

Fabrique de puzzle

Année 2023 – 2024

Elias Faucher, Kéo Matabon-Mauro, Julien Coti-Jasmin, Samuel Whelan, Thaddius Genniaux, Ivan Zampaglione, élèves de classes de 3^{ème} et de 1^{ère}

Établissement(s) : Lycée Raymond Savignac, Collège Georges Pompidou

Enseignant-e(s) : Mme Vernhet, M Thomas, M Beduer, M Labit

Chercheuse : Mme Klughertz (maklughertz@orange.fr)

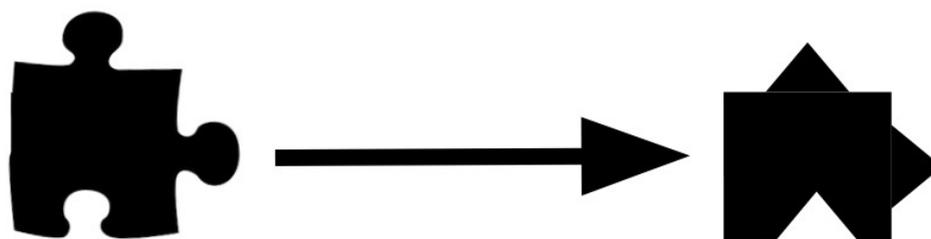
Table des matières

1. Introduction	1
1.1. Sujet	1
1.2. Définissons les mots du sujet	2
2. Réponses au sujet	3
2.1. Combien y a-t-il de pièces différentes si on n'autorise ni rotation, ni retournement ?	3
2.2. Quelques formules qui nous seront utiles	4
2.3. Même question si on autorise les rotations (et pas les retournements)	5
3. Les plus grands puzzles originaux	7
3.1. Le plus grand puzzle $m \times 1$	7
3.2. Quel est le plus grand puzzle $m \times n$	8
4. Conclusion	8

1. Introduction

1.1. Sujet

On veut fabriquer des puzzles. A partir de pièces carrées de côté fixé, on est autorisé à modifier les côtés en enlevant un triangle ou en ajoutant un triangle de sorte que les pièces s'emboîtent parfaitement.



Combien y a-t-il de pièces différentes si on n'autorise ni rotation, ni retournement ?
Même question si on n'autorise que les rotations (et pas les retournements) ?

Et si on autorise rotations et retournements ?

Un puzzle de taille $m \times n$ est un ensemble de mn pièces qu'on peut assembler en forme de rectangle de longueur m et de largeur n , sans tourner ni retourner les pièces et que les côtés plats soient uniquement sur les bords.

Un puzzle est unique s'il y a une seule façon d'assembler les pièces (à échange de pièces identiques près).

Peut-on trouver un puzzle unique de taille $m \times 1$, pour tout m ?

Et un puzzle non unique ?

Peut-on trouver un puzzle unique de taille $m \times n$, pour tout m et tout n ?

Et un puzzle non unique ?

Un puzzle est original s'il n'a pas deux pièces identiques.

Quel est le nombre maximal de pièces que peut contenir un puzzle original ?

Quelles contraintes sur m et n pour pouvoir fabriquer un puzzle unique et original ?

1.2. Définissons les mots du sujet

- **rotation** : On note r , une rotation d'une pièce de 90° dans le sens anti trigonométrique. Donc, une rotation peut être notée : r_k (avec $k \in \mathbb{N}$), revient à faire k rotations.



- **retournement** : inversion par symétrie axiale des côtés gauche et droit ou de haut en bas (retournement **h/b** ou **g/d**)



2. Réponses au sujet

2.1. Combien y a-t-il de pièces différentes si on n'autorise ni rotation, ni retournement ?

Il y a 4 côtés par pièce.

Pour chaque côté il y a 3 possibilités : $>$ ou $|$ ou $<$

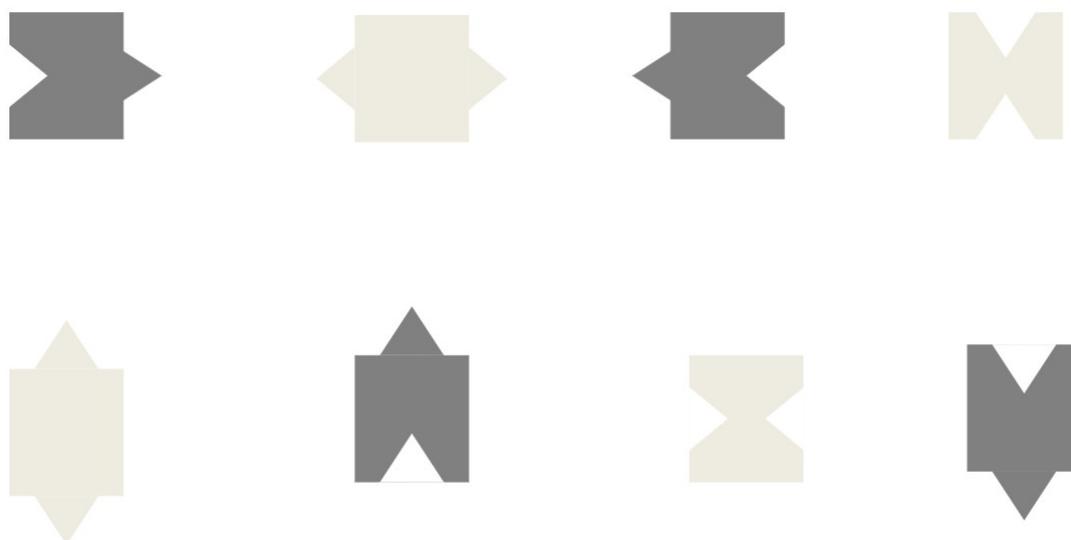
Donc le nombre total de pièces que l'on peut créer est de $3^4 = 81$.

Cependant, certaines pièces ne peuvent pas être utilisées dans un puzzle rectangulaire $m \times n$ ($m > 1$ et $n > 1$) : les pièces à **3 côtés plats**, les pièces à **2 côtés plats opposés**, la pièce à **4 côtés plats**

Or il existe : **8** pièces à trois côtés plats



8 pièces à deux côtés plats opposés :



1 pièce à quatre côtés plats :



Cela fait donc $8+8+1 = 17$ pièces que l'on ne peut pas utiliser dans un puzzle rectangulaire
 $81-17 = 64 \rightarrow$ on pourra utiliser 64 pièces différentes

2.2. Quelques formules qui nous seront utiles

On a créé des formules qui vont nous permettre de calculer le nombre de pièces de chaque type (pièces à 2 côtés plats consécutifs...) dans un puzzle $m \times n$ ($m > 2$ et $n > 2$)

- nombre de pièces à 1 côté plat : $2(m-2)+2(n-2)$
- nombre de pièces à 2 côtés plats consécutifs : 4
- nombre de pièces à 4 côtés modifiés : $(n-2) \times (m-2)$



Les pièces à 1 côté plat sont les pièces du bord du puzzle (sauf angles).

Les pièces à 2 côtés plats consécutifs sont les pièces des angles.

Les pièces à 4 côtés modifiés sont les pièces dites « centrales », à l'intérieur du puzzle.

Nous nous intéressons à l'**enchaînement** des valeurs des côtés, et non à l'**ordre** des valeurs.

En admettant les rotations :

$(1,-1,1,-1)$ est la même pièce que $(-1,1,-1,1)$.

Dénombrement :

⌚ Pièce à 4 côtés plats:

$(0, 0, 0, 0)$

⌚ Pièces à 2 côtés plats opposés :

$(0, 1, 0, 1)$

$(0, -1, 0, -1)$

$(0, -1, 0, 1)$

⌚ Pièces à 1 côté modifié :

$(0, 0, 0, 1)$

$(0, 0, 0, -1)$

⌚ Pièces des angles :

$(0, 1, 1, 0)$

$(0, 1, -1, 0)$

$(0, -1, 1, 0)$

$(0, -1, -1, 0)$

⌚ Pièces à 1 côté plat :

$(0,1,1,1)$

$(0, -1, 1,1)$

$(0, -1, 1, -1)$

$(0, -1, -1, -1)$

$(0, 1, -1, 1)$

$(0, 1, 1, -1)$

$(0, 1, -1, -1)$

$(0, -1, -1, 1)$

⌚ Pièces à 4 côtés modifiés :

$(1, 1, 1, 1)$

$(-1, -1, -1, -1)$

$(1, -1, -1, -1)$

$(-1, 1, 1, 1)$

(-1, -1, 1, 1)

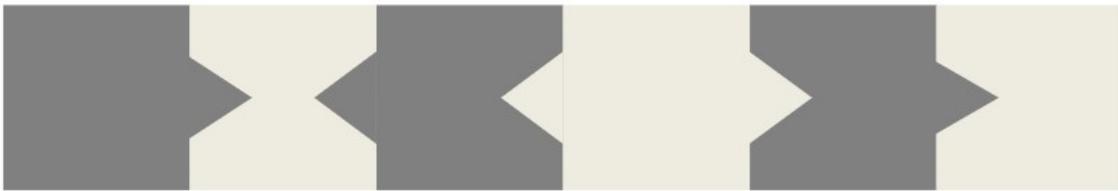
(-1, 1, -1, 1)

Donc la première conjecture n'est pas vérifiée, car on ne dénombre pas 21 pièces mais bien 24.

3. Les plus grands puzzles originaux

3.1. Le plus grand puzzle mx1

Le plus grand puzzle mx1 comporte 6 pièces car il existe 4 pièces à deux côtés plats opposés qui peuvent être placées dans le même puzzle. De plus, dans le plus grand puzzle mx1, on trouve également deux pièces à trois côtés plats pour les côtés, ce qui fait 6 pièces.



3.2. Quel est le plus grand puzzle mxn

Nous savons qu'il y a au total 16 pièces sans côtés plats, il nous faut donc un puzzle dont l'intérieur fait 4 x 4 pièces, et donc 6 x 6 pièces, donc 36 pièces

4. Conclusion

On sait maintenant qu'avec 64 pièces différentes possibles à utiliser sans rotation ni retournement on pourra faire notre plus grand puzzle mxn avec 36 pièces, un puzzle mx1 lui n'aura que 6 pièces si on veut qu'il soit original et si on autorise les rotations on trouvera 24 pièces possible à utiliser dans le puzzle.

Malgré nos efforts de recherches, nous n'avons toujours pas trouvé la solution pour le puzzle à 36 pièces.