chemins, pour pouvoir faire des statistiques par la suite
way = list(map(str, way))
file.write(f"{'; '.join(way)} | longueur {length:,}\n".replace(',', ' ').replace(';', ',')) # mise en forme
# conclusion et calculs statistiques divers
print(f"Il y a {len(ways):,} trajets possibles (inscrits dans possibilites.txt) avec une longueur moyenne de {round(mean(lengths))} et une longueur médiane de {round(median(lengths))}.".replace(',', ' '))
print(f"Il y a {lengths.count(min(lengths)):,} trajets minimaux avec une longueur de {min(lengths):,}.".replace(',', ' '))
print(f"Il y a {lengths.count(max(lengths)):,} trajets maximaux avec une longueur de {max(lengths):,}.".replace(',', ' '))
```