Des grilles harmonieuses

Année 2023 – 2024

Margot Albrecht, Missipsa Bensalem, Salomé Bergeron, Baptiste Bigot,
Aurélien Burgaud, Lilou Crassard, Cheikh-Tahir Fall, Alix Gaillard, Flore Garcia,
Capucine Gilles, Natoye Gotoraye, Victorien Journet, Hacène Khammar,
Syrine Mohsni, Alice Reboulet, Noé Roman, Romane Villard et Lou Schanen

Établissements : Lycée Edouard Herriot (Lyon) et lycée Jean-Paul Sartre (Bron)

Enseignantes : Elisabeth Bruyère, Marie Desquesne, Sylvie Di Fazio et Magali Favre

Chercheur·es : Aline Parreau et Quentin Deschamps (LIRIS, CNRS et Université Lyon 1)

1. Introduction

On dispose d'une grille carrée vide à autour de laquelle des nombres sont écrits. Le but est de remplir la grille de sorte que chaque case soit la moyenne des cases qui lui sont adjacentes.
Les problématiques suivantes ont été abordées :

- Peut-on toujours compléter une grille donnée ?
- Existe-t-il une méthode pour remplir les grilles ?
- Pour une grille donnée, la solution est-elle unique ?

Dans tout ce qui suit, une grille remplie en respectant les conditions imposées sera nommée « grille harmonieuse ».

Grille de départ :

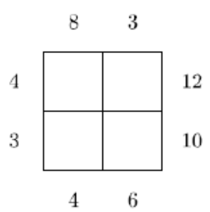

Figure 1

Grille remplie :

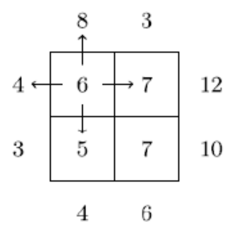

Figure 2

2. Résolution de lignes

Afin de mieux comprendre le sujet, nous avons tout d'abord étudié le cas de lignes pour lesquelles seuls deux nombres sont donnés : ceux figurant respectivement à gauche et à droite de la ligne. Aucun nombre ne figure au-dessus ou en-dessous de la grille. Ainsi, chaque case de la grille contient la moyenne des deux cases adjacentes.

2.1. Lignes de 2 cases

Figure 3

Propriété : Il est toujours possible de compléter une ligne de 2 cases pour qu'elle devienne harmonieuse.

Démonstration :
On considère la ligne ci-dessus dans laquelle n_0 et n_3 sont donnés.
On cherche à déterminer x_1 et x_2 pour que la ligne soit harmonieuse.

On obtient le système : (S): $\begin{cases} x_1 = \frac{n_0+x_2}{2} \\ x_2 = \frac{n_3+x_1}{2} \end{cases}$

On résout ce système par substitution et on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2n_0 + n_3}{3} \\ x_2 = \dfrac{2n_3 + n_0}{3} \end{cases}$$

2.2. Lignes de 3 cases

Figure 4

Propriété : Il est toujours possible de compléter une ligne de 3 cases pour qu'elle devienne harmonieuse.

Démonstration :
On considère la ligne ci-dessus dans laquelle n_0 et n_4 sont donnés.
On cherche à déterminer x_1, $x_2$et x_3 pour que la ligne soit harmonieuse.

On obtient le système : (S): $\begin{cases} x_1 = \frac{n_0+x_2}{2} \\ x_2 = \frac{x_1+x_3}{2} \\ x_3 = \frac{x_2+n_4}{2} \end{cases}$

Résolution du système par substitution :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{n_0 + x_2}{2} \\ x_2 = \dfrac{n_0 + 2x_2 + n_4}{4} \\ x_3 = \dfrac{x_2 + n_4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{n_0 + x_2}{2} \\ x_2 = \dfrac{n_0 + n_4}{2} \\ x_3 = \dfrac{x_2 + n_4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3n_0 + n_4}{4} \\ x_2 = \dfrac{n_0 + n_4}{2} \\ x_3 = \dfrac{n_0 + 3n_4}{4} \end{cases}$$

2.3. Généralisation pour des lignes de longueur quelconque

Figure 5

<u>Propriété</u> : Il est toujours possible de compléter une ligne pour qu'elle devienne harmonieuse.

<u>Démonstration</u>

On considère la ligne ci-dessus dans laquelle n_0 et n_y sont donnés.
On cherche à déterminer $x_1, x_2, \dots,\ x_{y-1}$ pour que la ligne soit harmonieuse.

On note $\alpha = \frac{n_y - n_0}{y}$ et $u_0 = n_0, u_1 = x_1, \dots, u_{y-1} = x_{y-1}$, et $u_y = n_y$.
Pour tout entier naturel n compris entre 0 et y, on a $u_{n+1} = u_n + n\alpha$ (1).
On reconnaît une suite arithmétique de premier terme $u_0 = n_0$ et de raison α.

Pour tout entier naturel n compris entre 0 et $y - 1$, on a alors :

$$\frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = \frac{u_n + \alpha + u_n - \alpha}{2} = \frac{2u_n}{2} = u_n$$

Donc chaque case intérieure de la ligne est bien égale à la moyenne des deux cases qui l'entourent.

<u>Exemple</u>

Figure 6

Dans ce cas, $y = 5$, $n_0 = 5$ et $n_y = 20$, donc $\alpha = \frac{20-5}{5} = 3$.

3. Résolution des carrés 2x2

<u>Propriété</u> : Il est toujours possible de compléter un carré 2×2 pour qu'il devienne harmonieux.

<u>Démonstration</u>
On considère le carré 2×2, ci-dessous dans lequel les nombres a, b, c, d, e, f, g et h sont donnés.
On cherche à déterminer les réels x, y, z et w pour que le carré soit harmonieux.

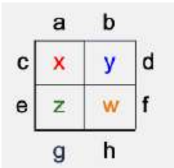

Figure 7

Nous savons que la moyenne des nombres entourant la case x est égal au nombre x. On obtient donc le système ci-dessous.

$$(S): \begin{cases} x = \dfrac{a + c + z + y}{4} \\ y = \dfrac{x + b + d + w}{4} \\ z = \dfrac{e + x + w + g}{4} \\ w = \dfrac{y + f + h + z}{4} \end{cases}$$

On résout le système :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y - z = a + c \\ w + x - 4y = -b - d \\ w + x - 4z = -e - g \\ 4w - y - z = f + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y - (4w - y - f - h) = a + c \\ w + x - 4y = -b - d \\ w + x - 4(4w - y - f - h) = -e - g \\ z = 4w - y - f - h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4w = a + c - f - h \\ w + x - 4y = -b - d \\ -15w + x + 4y = -e - g - 4f - 4h \\ z = 4w - y - f - h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4w = a + c - f - h \\ w + x - 4y = -b - d \\ y = \dfrac{-e - g - 4f - 4h + 15w - x}{4} \\ z = 4w - y - f - h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4w = a + c - f - h \\ w + x + e + g + 4f + 4h - 15w + x = -b - d \\ y = \dfrac{-e - g - 4f - 4h + 15w - x}{4} \\ z = 4w - y - f - h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4w = a + c - f - h \\ 2x = -e - g - 4f - 4h - b - d + 14w \\ y = \dfrac{-e - g - 4f - 4h + 15w - x}{4} \\ z = 4w - y - f - h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2e - 2g - 8f - 8h - 2b - 2d + 28w - 4w = a + c - f - h \\ 2x = e + g - 4f - 4h - b - d + 14w \\ y = \dfrac{-e - g - 4f - 4h + 15w - x}{4} \\ z = 4w - y - f - h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24w = a + 2b + c + 2d + 2e + 7f + 2g + 7h \\ 2x = e + g - 4f - 4h + b + d + 14w \\ y = \dfrac{e + g - 4f - 4h + 15w - x}{4} \\ z = 4w - y - f - h \end{cases}$$

Avec la ligne 1, on obtient w et en substituant dans les autres lignes, on obtient x, y et z.

$$\begin{cases} w = \dfrac{7(f + g) + 2(e + g + b + d) + a + c}{24} \\ x = \dfrac{7(a + c) + 2(e + g + b + d) + f + h}{24} \\ y = \dfrac{7(b + d) + 2(f + h + a + c) + e + g}{24} \\ z = \dfrac{7(e + g) + 2(f + h + a + c) + b + d}{24} \end{cases}$$

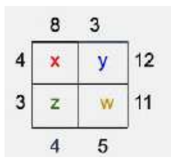

Figure 8

<u>Exemple</u> : On souhaite remplir le carré ci-contre.

On a alors $a = 8$; $b = 3$; $c = 4$; $d = 12$; $e = 3$; $f = 11$; $g = 4$; $h = 5$.

En remplaçant dans le système obtenu dans la démonstration précédente, on trouve

$$w = 7\,;\; x = 6\,;\; y = 7 \text{ et } z = 5$$

Le carré harmonieux correspondant aux nombres donnés est donc :

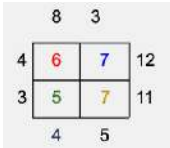

Figure 9

4. Premières propriétés

4.1. Multiplication par un réel

<u>Propriété :</u> Si on multiplie un carré harmonieux case par case par un nombre réel k alors on obtient un nouveau carré harmonieux.

<u>Illustration</u>

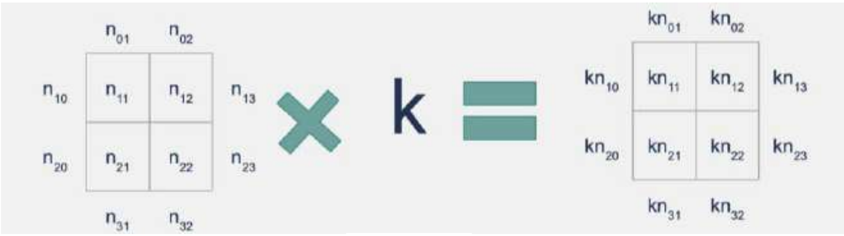

Figure 10

<u>Démonstration</u>

Soit k un réel.

Le carré est harmonieux, donc n_{11} est la moyenne des nombres $n_{01}; n_{12}; n_{21}; n_{10}$ et on a

$$n_{11} = \frac{n_{01} + n_{1,2} + n_{21} + n_{1,0}}{4}$$

En multipliant l'égalité par k, on obtient :

$$kn_{11} = k \times \frac{n_{01} + n_{12} + n_{21} + n_{1,0}}{4} = \frac{kn_{01} + kn_{12} + kn_{21} + kn_{10}}{4}$$

Donc kn_{11} est la moyenne des nombres $kn_{01};\; kn_{12};\; kn_{21};\; kn_{10}$.

Par un raisonnement analogue sur les 3 autres cases centrales, on montre que le carré obtenu est harmonieux.

<u>Remarque</u> : la propriété se généralise aux carrés de côté n.

4.2. Addition de deux carrés harmonieux

<u>Propriété :</u> Si on additionne deux carrés harmonieux case par case alors on obtient un nouveau carré harmonieux

<u>Illustration</u>

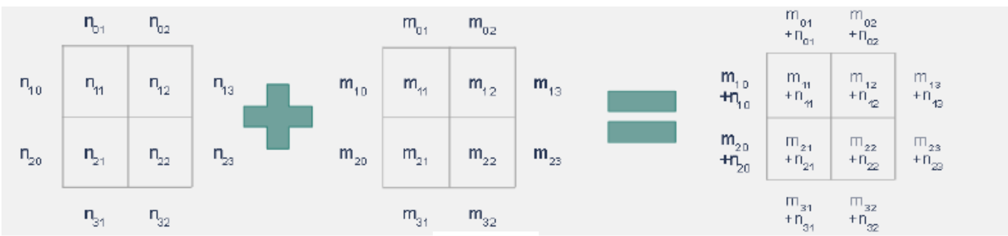

Figure 11

Démonstration

On a

- n_{11} la moyenne des nombres $n_{01};\ n_{1,2};\ n_{21};\ n_{1,0}$ donc $n_{11} = \frac{n_{01}+n_{12}+n_{21}+n_{10}}{4}$
- m_{11} la moyenne des nombres $m_{01};\ m_{1,2};\ m_{21};\ m_{1,0}$ donc $m_{11} = \frac{m_{01}+m_{12}+m_{21}+m_{10}}{4}$.

On somme les deux égalités et on obtient :

$$n_{11} + m_{11} = \frac{n_{01} + n_{12} + n_{21} + n_{10}}{4} + \frac{m_{01} + m_{12} + m_{21} + m_{10}}{4}$$

soit

$$n_{11} + m_{11} = \frac{n_{01} + m_{01} + n_{12} + m_{12} + n_{21} + m_{21} + n_{10} + m_{10}}{4}$$

Donc $n_{11} + m_{11}$ est la moyenne des nombres $n_{01} + m_{01};\ n_{12} + m_{12};\ +m_{21};\ n_{10} + m_{10}$.

Par raisonnement analogue sur les 3 autres cases centrales, on montre que le carré somme est harmonieux

La propriété se généralise aux carrés de côté n

5. Unicité

5.1. Résultat préliminaire.

<u>Propriété de la moyenne</u> : Si $\overline{\boldsymbol{x}}$ est la moyenne des nombres $\boldsymbol{x_1};\ \boldsymbol{x_2};\ \boldsymbol{x_3};\ \dots;\ \boldsymbol{x_n}$, alors

- soit $\overline{x} = x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$,
- soit, il existe $(i\ ;\ j)$ appartenant à $\mathbb{N}^2$ tel que $x_i < \overline{x}$ et $x_j > \overline{x}$.

5.2. Unicité dans un carré de 2×2 avec uniquement des 0 autour.

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & 0 & 0 & \\ \hline
0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hline
0 & n_3 & n_4 & 0 \\ \hline
 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Figure 12

> **<u>Propriété</u>** : On considère le carré ci-contre.
> L'unique solution pour obtenir un carré harmonieux est $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$.

Démonstration

On suppose que n_1 est le maximum des nombres n_1, n_2, n_3, n_4.
On le suppose positif (s'il est négatif on raisonnera avec le minimum qui serait alors négatif).
Donc, $n_1 = \max(n_1; n_2;\ n_3;\ n_4)$ et $n_1 \geq 0$.

De plus n_1 est la moyenne des nombres $n_2;\ n_3;\ 0$ et 0. Comme $n_1 \geq n_2$, $n_1 \geq n_3$ et $n_1 \geq 0$, il n'existe pas de de valeur strictement supérieure à n_1.
Donc, d'après la propriété de la moyenne, on a $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. n_4 étant la moyenne de 4 nombres tous égaux à 0, on a $n_4 = 0$.

Conclusion : Donc, un carré avec uniquement des 0 comme nombres extérieurs admet une unique solution : $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$.

Généralisation pour carrés de côté n

On peut généraliser pour des grilles de côtés n et m car si on place un maximum positif dans notre grille alors, comme on se trouve dans un cas où il n'y a aucun nombre supérieur à lui autour de notre maximum, les nombres autour sont égaux au maximum. Il se propage alors de proche en proche.

Lorsqu’on tombe sur un bord avec un zéro, on peut alors en déduire, par le même raisonnement que précédemment, que notre maximum est 0. D’où la propriété :

<u>Propriété</u> : Une grille de côtés n et m avec seulement des 0 autour admet une unique solution qui est uniquement des 0 à l'intérieur de la grille.

5.3. Unicité

<u>Propriété</u> : Pour toute grille, il n’existe qu’une unique solution.

<u>Démonstration</u>

- Cas particulier d’un carré 2×2 :

On suppose qu’il existe deux carrés solutions pour un même extérieur

$$\begin{array}{cccc} & n_{01} & n_{02} & \\ n_{10} & \begin{array}{|c|}\hline x_1 \\ \hline x_3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|}\hline x_2 \\ \hline x_4 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} n_{13} \\ n_{23} \end{array} \\ & n_{31} & n_{32} & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & n_{01} & n_{02} & \\ n_{10} & \begin{array}{|c|}\hline y_1 \\ \hline y_3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|}\hline y_2 \\ \hline y_4 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} n_{13} \\ n_{23} \end{array} \\ & n_{31} & n_{32} & \end{array}$$

Figure 13

On soustrait un carré à l’autre ce qui nous donne le nouveau carré harmonieux ci-contre d’après les propriétés sur les opérations.
On obtient alors un carré avec uniquement des 0 autour.

Or, d’après la propriété sur les carrés avec uniquement des zéros autour, l’unique solution est $S = \{0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\}$.

Donc $x_1 - y_1 = 0$, soit $x_1 = y_1$.
Quel que soit l’entier i appartenant à $[1\ ;\ 4]$, $x_i = y_i$.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 0 & 0 & \\ \hline 0 & x_1 - y_1 & x_2 - y_2 & 0 \\ \hline 0 & x_3 - y_3 & x_4 - y_4 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & \end{array}$$

Figure 14

<u>Conclusion</u> : Il existe donc une unique solution pour un carré de 2×2.

- Pour le cas général d’une grille, on raisonne de manière analogue pour démontrer l’unicité.

5.4. Conséquence sur la symétrie

<u>Propriété</u> : Un carré ayant un extérieur symétrique a nécessairement une solution symétrique

<u>Illustration</u>

	n1	m	n1	
n2	C	x_1	C	n2
n3	B	x_2	B	n3
n4	A	x_3	A	n4
	n5	m	n5	

Figure 15

Démonstration

Prenons un carré qui a un extérieur symétrique et dont on a trouvé la solution comme sur la figure 16 ci-dessous (2) :

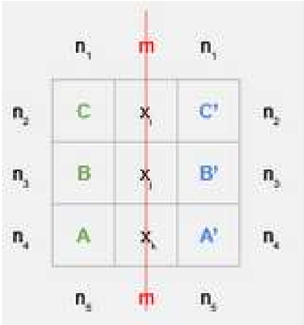

Figure 16

Si on prend le symétrique de la solution comme intérieur (voir figure 17), la symétrie extérieure permet à ce nouvel intérieur d'être également solution

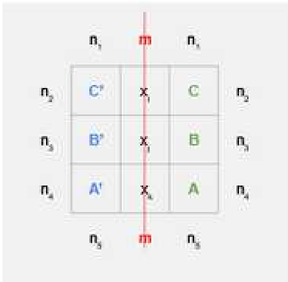

Figure 17

D'après la propriété sur l'unicité, un même extérieur n'a qu'une unique solution.
On en déduit donc que les deux solutions trouvées précédemment sont les mêmes c'est à dire que

$$C' = C ; B' = B \text{ et } A' = A$$

On obtient ainsi comme solution du carré un carré comme ci-contre c'est-à-dire avec un intérieur possédant un axe de symétrie.

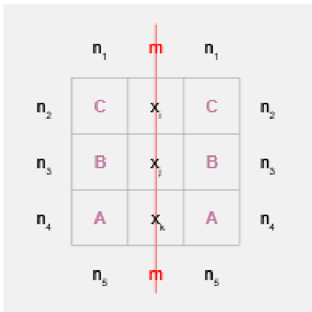

Figure 18

6. Carrés 3x3

On a ensuite cherché une solution autre que des systèmes pour remplir des carrés de 3 par 3. Pour cela, on a pris deux carrés particuliers initiaux (3).

6.1. Remplissage de deux carrés particuliers 3 par 3

Notre chercheuse nous a donné deux carrés particuliers à remplir :

Carré 1 : Dans ce cas, tous les nombres extérieurs sont égaux à zéro sauf deux nombres n et m que l'on cherche à déterminer.
Le chiffre 1 est également placé dans l'angle en bas à gauche.

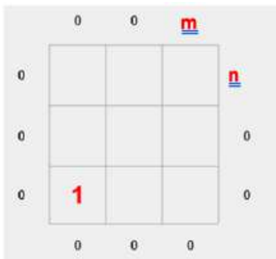

Figure 19

Carré 2 : Dans ce cas, tous les nombres extérieurs sont égaux à zéro sauf un nombre au centre que l'on cherche à déterminer.
Le chiffre 1 est également placé dans en bas au milieu.

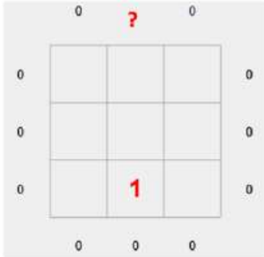

Figure 20

Pour le carré 1, en résolvant un système nous avons obtenu le carré ci-dessous comme solution avec comme contrainte :

$$m + n = \frac{224}{3}$$

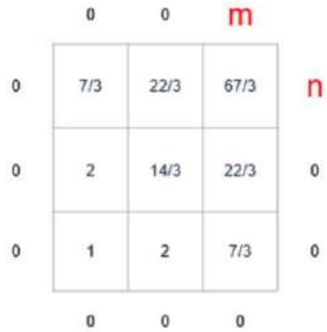

Figure 21

<u>Conséquence</u>

En multipliant ce carré harmonieux par une constante, on obtient un nouveau carré harmonieux, on sait donc remplir tous les carrés du type ci-contre.

Il suffit de prendre pour constante le réel k donné par

$$k = \frac{x + y}{m + n}.$$

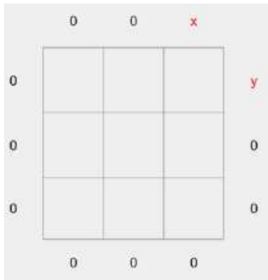

Figure 22

Pour le carré 2, en résolvant un système, nous avons obtenu le carré ci-dessous comme solution :

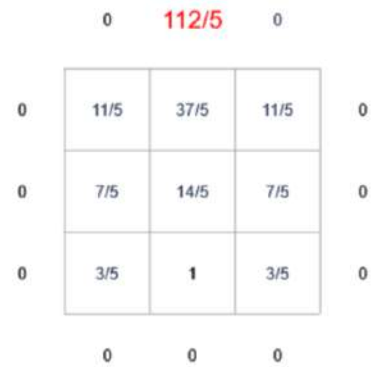

Figure 23

Figure 24

Conséquence

En multipliant également ce carré harmonieux par une constante, on obtient un nouveau carré harmonieux, on sait donc remplir tous les carrés du type ci-contre.

Il suffit de prendre pour constante le réel k donné par

$$k = \frac{5z}{112}.$$

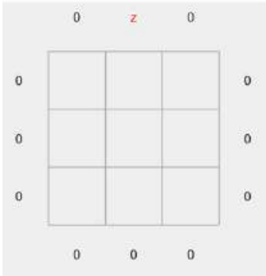

Fig. 24

Et par rotation, on sait remplir les carrés ci-dessous :

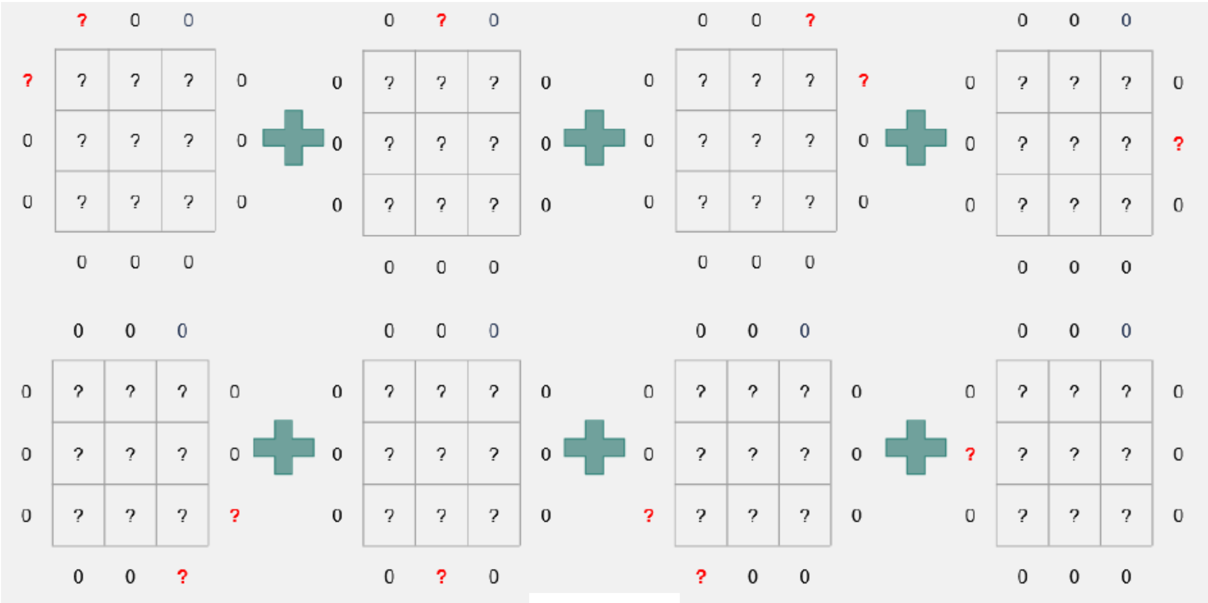

Figure 25

6.2. Application à la généralisation des carrés de 3 par 3 :

On va expliquer, en utilisant l'exemple ci-dessous, la méthode pour remplir une grille 3 par 3 en utilisant les résultats ci-dessus.

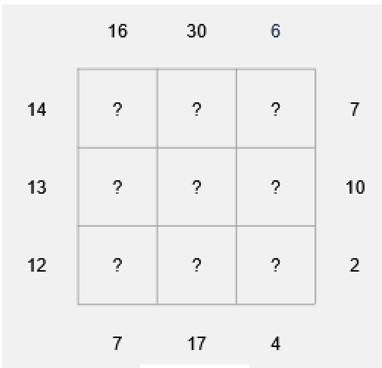

Figure 26

On décompose le carré en 8 grilles, comme ci-dessous, afin d'utiliser nos deux carrés précédents.

On obtient alors pour notre exemple la décomposition suivante :

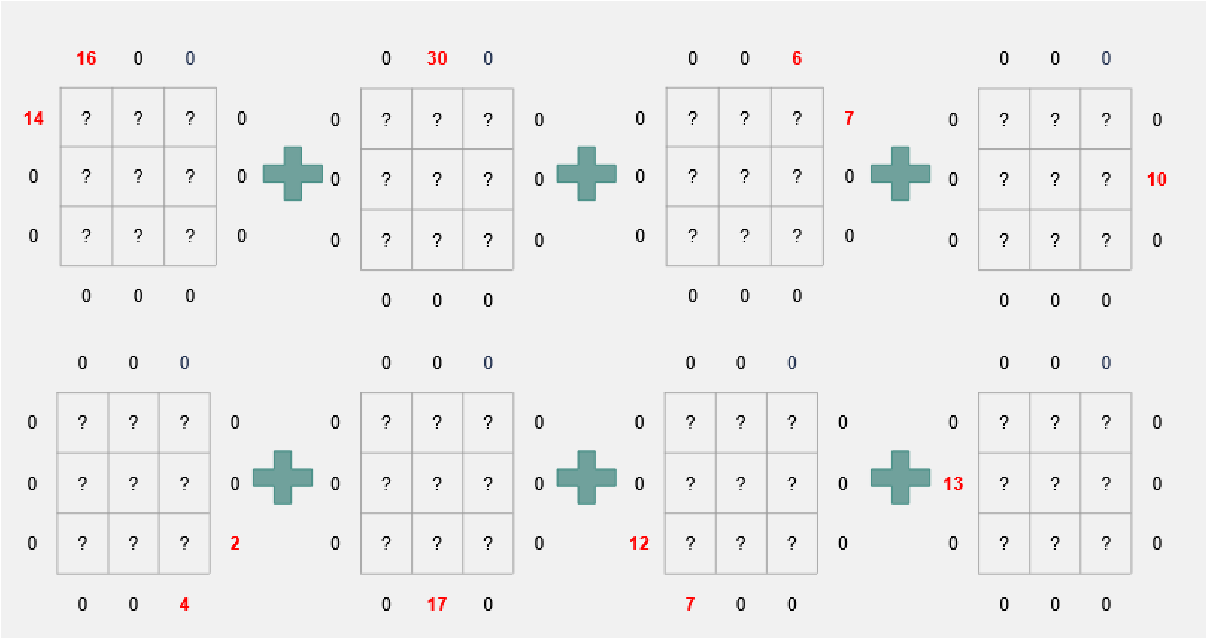

Figure 27

On va chercher à les remplir les uns après les autres indépendamment en utilisant nos deux carrés initiaux complétés puis on les additionnera.

Si le carré que l'on prend n'a que des zéros autour sauf dans un sommet, alors on utilise le carré 1 et on cherche le coefficient de proportionnalité afin d'obtenir le carré qu'on souhaite comme expliqué ci-dessous.

On a le premier carré et on cherche à remplir le second :

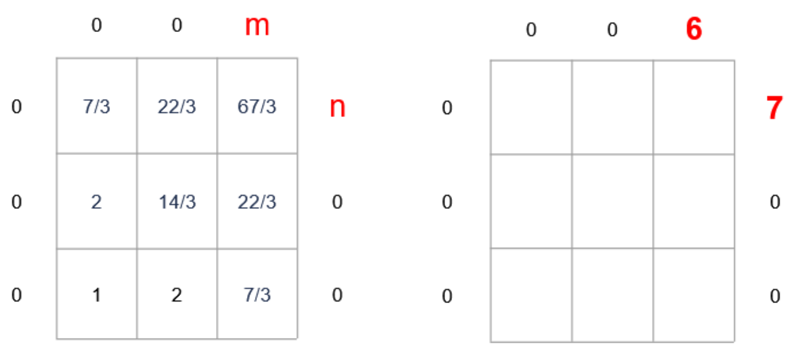

Figure 28

Pour cela :

$$6 + 7 = 13$$

$$m + n = 224/3$$

$$\left(\frac{224}{3}\right) \times k = 13$$

$$k = \frac{13 \times 3}{224}$$

$$k = 39/224.$$

Il faut donc multiplier tous les termes du carré de gauche par $39/224$.

On obtient alors

	0	0	m	
0	7/3	22/3	67/3	n
0	2	14/3	22/3	0
0	1	2	7/3	0
	0	0	0	

× 39 / 224 =

	0	0	6	
0	364/224	286/224	871/224	7
0	78/224	182/224	286/224	0
0	39/224	78/224	364/224	0
	0	0	0	

Figure 29

Si le carré a un nombre au centre d'une arête, alors on fait le même processus mais avec le carré 2 :

	0	**112/5**	0	
0	11/5	37/5	11/5	0
0	7/5	14/5	7/5	0
0	3/5	1	3/5	0
	0	0	0	

	0	**30**	0	
0				0
0				0
0				0
	0	0	0	

$$30 \times k = \frac{112}{5}$$

donc

$$k = \frac{112}{5\times 30} = \frac{112}{150} = \frac{56}{75}.$$

Figure 30

On obtient alors

	0	112/5	0	
0	11/5	37/5	11/5	0
0	7/5	14/5	7/5	0
0	3/5	1	3/5	0
	0	0	0	

× 56 / 75 =

	0	30	0	
0	616/375	2072/375	616/375	0
0	392/375	784/375	392/375	0
0	56/125	56/75	56/125	0
	0	0	0	

Figure 31

On procède de la même façon pour obtenir les huit carrés harmonieux, puis on les additionne pour obtenir la grille harmonieuse voulue.

Dans le cas de notre exemple, on obtient

	16	30	6	
14	15	17	10	7
13	13	13	10	10
12	11	12	7	2
	7	17	4	

Figure 32

Ainsi, pour chaque carré de 3×3 que l'on souhaite remplir, il suffit de

- le décomposer en 8 carrés (comme fait auparavant) ;
- remplir chacun de ces carrés séparément avec nos deux carrés initiaux ;
- les additionner.

Avec cette méthode, nous pouvons donc remplir n'importe quelle grille de carrés 3×3.

7. Conclusion

Notre étude a permis de démontrer que l'on peut remplir des lignes pour lesquelles seuls deux nombres aux extrémités sont donnés ainsi que des carrés de tailles quelconques (4). Pour les carrés, la méthode calculatoire impliquant la résolution d'un système est trop fastidieuse pour être mise en œuvre sur des carrés de grandes tailles. La démonstration de l'unicité puis la décomposition des carrés ont permis de trouver une méthode de remplissage plus pratique.
Nous avons pu constater que la table de multiplication est un cas très particulier de grille harmonieuse dans lequel tout carré ou tout rectangle extrait de la table est lui-même une grille harmonieuse.
Pour poursuivre cette étude, on pourrait s'intéresser à des carrés encore plus grands ou à des formes géométriques puis complexes, régulières ou non.

Notes d'édition

(1) En effet, pour $1 \leq n < y$ on doit avoir $u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1})$, d'où $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$: les accroissements de cette suite sont tous égaux, donc $u_n = u_0 + n\alpha$ pour un certain réel α. Avec $n = y$ on a alors $y\alpha = u_y - u_0 = n_y - n_0$, ce qui donne la valeur de α.

(2) Les figures sont données pour une symétrie par rapport à l'axe vertical, mais la démonstration et le résultat valent aussi pour les symétries par rapport à l'axe horizontal ou par rapport à l'une des diagonales.

(3) Plus précisément, ces deux carrés particuliers vont être résolus au moyen de systèmes d'équations mais ils permettront ensuite de remplir tous les autres carrés 3×3 par un calcul beaucoup plus simple.

(4) Ceci a été montré pour les carrés $1 \times n$, 2×2 et 3×3, mais pas pour une taille quelconque.