La haute couture mathématique

Année 2023 – 2024

Sarah CALVO, Nicolas BERTRAND, élèves de classe Terminale Générale

Établissement : Lycée Docteur Eugène Koeberlé – Sélestat

Enseignant·e·s : Nathalie MEYER, Stéphane Vénéreau

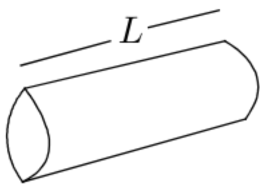
Chercheur : Daniel Panazzolo, Université de Haute-Alsace

1. Introduction

1.1. Présentation générale du sujet

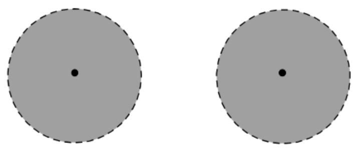
Paul, un débutant en couture, souhaite apprendre à coudre des pièces de tissu circulaires et triangulaires. Il souhaite également apprendre à habiller une demi-sphère.

Au magasin, il découvre que les tissus sont présentés en rouleaux de largeur L. Et qu'ils sont vendus seulement en pièces rectangulaires de largeur maximale L (mais possiblement plus petites).



1.1.1. Présentation partie 1 - Deux morceaux circulaires…

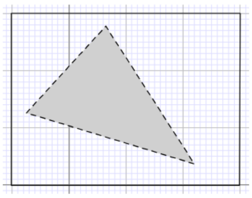
Dans un premier temps, il souhaite apprendre à coudre des pièces de tissu circulaires de rayon r.



Afin d'éviter le gaspillage, il souhaite acheter la plus petite pièce rectangulaire qui lui permettra de découper ses deux pièces circulaires ! Nous devons alors l'aider à trouver les dimensions de la pièce qu'il devra acheter.

1.1.2. Présentation partie 2 - Un, deux, trois triangles

Encouragé par ses résultats, Paul souhaite découper une pièce de tissu en forme triangulaire, tout en ayant le moins de perte de tissu possible.



Aidons alors Paul à placer sa pièce dans le rectangle de façon à minimiser le gaspillage de tissu.

1.1.3. Ouverture

Paul décide ensuite d'habiller une demi-sphère. Dans ses recherches, il découvre que le mathématicien russe Tchebychev s'est déjà posé en 1878 la question sur comment habiller une demi-sphère avec une seule pièce de tissu.

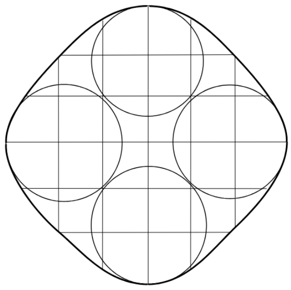


Figure 2 – Le patron de Tchebychev (d'après le dessin original)

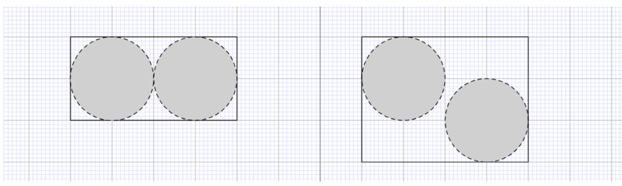
1. Pourriez-vous tenter de réaliser cette découpe de Tchebychev et la mettre à l'épreuve ?
2. Pourquoi est-il impossible d'encercler une demi-sphère avec du papier (sans créer des plis), alors qu'il est possible de le faire avec du tissu ?
3. Quelle propriété doit posséder une surface pour pouvoir être enveloppée avec du papier sans créer de plis disgracieux ?

2. Résultats

2.1. Partie 1

2.1.1. Approche instinctive

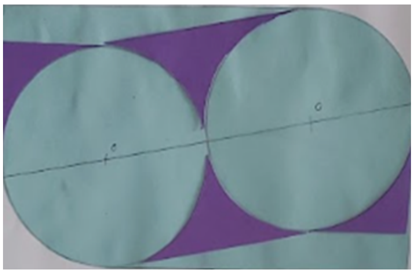
Voici deux exemples de découpes possibles :

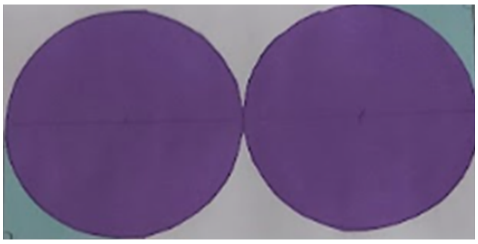


La disposition dans laquelle les cercles sont tangents entre eux et tangents au rectangle à trois reprises semble la plus efficace.

2.1.2. Preuve

2.1.2.a) Par découpages





Les restes du côté gauche sont supérieurs à ceux du côté droit

2.1.2.b) Par calculs

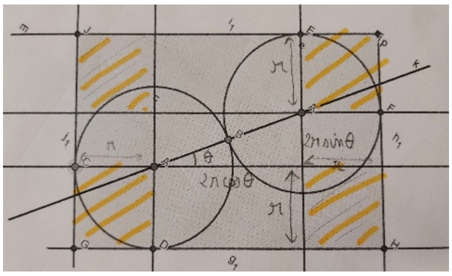
- Dans le <u>cas idéal</u> (cercles tangents entre eux et au rectangle en six points) :

$A_{totale} = 4r \times 2r = 8r^2$

$A_{restante} = 8r^2 - 2\pi r^2 = r^2(8 - 2\pi) = 2r^2(4 - \pi)$

- Dans l'<u>autre cas</u> :

On introduit un repère avec un angle θ.



$$A_{totale} = 2r \times cos\theta \times 2r + 2r \times cos\theta \times 2r \times sin\theta + 2r \times +4r^2$$
$$= 4r^2(cos\theta + cos\theta \times sin\theta + 1)$$

Or $cos\theta + cos\theta \times sin\theta + 1 \geq 2 \; pour \; \theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$f'(\theta) = -\sin\theta - \sin^2\theta + \cos^2\theta + \cos\theta$

$f'(\theta) = (\cos\theta - \sin\theta)(1 + \cos\theta + \sin\theta)$

$f'(\theta) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta)(1 + \cos\theta + \sin\theta)$

$$f'(\theta) = \sqrt{2}\cos(\theta + \frac{\pi}{4})(1 + \cos\theta + \sin\theta)$$

On obtient le tableau de variations suivant :

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	2	$\nearrow$		$\searrow$	2

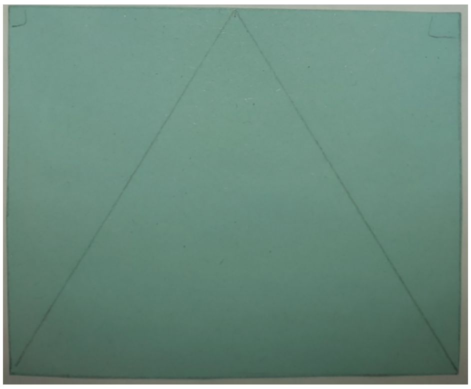
$f(0) = cos0 + cos0 \times sin0 + sin0 + 1 = 1 + 1 = 2$

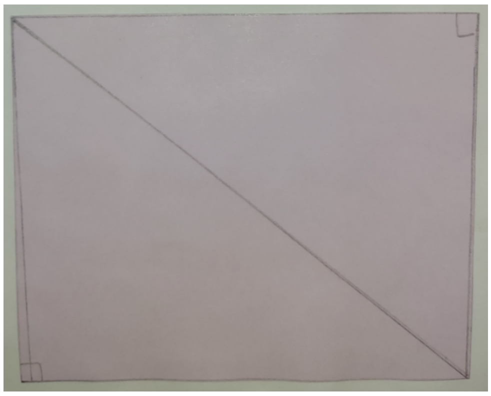
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos\frac{\pi}{2} + cos\frac{\pi}{2} \times sin\frac{\pi}{2} + sin\frac{\pi}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$

2.2. Partie 2

2.2.1. Approche instinctive

La disposition dans laquelle le triangle a son plus grand côté qui correspond au plus grand côté du rectangle et le sommet opposé sur le côté opposé semble la meilleure.





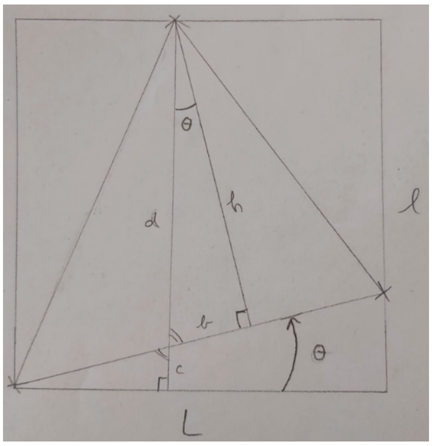
2.2.2. Preuve

- Dans le <u>cas idéal</u> (triangles avec trois sommets tangents et un côté tangent au rectangle) :

$$A_{totale} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{restante} = \frac{b \times h}{2}$$

- Dans l’autre cas



$cos\theta = \dfrac{adj}{b} \Leftrightarrow b \times cos\theta = adj = L$
$l = d + c \Leftrightarrow l = \frac{h}{cos\theta} + c$ car $d = \frac{h}{cos\theta}$

Donc $A_{rectangle} = l \times L = \left(\frac{h}{cos\theta} + c\right) \times b \times cos\theta = b \times h + cbcos\theta$

Donc c’est plus du double à chaque fois ($b \times h > \frac{b\times h}{2}$ et $cbcos\theta > 0$ puisque ce sont des longueurs).

2.3. Partie 3

1. Pourriez-vous tenter de réaliser cette découpe de Tchebyshev et la mettre à l'épreuve ?

2. Pourquoi est-il impossible d'encercler une demi-sphère avec du papier (sans créer des plis), alors qu'il est possible de le faire avec du tissu ?

3. Quelle propriété doit posséder une surface pour pouvoir être enveloppée avec du papier sans créer de plis disgracieux ?

3. Conclusion