Le Comptable

Année 2023 – 2024

Antoine Lemaître, Naomi Bauer, Grégory Provendier, élèves de Seconde et de Première

Établissement : Lycée Léonce Vieljeux, La Rochelle
Enseignant·es : Rachel Biton, Pierre Vederine
Chercheur : Cyrille Ospel, Université de La Rochellew

Présentation du sujet

1) Peut-on déterminer 3 entiers naturels différents deux à deux de 2 chiffres, commençant tous par le même chiffre, et dont la somme est divisible par 2 d'entre eux ?
2) Peut-on déterminer 4 entiers naturels différents deux à deux de 3 chiffres, commençant tous par le même chiffre, et dont la somme est divisible par 3 d'entre eux ?

Pistes de résolution du problème numéro 1

Décompositions des nombres

a) On note $N_1<N_2<N_3$ les 3 nombres choisis et S la somme de ces trois nombres.
A-t-on que $S=N_1+N_2+N_3$ est divisible par deux d'entre eux ?

Exemple : $N_1=21\,;N_2=23$ et $N_3=26$. La somme $S=21+23+26=70$. Or 70 n'est divisible ni par 21 (3,333...), ni par 23 (3,043...). Donc ces valeurs de N_1, N_2 et N_3 ne sont pas solutions du problème.

On décompose donc ces nombres selon le schéma suivant :

$N_1=10a+b$ avec $a\in[1\,;9]$ et $b\in[0;7]$

On réutilise cette base pour décomposer les nombres N_2 et N_3 , on obtient donc

$N_2=10a+b+m$ avec $m\epsilon[1;8]$

$N_3=10a+b+n$ avec $n\epsilon[2;9]$ et $m<n$

b) En mettant en équation ces nombres, on s'est rendu compte que cela n'était pas pratique à cause du trop grand nombre d'inconnues. C'est pourquoi on est revenu aux nombres N_1, N_2, N_3 croissants.

Mise en équations des nombres

a) Pour répondre au problème il faut que $N_1+N_2+N_3$ puisse être divisible par N_1, N_2 ou N_3.
Tout d'abord si on essaye de diviser par N_1, on obtient $N_1/N_1+(N_2+N_3)/N_1$, ce qui est équivalent à $N_2+N_3=N_1\times k$ (avec k entier).
Puis, si on essaye ensuite de diviser par N_2, on obtient $N_2/N_2+(N_1+N_3)/N_2$, ce qui est équivalent à $N_1+N_3=N_2\times k'$ (avec k' entier).

Ensemble des valeurs possibles de k

Lorsqu'on prend la somme de deux nombres distincts compris entre 10 et 19 on obtient au maximum 37. Or $37=3\times10+7$ donc au maximum trois fois le chiffre des dizaines (pour les autre dizaines c'est deux fois : $29+28=57=2\times20+17$).
On en déduit que $k\in[2;3]$.

Les possibilités restantes

- Si $k'=k=2$,

alors $N_2+N_3=2N_1$ et $N_1+N_3=2N_2$, d'où $N_2-N_1+N_3-N_3=2N_1-2N_2$ et $3N_1=3N_2$.
Or N_2 est différent de N_1 donc on arrive à une contradiction.

- Si $k'=k=3$,

alors $N_2+N_3=3N_1$ et $N_1+N_3=3N_2$, d'où $N_2-N_1+N_3-N_3=3N_1-3N_2$ et $4N_1=4N_2$.
Or N_2 est différent de N_1 donc on arrive à la même contradiction.

- Si $k'=3$ et $k=2$,

alors $N_2+N_3=2N_1$ et $N_1+N_3=3N_2$, d'où $N_2-N_1+N_3-N_3=2N_1-3N_2$ et $3N_1=4N_2$.
Or $N_2>N_1$ donc $4N_2>3N_1$, donc on arrive à une contradiction.

- Si $k'=2 et\, k=3$,

alors $N_2+N_3=3N_1$ et $N_1+N_3=2N_2$, d'où $N_2-N_1+N_3-N_3=3N_1-2N_2$ et $4N_1=3N_2$.
On cherche donc un multiple commun à 3 et 4 (1) :
Si $4\times12=48$ et $3\times16=48$, on a donc $48=N_1+N_2+N_3$ d'où $48=12+16+N_3$ et $N_3=48-12-16=20$.
Or $N_3<20$ car tous les nombres doivent avoir le même chiffre des dizaines. On arrive donc une dernière fois à une contradiction.

Conclusion

Nous venons donc de démontrer que ce problème ne possède pas de solution réelle.

Pistes de résolution du problème numéro 2

Décompositions des nombres

On note $N_1<N_2<N_3<N_4$ les 4 nombres choisis et S la somme de ces quatre nombres.
Alors $N_1+N_2+N_3+N_4$ est divisible par trois d'entre eux.
Exemple : $N_1=214$, $N_2=242$, $N_3=250$ et $N_4=262$. La somme $S=214+242+250+262=968$.
Or 968 est divisible par 242 (4), mais pas par 250 (3,872), 214 (4,523...) ou 262 (3,694...). Donc ces valeurs de N_1, N_2, N_3 et N_4 ne sont pas solutions du problème.

Solutions

Cependant, nous avons réussi à trouver une unique solution pour ce problème, que nous conjecturons être la seule (2), avec comme valeurs pour N_1, N_2, N_3 et N_4 :

$$N_1=108,\ N2=117,\ N3=135 \text{ et } N4=180.$$

En effet, la somme $S=108+117+135+180=540$. Or 540 est divisible par 108 (5), par 135 (4), ainsi que par 180 (3).

Conclusion

Le problème a donc une solution.

Notes d'édition

(1) Ce multiple commun à 3 et de 4 est la somme S, ce qu'on voit en ajoutant N_1 aux deux membres de $N_2+N_3=3N_1$; comme 3 et 4 sont premiers entre eux, $S=4N_1=3N_2$ doit être un multiple de 12. De plus, on a vu que $k=3$ n'est possible qu'avec le premier chiffre des trois nombres égal à 1, et on a alors $40\leq 4N_1=S=3N_2\leq 57$. La seule possibilité est $S=48$, $N_1=48/4=12$ et $N_2=48/3=16$.

(2) Le lecteur pourra essayer de démontrer cette conjecture. Comme pour le cas de trois nombres de deux chiffres, on peut réduire le nombre de cas à étudier en encadrant les quotients de la somme par les nombres N_i et en utilisant le fait qu'ils doivent être tous distincts.