

Des grilles harmonieuses

Année 2023 – 2024

Albrecht Margot; Bensalem Missipsa ; Bergeron Salomé ; Bigot Baptiste ; Burgaud Aurélien ; Crassard Lilou ; Fall Cheikh-Tahir ; Gaillard Alix ; Garcia Flore ; Gilles Capucine ; Gotoraye Natoye ; Journet Victorien ; Khammar Hacène ; Mohsni Syrine ; Reboulet Alice ; Roman Noé ; Villard Romane ; Schanen Lou.

Établissement(s) : Lycée Edouard Herriot (Lyon) et lycée Jean-Paul Sartre (Bron)

Enseignantes : Elisabeth Bruyère ; Marie Desquesne ; Sylvie Di Fazio ; Magali Favre

Chercheur-Chercheuse(s) : Aline Parreau (CNRS Lyon 1) ; Quentin Deschamps (Lyon 1)

1. Introduction

On dispose d'une grille carrée vide à autour de laquelle des nombres sont écrits. Le but est de remplir la grille de sorte que chaque case soit la moyenne des cases qui lui sont adjacentes.

Les problématiques suivantes ont été abordées :

- Peut-on toujours compléter une grille donnée ?
- Existe-t-il une méthode pour remplir les grilles ?
- Pour une grille donnée, la solution est-elle unique ?

Dans tout ce qui suit, une grille remplie en respectant les conditions imposées sera nommée « grille harmonieuse ».

Grille de départ :

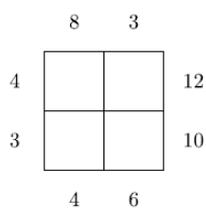


Figure 1

Grille remplie :

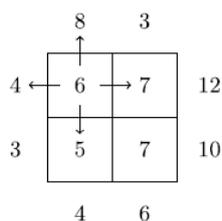


Figure 2

2. Résolution de lignes

Afin de mieux comprendre le sujet, nous avons tout d'abord étudié le cas de lignes pour lesquelles seuls deux nombres sont donnés : ceux figurant respectivement à gauche et à droite de la ligne. Aucun nombre ne figure au-dessus ou en-dessous de la grille. Ainsi, chaque case de la grille contient la moyenne des deux cases adjacentes.

2.1. Lignes de 2 cases



Figure 3

Propriété : Il est toujours possible de compléter une ligne de 2 cases pour qu'elle devienne harmonieuse.

Démonstration :

On considère la ligne ci-dessus dans laquelle n_0 et n_3 sont donnés.

On cherche à déterminer x_1 et x_2 pour que la ligne soit harmonieuse.

On obtient le système : (S) :
$$\begin{cases} x_1 = \frac{n_0 + x_2}{2} \\ x_2 = \frac{n_3 + x_1}{2} \end{cases}$$

On résout ce système par substitution et on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2n_0 + n_3}{3} \\ x_2 = \frac{2n_3 + n_0}{3} \end{cases}$$

2.2. Lignes de 3 cases



Figure 4

Propriété : Il est toujours possible de compléter une ligne de 3 cases pour qu'elle devienne harmonieuse.

Démonstration :

On considère la ligne ci-dessus dans laquelle n_0 et n_4 sont donnés.

On cherche à déterminer x_1 , x_2 et x_3 pour que la ligne soit harmonieuse.

On obtient le système : (S) :
$$\begin{cases} x_1 = \frac{n_0 + x_2}{2} \\ x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \\ x_3 = \frac{x_2 + n_4}{2} \end{cases}$$

Résolution du système par substitution :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{n_0 + x_2}{2} \\ x_2 = \frac{n_0 + 2x_2 + n_4}{4} \\ x_3 = \frac{x_2 + n_4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{n_0 + x_2}{2} \\ x_2 = \frac{n_0 + n_4}{2} \\ x_3 = \frac{x_2 + n_4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3n_0 + n_4}{4} \\ x_2 = \frac{n_0 + n_4}{2} \\ x_3 = \frac{n_0 + 3n_4}{4} \end{cases}$$

2.3. Généralisation pour des lignes de longueur quelconque

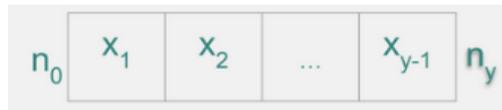


Figure 5

Propriété : Il est toujours possible de compléter une ligne pour qu'elle devienne harmonieuse.

Démonstration :

On considère la ligne ci-dessus dans laquelle n_0 et n_y sont donnés.

On cherche à déterminer x_1, x_2, \dots, x_{y-1} pour que la ligne soit harmonieuse.

On note $\alpha = \frac{n_y - n_0}{y}$ et $u_0 = n_0, u_1 = x_1, \dots, u_{y-1} = x_{y-1}$ et $u_y = n_y$.

Pour tout entier naturel n compris entre 0 et y , on a $u_{n+1} = u_n + \alpha$.

On reconnaît une suite arithmétique de premier terme $u_0 = n_0$ et de raison α .

Pour tout entier naturel n compris entre 0 et $y - 1$, on a alors :

$$\frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = \frac{u_n + \alpha + u_n - \alpha}{2} = \frac{2u_n}{2} = u_n$$

Donc chaque case intérieure de la ligne est bien égale à la moyenne des deux cases qui l'entourent.

Exemple :

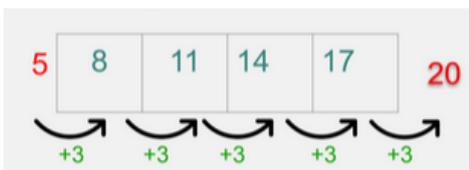


Figure 6

Dans ce cas, $y = 5, n_0 = 5$ et $n_y = 20$, donc $\alpha = \frac{20-5}{5} = 3$

3. Résolution des carrés 2x2

Propriété : Il est toujours possible de compléter un carré 2*2 pour qu'il devienne harmonieux.

Démonstration :

On considère le carré 2*2, ci-dessous dans lequel les nombres

a, b, c, d, e, f, g et h sont donnés.

On cherche à déterminer les réels x, y, z et w pour que le carré soit harmonieux.

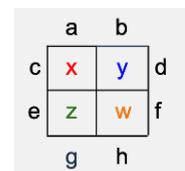


Figure 7

Nous savons que la moyenne des nombres entourant la case x est égal au nombre x . On obtient donc le système ci-dessous

$$(S): \begin{cases} x = \frac{a + c + z + y}{4} \\ y = \frac{x + b + d + w}{4} \\ z = \frac{e + x + w + g}{4} \\ w = \frac{y + f + h + z}{4} \end{cases}$$

On résout le système :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y - z = a + c \\ w + x - 4y = -b - d \\ w + x - 4z = -e - g \\ 4w - y - z = f + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y - (4w - y - f - h) = a + c \\ w + x - 4y = -b - d \\ w + x - 4(4w - y - f - h) = -e - g \\ z = 4w - y - f - h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4w = a + c - f - h \\ w + x - 4y = -b - d \\ -15w + x + 4y = -e - g - 4f - 4h \\ z = 4w - y - f - h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4w = a + c - f - h \\ w + x - 4y = -b - d \\ y = \frac{-e - g - 4f - 4h + 15w - x}{4} \\ z = 4w - y - f - h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4w = a + c - f - h \\ w + x + e + g + 4f + 4h - 15w + x = -b - d \\ y = \frac{-e - g - 4f - 4h + 15w - x}{4} \\ z = 4w - y - f - h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4w = a + c - f - h \\ 2x = -e - g - 4f - 4h - b - d + 14w \\ y = \frac{-e - g - 4f - 4h + 15w - x}{4} \\ z = 4w - y - f - h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2e - 2g - 8f - 8h - 2b - 2d + 28w - 4w = a + c - f - h \\ 2x = e + g - 4f - 4h - b - d + 14w \\ y = \frac{-e - g - 4f - 4h + 15w - x}{4} \\ z = 4w - y - f - h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24w = a + 2b + c + 2d + 2e + 7f + 2g + 7h \\ 2x = e + g - 4f - 4h + b + d + 14w \\ y = \frac{e + g - 4f - 4h + 15w - x}{4} \\ z = 4w - y - f - h \end{cases}$$

Avec la ligne 1, on obtient w et en substituant dans les autres lignes, on obtient x , y et z .

$$\begin{cases} w = \frac{7(f + g) + 2(e + g + b + d) + a + c}{24} \\ x = \frac{7(a + c) + 2(e + g + b + d) + f + h}{24} \\ y = \frac{7(b + d) + 2(f + h + a + c) + e + g}{24} \\ z = \frac{7(e + g) + 2(f + h + a + c) + b + d}{24} \end{cases}$$

Exemple : On souhaite remplir le carré ci-contre.

On a alors $a = 8; b = 3; c = 4; d = 12; e = 3; f = 11; g = 4; h = 5$.

En remplaçant dans le système obtenu dans la démonstration précédente, on trouve :

$$w = 7; x = 6; y = 7 \text{ et } z = 5$$

Le carré harmonieux correspondant aux nombres donnés est donc

	8	3	
4	x	y	12
3	z	w	11
	4	5	

Figure 8

	8	3	
4	6	7	12
3	5	7	11
	4	5	

Figure 9

4. Premières propriétés

4.1. Multiplication par un réel

Propriété : Si on multiplie un carré harmonique case par case par un nombre réel k alors on obtient un nouveau carré harmonique.

Illustration

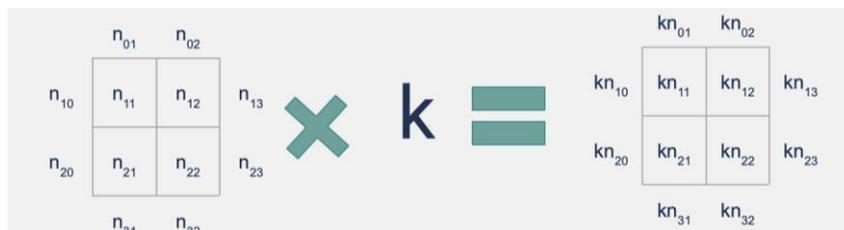


Figure 10

Démonstration :

Soit k un réel.

Le carré est harmonique donc n_{11} est la moyenne des nombres $n_{01}; n_{12}; n_{21}; n_{10}$ et on a :

$$n_{11} = \frac{n_{01} + n_{12} + n_{21} + n_{10}}{4}$$

En multipliant l'égalité par k , on obtient :

$$kn_{11} = k \times \frac{n_{01} + n_{12} + n_{21} + n_{10}}{4} = \frac{kn_{01} + kn_{12} + kn_{21} + kn_{10}}{4}$$

Donc kn_{11} est la moyenne des nombres $kn_{01}; kn_{12}; kn_{21}; kn_{10}$

Par un raisonnement analogue sur les 3 autres cases centrales, on montre que le carré obtenu est harmonique

Remarque : la propriété se généralise aux carrés de côté n

4.2. Addition de deux carrés harmoniques

Propriété : Si on additionne deux carrés harmoniques case par case alors on obtient un nouveau carré harmonique

Illustration

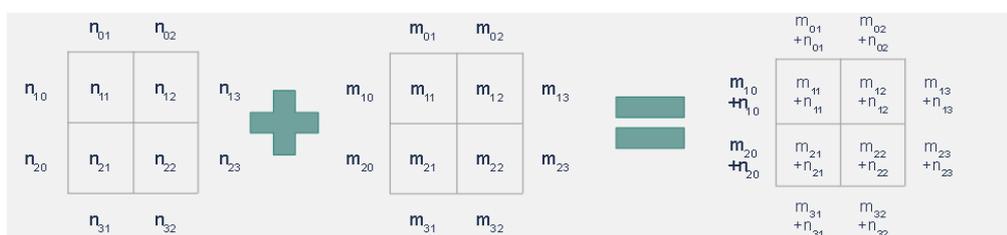


Figure 11

Démonstration :

On a :

- n_{11} la moyenne des nombres $n_{01}; n_{1,2}; n_{21}; n_{1,0}$ donc $n_{11} = \frac{n_{01} + n_{12} + n_{21} + n_{10}}{4}$
- m_{11} la moyenne des nombres $m_{01}; m_{1,2}; m_{21}; m_{1,0}$ donc $m_{11} = \frac{m_{01} + m_{12} + m_{21} + m_{10}}{4}$

On somme les deux égalités et on obtient :

$$n_{11} + m_{11} = \frac{n_{01} + n_{12} + n_{21} + n_{10}}{4} + \frac{m_{01} + m_{12} + m_{21} + m_{10}}{4}$$

Soit

$$n_{11} + m_{11} = \frac{n_{01} + m_{01} + n_{12} + m_{12} + n_{21} + m_{21} + n_{10} + m_{10}}{4}$$

Donc

$n_{11} + m_{11}$ est la moyenne des nombres $n_{01} + m_{01}$; $n_{12} + m_{12}$; $n_{21} + m_{21}$; $n_{10} + m_{10}$

Par raisonnement analogue sur les 3 autres cases centrales, on montre que le carré somme est harmonieux

La propriété se généralise aux carrés de côté n

5. Unicité

5.1. Résultat préliminaire.

Propriété de la moyenne : Si \bar{x} est la moyenne des nombres $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_n$, alors

- Soit, $\bar{x} = x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$
- Soit, il existe $(i ; j)$ appartenant à N^2 tel que $x_i < \bar{x}$ et $x_j > \bar{x}$

5.2. Unicité dans un carré de 2*2 avec uniquement des 0 autour.

Propriété : On considère le carré ci-contre.

L'unique solution pour obtenir un carré harmonieux est $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$.

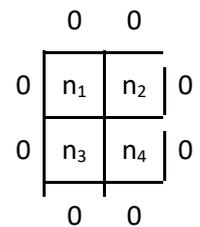


Figure 12

Démonstration.

On suppose que n_1 le maximum des nombres $n_1 ; n_2 ; n_3 ; n_4$.

On le suppose positif (s'il est négatif on raisonnera avec le minimum qui serait alors négatif).

Donc, $n_1 = \max(n_1 ; n_2 ; n_3 ; n_4)$ et $n_{11} \geq 0$

De plus n_1 est la moyenne des nombres $n_2 ; n_3 ; 0$ et 0 . Comme $n_1 \geq n_2$ et $n_1 \geq n_3$ et $n_1 \geq 0$, il n'existe pas de valeur strictement supérieure à n_1

Donc, d'après la propriété de la moyenne, on a $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. n_4 étant la moyenne de 4 nombres tous égaux à 0, on a $n_4 = 0$

Conclusion : Donc, un carré avec uniquement des 0 comme nombres extérieurs admet une unique solution : $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$.

Généralisation pour carrés de côté n

On peut généraliser pour des grilles de côtés n et m car si on place un maximum positif dans notre grille alors, comme on se trouve dans un cas où il n'y a aucun nombre supérieur à lui autour de notre maximum, les nombres autour sont égaux au maximum. Il se propage alors de proche en proche. Lorsqu'on tombe sur un bord avec un zéro, on peut alors en déduire, par le même raisonnement que précédemment, que notre maximum est 0. D'où la propriété :

Propriété : Une grille de côté n avec seulement des 0 autour admet une unique solution qui est uniquement des 0 à l'intérieur de la grille.

5.3. Unicité

Propriété : Pour toute grille, il n'existe qu'une unique solution.

Démonstration

- Cas particulier d'un carré 2×2 :

On suppose qu'il existe deux carrés solutions pour un même extérieur

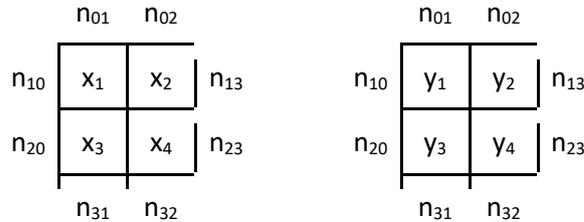


Figure 13

On soustrait un carré à l'autre ce qui nous donne le nouveau carré harmonieux ci-contre d'après les propriétés sur les opérations.

On obtient alors un carré avec uniquement des 0 autour.

Or, d'après la propriété sur les carrés avec uniquement des zéros autour, l'unique solution est $S = \{0 ; 0 ; 0 ; 0\}$

Donc, $x_1 - y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1$

Quel que soit l'entier i appartenant à $[1 ; 4]$, $x_i = y_i$

Conclusion : Il existe donc une unique solution pour un carré de 2×2 .

- Pour le cas général d'une grille, on raisonne de manière analogue pour démontrer l'unicité

4.4 Conséquence sur la symétrie

Propriété : Un carré ayant un extérieur symétrique a nécessairement une solution symétrique

Illustration :

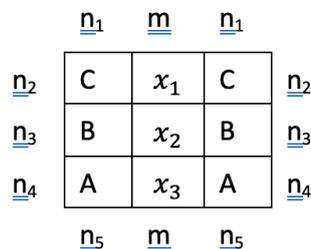


Figure 15

Démonstration.

Prenons un carré qui a un extérieur symétrique et dont on a trouvé la solution comme sur la figure 16 ci-dessous

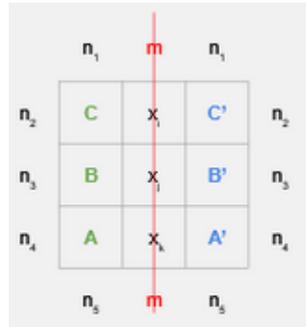


Figure 16

Si on prend le symétrique de la solution comme intérieur (voir figure 17), la symétrie extérieure permet à ce nouvel intérieur d'être également solution

Figure 17

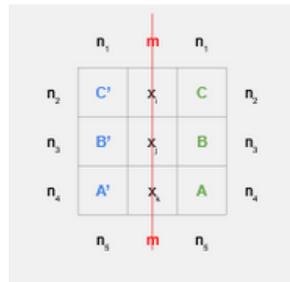


Figure 17

D'après la propriété sur l'unicité, un même extérieur n'a qu'une unique solution.

On en déduit donc que les deux solutions trouvées précédemment sont les mêmes c'est à dire que :

$$C' = C; B' = B \text{ et } A' = A$$

On obtient ainsi comme solution du carré un carré comme ci-contre c'est-à-dire avec un intérieur possédant un axe de symétrie.

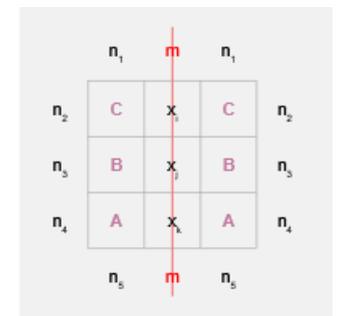


Figure 18

6. Carrés 3x3

On a ensuite cherché une solution autre que des systèmes pour remplir des carrés de 3 par 3. Pour cela, on a pris deux carrés particuliers initiaux :

6.1. Remplissage de deux carrés particuliers 3 par 3

Notre chercheuse nous a donné deux carrés particuliers à remplir :

Carré 1 : Dans ce cas, tous les nombres extérieurs sont égaux à zéro sauf deux nombres n et m que l'on cherche à déterminer.

Le chiffre 1 est également placé dans l'angle en bas à gauche.

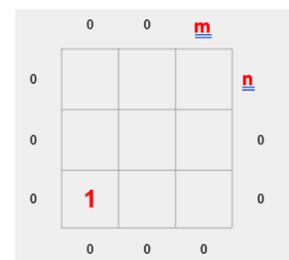


Figure 19

Carré 2 : Dans ce cas, tous les nombres extérieurs sont égaux à zéro sauf un nombre au centre que l'on cherche à déterminer
Le chiffre 1 est également placé dans l'angle en bas à gauche.

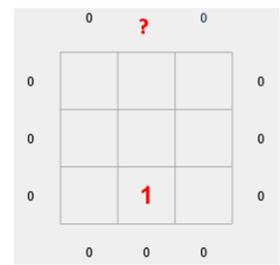


Figure 20

Pour le carré 1, en résolvant un système nous avons obtenu le carré ci-dessous comme solution avec comme contrainte :

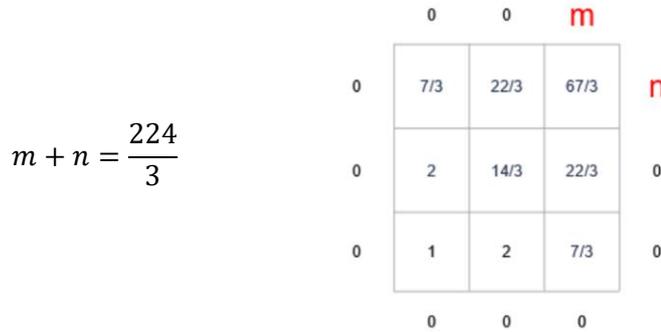


Figure 21

Conséquence :

En multipliant ce carré harmonieux par une constante, on obtient un nouveau carré harmonieux, on sait donc remplir tous les carrés du type ci-contre. Il suffit de prendre pour constante le réel k donné par

$$k = \frac{x + y}{m + n}$$

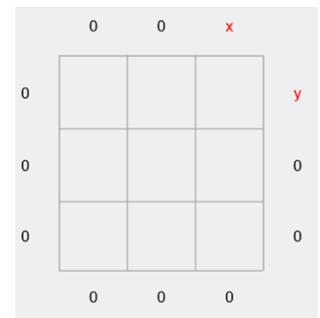


Figure 22

Pour le carré 2, en résolvant un système, nous avons obtenu le carré ci-dessous comme solution :

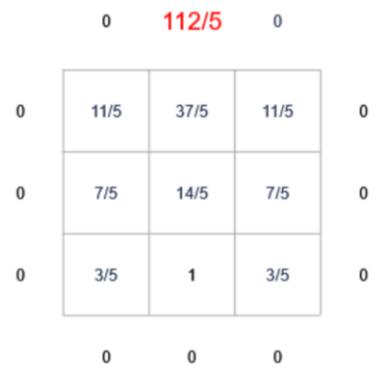


Figure 23

Conséquence :

En multipliant également ce carré harmonieux par une constante, on obtient un nouveau carré harmonieux, on sait donc remplir tous les carrés du type ci-contre. Il suffit de prendre pour constante le réel k donné par

$$k = \frac{5z}{112}$$

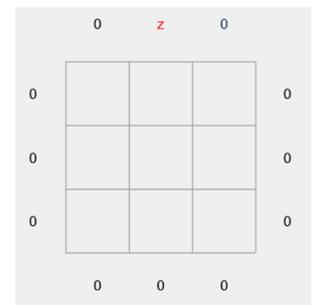


Figure 24

Et par rotation, on sait remplir les carrés ci-dessous :

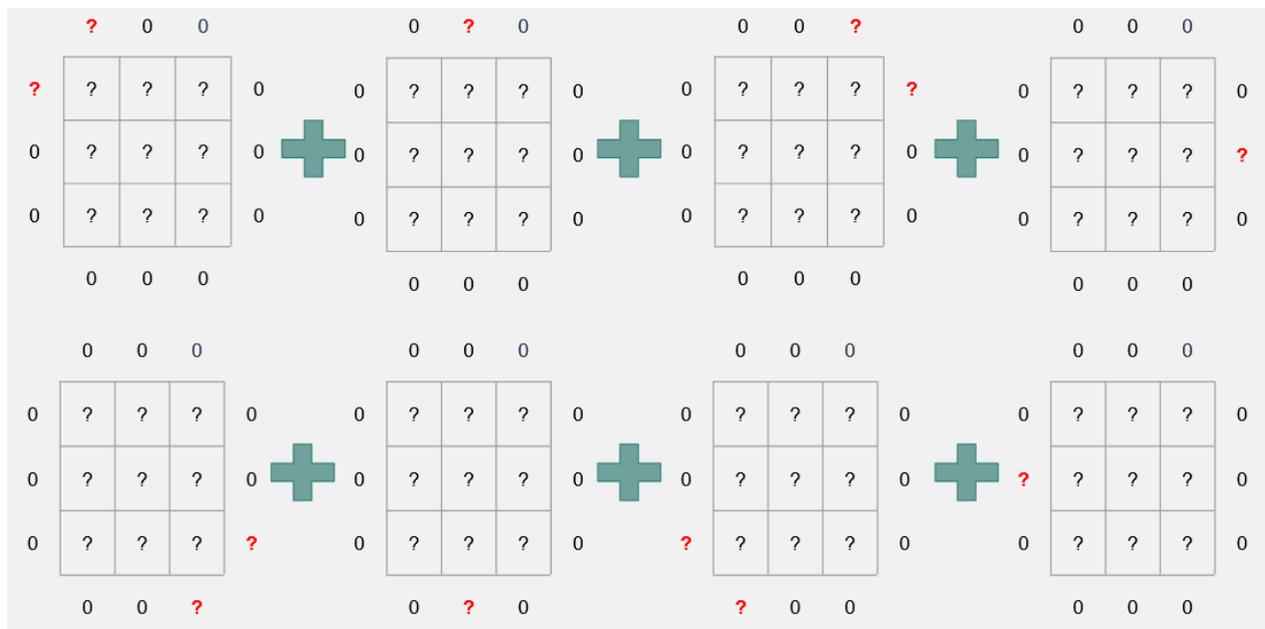


Figure 25

6.2. Application à la généralisation des carrés de 3 par 3 :

On va expliquer, en utilisant l'exemple ci-dessous, la méthode pour remplir une grille 3 par 3 en utilisant les résultats ci-dessus.

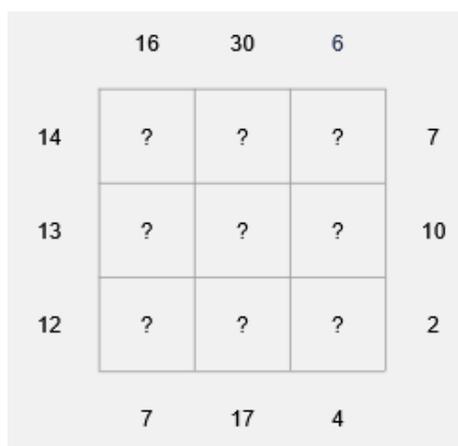


Figure 26

On décompose le carré en 8 grilles, comme ci-dessous, afin d'utiliser nos deux carrés précédents.

On obtient alors pour notre exemple la décomposition suivante :

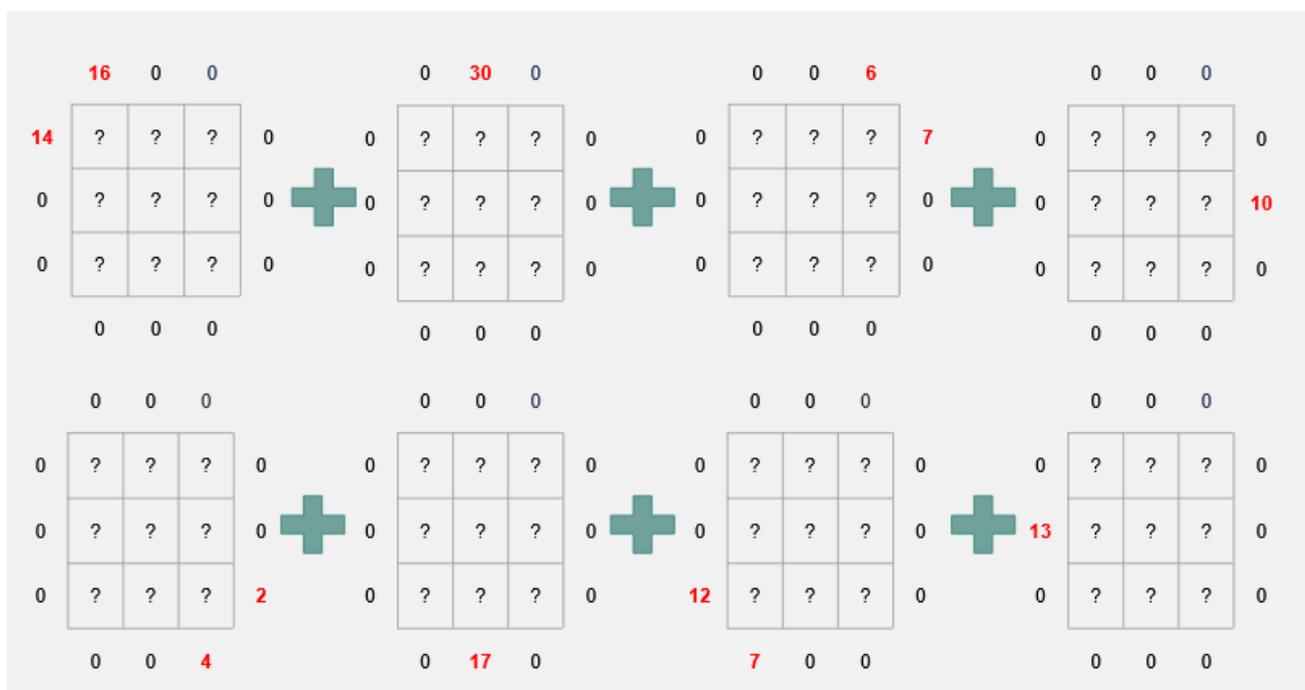


Figure 27

On va chercher à les remplir les uns après les autres indépendamment en utilisant nos deux carrés initiaux complétés puis on les additionnera.

Si le carré que l'on prend n'a que des zéros autour sauf dans un sommet, alors on utilise le carré 1 et on cherche le coefficient de proportionnalité afin d'obtenir le carré qu'on souhaite comme expliqué ci-dessous.

On a le premier carré et on cherche à remplir le second :

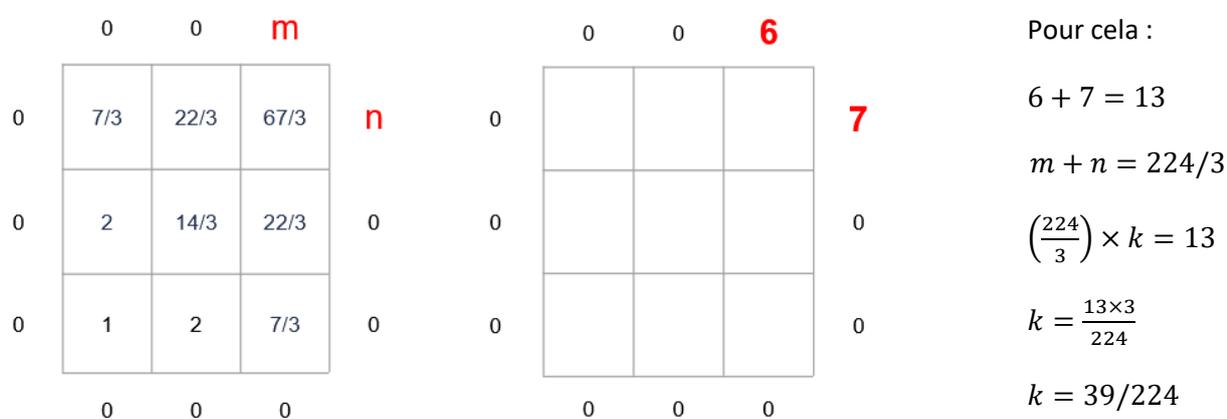


Figure 28

Il faut donc multiplier tous les termes du carré de gauche par $39/224$.

On obtient alors :

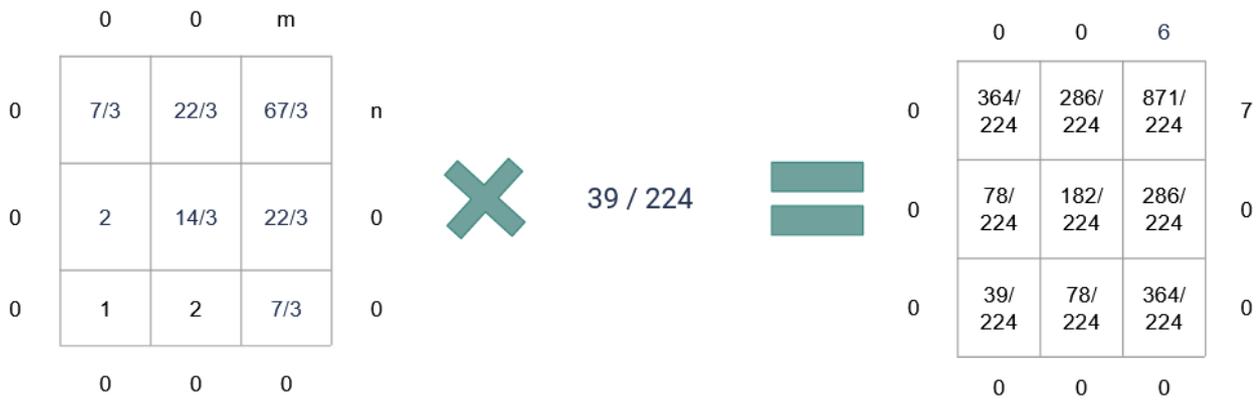


Figure 29

Si le carré a un nombre au centre d'une arête, alors on fait le même processus mais avec le carré 2:

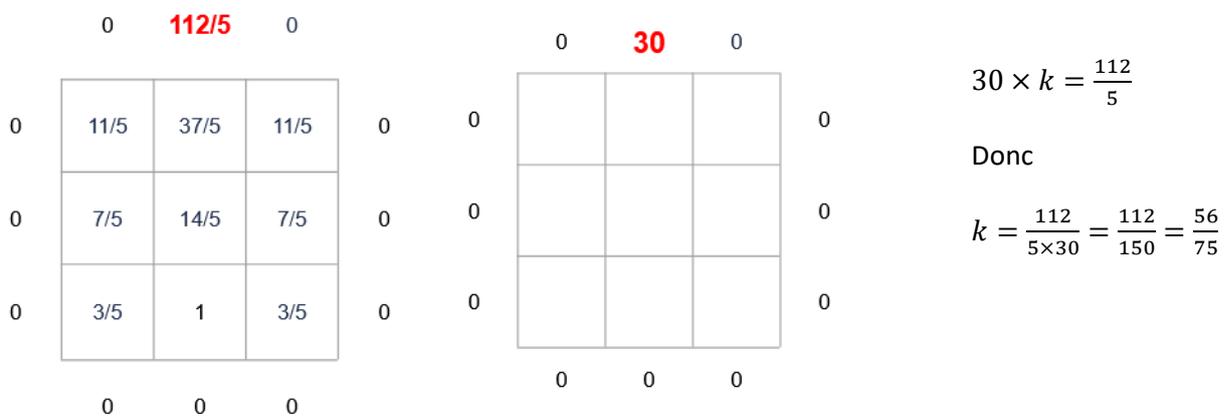


Figure 30

On obtient alors :

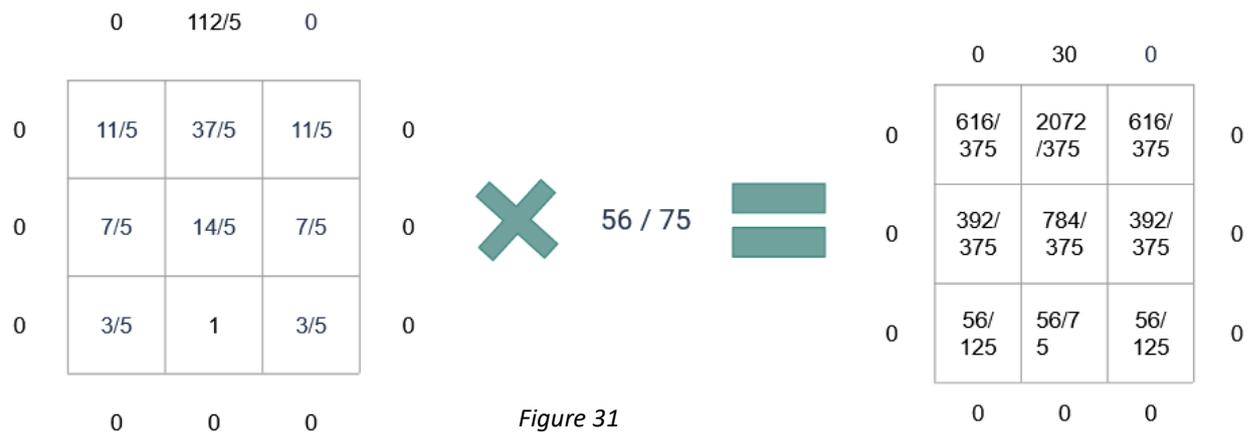


Figure 31

On procède de la même façon pour obtenir les huit carrés harmonieux, puis on les additionne pour obtenir la grille harmonieuse voulue.

Dans le cas de notre exemple, on obtient :

	16	30	6	
14	15	17	10	7
13	13	13	10	10
12	11	12	7	2
	7	17	4	

Figure 32

Ainsi, pour chaque carré de 3×3 que l'on souhaite remplir, il suffit de :

- le décomposer en 8 carrés (comme fait auparavant) ;
- remplir chacun de ces carrés séparément avec nos deux carrés initiaux ;
- les additionner.

Avec cette méthode, nous pouvons donc remplir n'importe quelle grille de carrés 3×3 .

7. Le programme

Nous avons, ensuite, réalisé un programme pouvant compléter n'importe quel rectangle, à condition de donner toutes les valeurs des côtés de ce rectangle, quelle que soit la valeur de la longueur et de la largeur.

<https://www.mycompiler.io/view/AXfggzvXaU9>

8. Conclusion

Notre étude a permis de démontrer que l'on peut remplir des lignes pour lesquelles seuls deux nombres aux extrémités sont donnés ainsi que des carrés de tailles quelconques. Pour les carrés, la méthode calculatoire impliquant la résolution d'un système est trop fastidieuse pour être mise en œuvre sur des carrés de grandes tailles. La démonstration de l'unicité puis la décomposition des carrés ont permis de trouver une méthode de remplissage plus pratique.

Nous avons pu constater que la table de multiplication est un cas très particulier de grille harmonieuse dans lequel tout carré ou tout rectangle extrait de la table est lui-même une grille harmonieuse.

Pour poursuivre cette étude, on pourrait s'intéresser à des carrés encore plus grands ou à des formes géométriques puis complexes, régulières ou non.