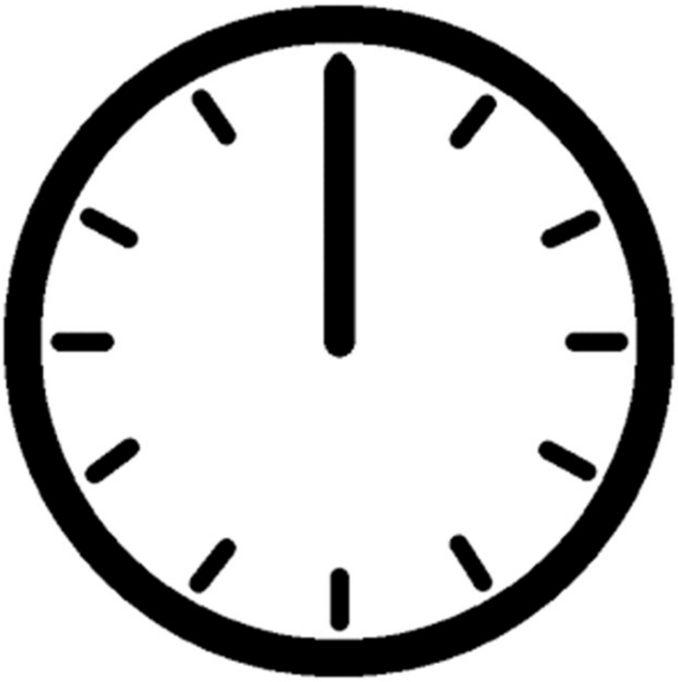
DES HORLOGES PLUS OU MOINS… ÉTRANGES !



Année 2023 – 2024

Coignard Eliot, Devesa Mathieu, Guitteny Raphaël, Journault Paul, Lecomte Mathéo, Merienne Tom, Maria Raphaël, élèves de classe de terminale et Mohorea Denisa, élève de seconde

Établissement(s) : Lycée Lavoisier de Mayenne (53)

Enseignant : Henri Ficheux

Chercheur : Gilles Carron, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Nantes Université

1. Présentation du sujet

Quelle heure est il lorsque les aiguilles d'une horloge (minutes et heures) sont superposées ?
Même question avec les trois aiguilles d'une montre disposant d'une trotteuse ? Dans un pays isolé, le président Alfred Machin décide de simplifier la mesure du temps, les journées sont désormais divisés en 10 intervalles de temps identiques nommés machins et chaque machin est également divisé 10 intervalles de temps identiques nommés alfreds. Avec ce système, quelle heure est il lorsque les aiguilles d'une horloge (machins et alfreds) sont superposées ? Le chien du président s'appelle Médor et on a divisé les alfreds en 10 médors : recommencer l'exercice avec les trois aiguilles.

2. Résultats

Nous avons eu deux approches principales : une approche graphique, et une approche trigonométrique. Grace à cela nous avons pu trouver des résultats précis sur le cas initial d'une horloge classique : les aiguilles des heures et des minutes se superposent 11 fois par demi journée, toutes les $\frac{12}{11}$ heures, soit toutes les 1 heure 5 minutes 27 secondes et 16 centièmes environ. Avec une trotteuse, les trois aiguilles ne se superposent qu'à 0h00min00sec.

Ensuite, nous avons cherché sur d'autres découpages, puis à déterminer pour quels découpages les trois aiguilles peuvent se superposer à d'autres moments qu'à 0:00:00. Nous avons ainsi pu construire un programme Pyhton qui donne ces moments de superpositions deux deux ou de deux trois aiguilles en fonction de trois paramètres :

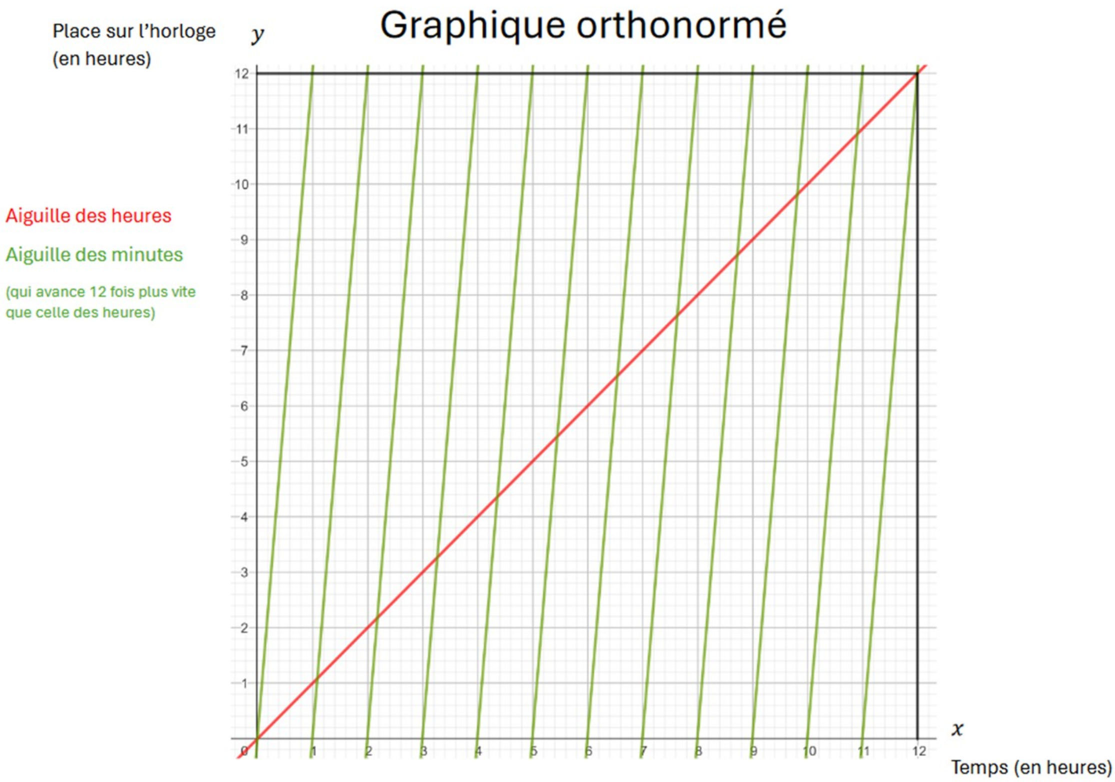
- Le nombre d'« heures » dans un tour de cadran
- Le nombre de « minutes » dans chaque « heure »
- Le nombre de « secondes » dans chaque « minute »

Enfin, nous avons essayer d'appliquer et généraliser le modèle que nous avons établi pour déterminer les moments d'alignements de deux planètes du système solaire avec le soleil.

3. Texte de l'article

3.1. Approche graphique

Les intersections entre la droite rouge (heures) et les droites vertes (minutes) correspondent aux endroits où les aiguilles se croisent. Il faut alors trouver les équations correspondant à ces droites puis résoudre les systèmes d'équations.
La petite aiguille prend 3600 minutes à faire un tour complet (12 heures).
Sachant que : Les fonctions affines sont de la forme $y=ax+b$, que a est le coefficient directeur qu'on peut trouver grâce aux coordonnées de deux points appartenant à la droite, en faisant $a=\frac{\Delta x}{\Delta y}$, et que b est l'ordonnée à l'origine, ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées.

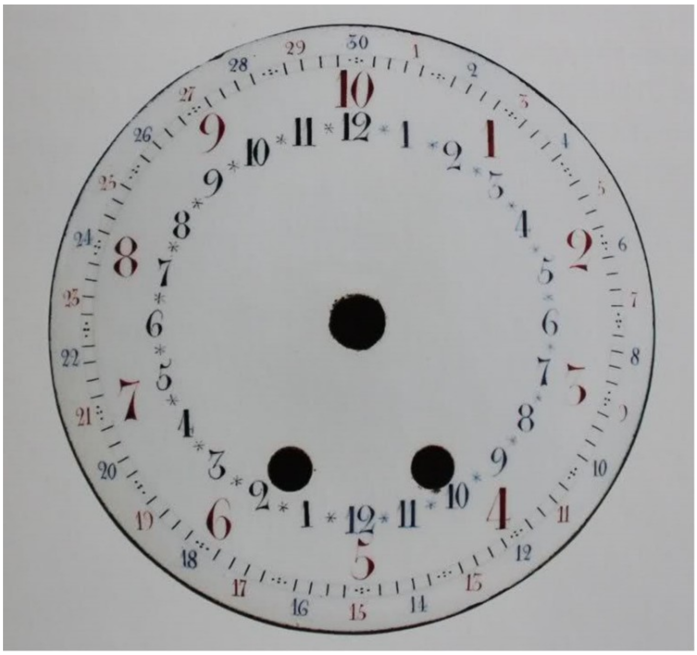


On souhaite trouver les points d'intersection entre la droite des heures d'équation y=x et celles des minutes (y_0=12x ; y_1=12x-24 ; y_2=12x-36 ; … ; y_{11}=12x-121 en résolvant le système linéaire de deux équations à deux inconnues. On a un résultat x en heures.
Exemple pour le premier croisement (Minuit) :
y=y_0<=> x=12x <=> x=0
Exemple pour le deuxième croisement :
y=y_1 <=> x=12x-12 <=> x=$\frac{12}{11}$
En procédant ainsi pour les 11 droite de l'aiguille des minutes, on trouve tous les horaires exacts où l'aiguile des heures et celle des minutes sont superposées : 0h ; $\frac{12}{11}$h ; $\frac{24}{11}$h ; $\frac{36}{11}$h ; $\frac{48}{11}$h ; $\frac{60}{11}$h ; $\frac{72}{11}$h ; $\frac{84}{11}$h ; $\frac{96}{11}$h ; $\frac{108}{11}$h et $\frac{120}{11}$h.

Résultats : Les trois aiguilles d'une horloge ne peuvent pas se retrouver superposées : l'aiguille de l'heure et celle de la minute se superposent à 11 horaires différents. Dans chacun de ces horaires l'aiguille des secondes ne se situe pas au même emplacement.
Ces 12 positions sont :
- 1h 05min 27,16s
- 2h 10min 54,32s
- 3h 16min 21,49s
- 4h 21min 49,05s
- 5h 27min 16,21s

- 6h 32min 43,38s
- 7h 38min 10,54s
- 8h 43min 38,10s
- 9h 49min 05,27s
- 10h 54min 32,43s
- 12h

Nous avons aussi découvert l'existence d'une ancienne horloge (à l'époque de la révolution), divisée en 10 parties plutôt que 12 : nous nous sommes penché ensuite sur ce découpage puis nous avons pu généraliser notre modèle grâce à l'apport de notre autre approche.

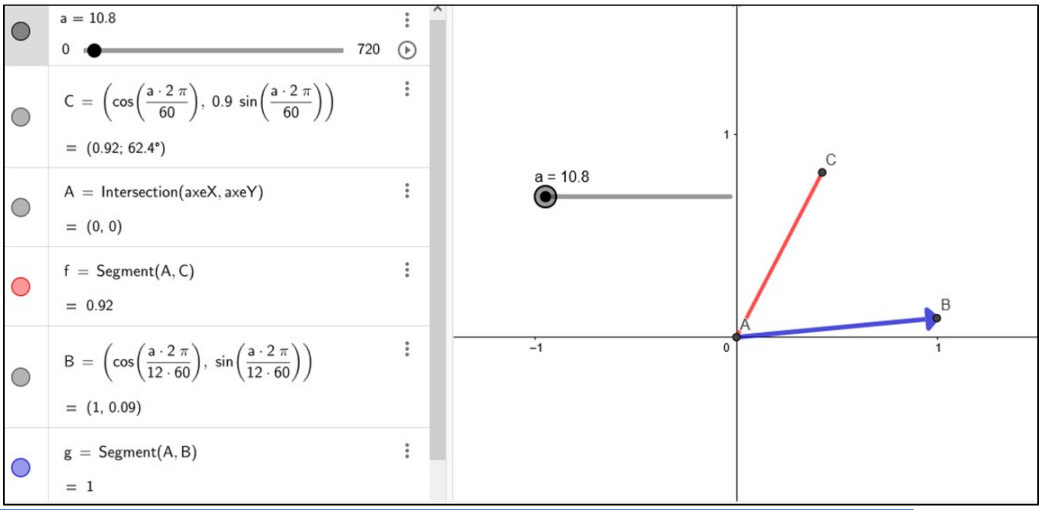


3.2. Approche trigonométrique

A partir de l'idée de créer une animation sur Geogebra pour observer le mouvement simultanée des aiguilles d'une horloge, nous avons constatés que le découpage en nombre d'heures, minutes et secondes intervient dans la vitesse de la position de la pointe de l'aiguille sur le cercle trigonométrique.
Nous avons ainsi pu établir un système trigonométrique qu'il suffit de résoudre pour trouver les moments de superposition.

Exemple : avec 12 heures, et 60 minutes dans chaque heure

a correspond au nombre de minutes écoulées



Système à résoudre :
$$\left\{\begin{array}{l} \cos\left(\frac{a\cdot 2\pi}{60}\right) = \cos\left(\frac{a\cdot 2\pi}{12\cdot 60}\right) \\ \sin\left(\frac{a\cdot 2\pi}{60}\right) = \sin\left(\frac{a\cdot 2\pi}{12\cdot 60}\right) \end{array}\right.$$

Solutions : où n est un nombre entier de tour du cadran

$$\frac{2\pi a}{60} = \frac{2\pi a}{12\times 60} + 2\pi n$$
$$a = \frac{1}{12}a + 60n$$
$$\frac{11}{12}a = 60n$$
$$a = 60 \times \frac{12}{11}n \text{ minutes} = \frac{12}{11}\text{heures}$$

3.3. Construction d'une suite et utilisation de divisions euclidienne pour préciser l'horaire

Suite arithmétique de raison $r = \frac{12}{11}$ et de premier terme $u_0 = 0$ heure :

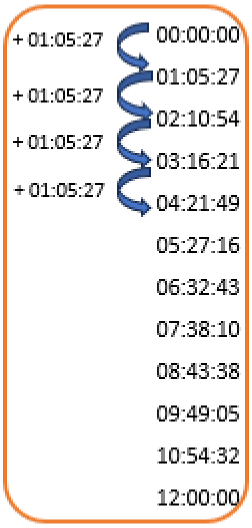
$$u_n = \frac{12n}{11}$$

Avec n l'heure de croisement comprise entre 0 et 11

Exemple : pour l'heure $n = 7$, le croisement est à $u_7 = \frac{12}{11} \times 7 = \frac{84}{11}$ heures

Or
$$\frac{84}{11} = \frac{7\times 11 + 7}{11} = 7 + \frac{7}{11}$$
Soit 7 heures et $\frac{7}{11}$ d'heure.

Or
$$\frac{7}{11} \times 60 = \frac{420}{11} = \frac{38\times 11 + 2}{11} = 38 + \frac{2}{11}$$
Le croisement est donc à environ 7 heures et 38 minutes.



3.4. Adaptation à d'autres problèmes d'horloges

Quelle heure est-il lorsque les deux aiguilles sont opposées, forment un angle droit ?

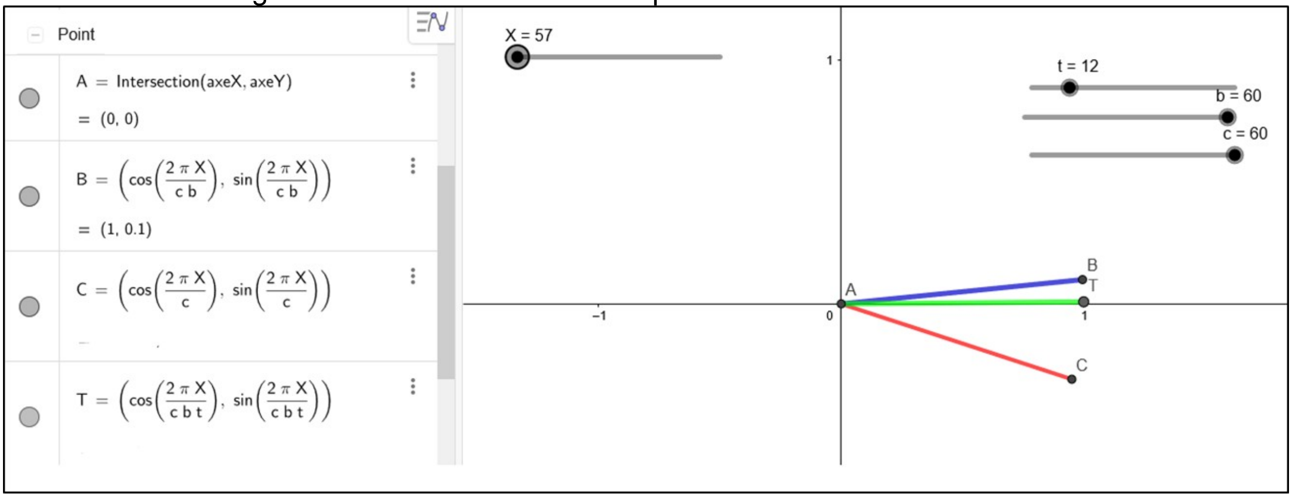
1. Pour les opposées, nous avons constaté qu'on obtient les même résultats avec juste un décalage de 6 heures : la première opposition étant à 6h00min00sec, puis les opposition suivantes toutes les $\frac{12}{11}$heures
2. Pour l'angle droit, ,nous avons constaté que le problème est bien différent et nous n'avons pas eu le temps d'aller plus loin.

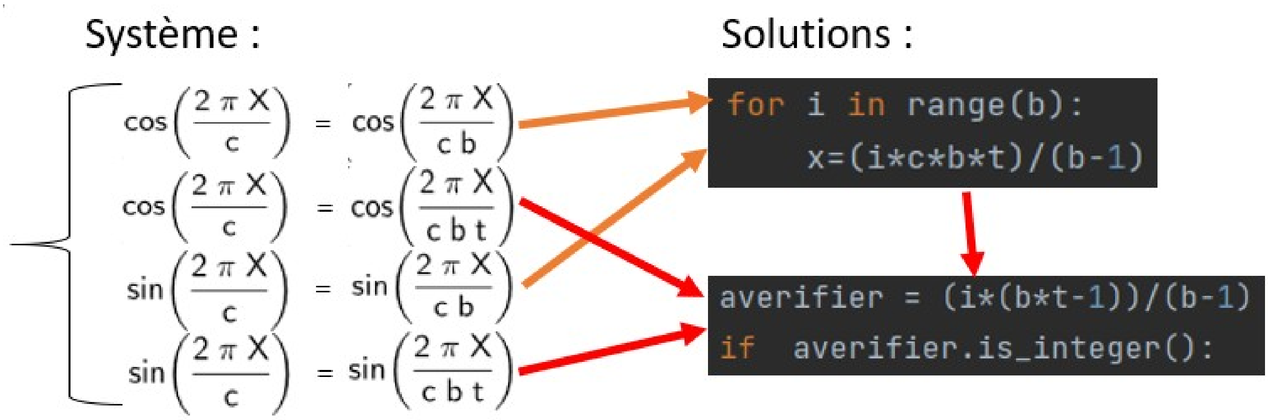
3.5. Programme Python

Nous avons tenté de réaliser un programme Python avec des fonctions qui au choix

- nous donne l'heure quand deux aiguilles sont au même endroit.
- nous indique si les trois aiguilles peuvent être au même endroit

Modèle d'une horloge à l'aide de coordonnées de points :





Horloge modèle M :

T est l'aiguille des Trucs, B l'aiguille des Bidules et C l'aiguille des Chouettes lorsque une journée est découpée en t Trucs, chaque Trucs est découpé en b Bidules et chaque Bidule est découpé en c Chouettes ;

x est le temps en Chouette :

$C \to 2*pi*X/c$ $B \to 2*pi*X/(c*b)$ $T \to 2*pi*X/(c*b*t)$

Ex   C et B se croisent au temps où $C=B$

$\iff x/c=x/cb+k$ où k est un nombre entier de tours du cadran

$\iff x(b)/cb-x(1)/cb=k$

$\iff x(b-1)/cb=k$

$\iff x(b-1)=kcb$

$\iff$ **$x = k*c*b/(b-1)$**

on a donc $x0 = 0$

$x1 = c*b/(b-1)$

$x2 = 2c*b/(b-1)$

$x3 = 3c*b/(b-1)$

…

$xf = (b-1)*c*b/(b-1)$

```
# Créé par raphael.maria, le 30/11/2023 en Python 3.7
import math
def croiseheure(c,b):
    print("les aiguilles se croisent à")
    for i in range(b):              # effectue pour chaque

        x=i*c*b/(b-1)              # calcule du nombre de Chouette

        a1=math.ceil(x)

        if x-a1!= 0:
            b1 = x//c              # calcule l'heure en Bidule
            c1 = x%c               # calcule l'heure en Chouette

            print(b1,"Bidules et ",c1,"Chouettes")

        if x-a1 == 0:
            b1 = x//c              # calcule l'heure en Bidule
            c1 = x%c               # calcule l'heure en Chouette

            print(b1,"Bidules et ",c1,"Chouettes")
```

Testé sur l’horloge classique découpée en 12 heures, chacune découpée en 60 minutes : on retrouves les résultats établis théoriquement plus haut

```
les aiguilles se croisent à
0.0 Bidules et  0.0 Chouettes
1.0 Bidules et  5.454545454545453 Chouettes
2.0 Bidules et  10.909090909090907 Chouettes
3.0 Bidules et  16.363636363636374 Chouettes
4.0 Bidules et  21.818181818181813 Chouettes
5.0 Bidules et  27.272727272727252 Chouettes
6.0 Bidules et  32.72727272727275 Chouettes
7.0 Bidules et  38.18181818181819 Chouettes
8.0 Bidules et  43.636363636363626 Chouettes
9.0 Bidules et  49.09090909090912 Chouettes
10.0 Bidules et  54.545454545454504
Chouettes
12.0 Bidules et  0.0 Chouettes
```

Pour les superpositions des aiguilles des minutes et des secondes :

cos(2πx/c)=cos(2πx/cb)
cos(2πx/cb)=cos(2πx/cbt)
sin(2πx/c)=sin(2πx/cb)
sin(2πx/cb)=sin(2πx/cbt

2πx/c=2πx/cb+k1π
2πx/cb=2πx/cbt+2k2π
(k1, k2) ∈ ℕ2
x=k1cb/b-1
x=k2cbt/t-1

```
# suite du programme avec trois aiguilles :

def croise3aiguilles(t,b,c):
    if c<=1 or b<=1 or t<=1:
        print("Le programme ne marche pas avec des valeurs plus petites
que 2 :_(")
    else:
        print("les aiguilles se croisent a  :")

        for i in range(b):             # effectue pour chaque
            x=(i*c*b*t)/(b-1)             # soit x le temps ecoule en
chouette quand les "aiguilles b et c se croisent"

            averif = (i*(b*t-1))/(b-1)
            if  averif.is_integer():
                T=x/(c*b)
                B = (T-trunc(T))*b
                C = (B-trunc(B))*c
                if i==(b-1):
                    print("")
                    print("Retour aux positions initiales :")
                print(trunc(T),"Trucs, ",trunc(B),"Bidules,
",trunc(C),"Chouettes, ")

def DecoupageHorloge():
    T=int(input("Une journee est decoupee en : ..... Trucs"))
    B=int(input("Chaque Truc est decoupe en : ..... Bidules"))
    C=int(input("Chaque Bidule est decoupe en : ..... Chouettes"))
    croise3aiguilles(T,B,C)
```

3.6. Elargissement : Eclipses

Nous avons recherché les périodes de révolution de chaque planète du système solaire pour adapté le découpage de l’horloge en fonction de ces temps :
Mercure : ~ 87,969 256 jours2(~88 jours~)
Vénus : ~ 224,699 705 6 jours2(~225 jours~)
Terre : ~ 365,256 363 051 jours2 (1 année)

Mars : ~ 686,979 852 jours2 (~ 1 année +321 jours~)
Jupiter : ~ 4 332,589 jours2 (~ 11 années +315 jours)
Saturne : ~ 10 759,23 jours2 (~ 29 années + 167 jours~)
Uranus : ~ 30 685,4 jours2 (~ 84 années)
Neptune : ~ 60 266 jours2 (~ 164 années + 280 jours)

En étudiant les périodes de la Terre et de Saturne, nous constatons que :

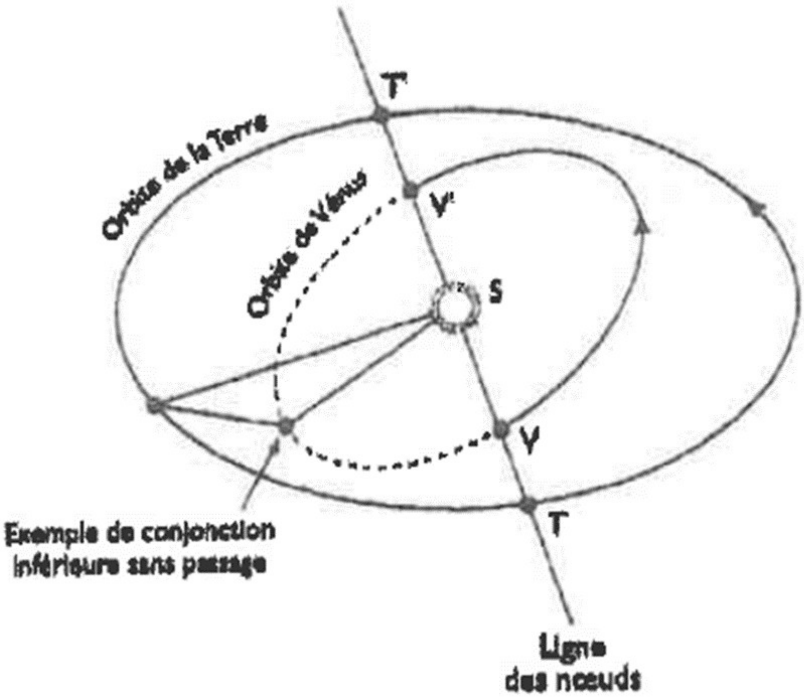
$$T_{Terre} = 365{,}25\ jours = 31\ 557\ 600\ s$$
$$T_{Saturne} = 4332{,}59\ jours = 374\ 335\ 776\ s$$
$$\frac{T_{Saturne}}{T_{Terre}} \approx \frac{59}{5}$$

Pour 5 tours de Saturne autour du Soleil, la Terre en fait 59. Nous avons essayé d'adapter notre modèle en changeant d'unité : au lieu d'un tour de cadran comme référence pour l'aiguille des heures, il faudrait considérer comme « unité » 5 tours de Saturne autour du soleil. Nous avons imaginé avec l'approche graphique les 59 droites de la Terre par rapport a la droite de Saturne : nous sommes ramené à résoudre 59 systèmes

$\begin{cases} y = 5x \\ y_n = 59x - 59n \end{cases}$, pour n allant de 0 à 58

Changement des planètes étudiées en fonction d'un fait qui a pu être observé il y a peu d'années : le passage de Vénus entre la Terre et le Soleil : nous remplaçons Saturne par Vénus.

Résultat : Tt/Tv = 1.625 = 13/8



Problèmes rencontrés :

- Les planètes ne sont pas forcément sur le même plan
- Les trajectoires des planètes ne sont pas exactement circulaires
- ⟹ Leur vitesse n’est pas forcément constante

Si toutes les planètes du système solaire étaient toutes alignées sur le même plan, alors la Terre et Vénus devraient s’aligner tous les 8 ans et 8 mois.
Cependant, comme ces planètes ont une légère différence dans leur trajectoire respective, la probabilité qu’elles se croisent est en réalité plus faible !!! 😱

4. Conclusion

En conclusion, nous avons donc réussi à résoudre notre problème, mais malheureusement nous n’avons pas eu le temps d’aller au bout de notre élargissement. Nous avons simplement pu avoir des résultats concluant pour les éclipses même si nous avons réussi à obtenir des résultats, ils ne sont pas très fiable à cause de nombreux facteurs qui fausse les résultats. Il y a par exemple le fait que les planètes ne soit pas sur le même axe ou encore que leur vitesse n’est pas complètement constante ou même que les planètes n’ont pas des trajectoires totalement circulaire.