Entiers consécutifs

Année 2023-2024

Timéo Bladier et Martin Danset, élèves en classe de première

Encadrés par Sébastien Castagnedoli, Élodie Fort et Laurent Pasteur

Établissement : Lycée Emmanuel d'Alzon, Nîmes

Chercheur : Serge Dumont, LAMPS Université de Perpignan

Table des matières

1. Présentation du sujet
2. Annonce des conjectures et résultats obtenus
3. Texte de l'article
4. Conclusion

1. Présentation du sujet

Quels entiers positifs sont somme d'au moins deux entiers strictement positifs consécutifs ?

Certains nombres peuvent s'écrire comme la somme d'au moins deux nombres entiers consécutifs. Par exemple : $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.
Est-ce vrai pour tous les nombres entiers positifs ?
Quels nombres entiers positifs sont la somme d'au moins deux nombres entiers consécutifs strictement positifs ?

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

Exemples de la problématique :

$$\begin{aligned} 5 &= 2 + 3 \\ 10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\ 12 &= 3 + 4 + 5 \end{aligned}$$

Quelques exemples supplémentaires :

$$\begin{aligned} 13 &= 6 + 7 \\ 18 &= 5 + 6 + 7 \\ 18 &= 3 + 4 + 5 + 6 \\ 24 &= 7 + 8 + 9 \\ 2024 &= 179 + 180 + 181 + 182 + 183 + 184 + 185 + 186 + 187 \\ &\quad + 188 + 189 \end{aligned}$$

Cependant, il semble que nous ne puissions pas atteindre tous les nombres : 8 ; 16 ; 32 par exemple.

Nous avons donc tenté d'obtenir les 200 premiers nombres en utilisant notre suite.
Les seuls nombres non obtenables parmi les 200 premiers sont : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128.

Ils correspondent aux puissances de 2.
Nous en sommes donc arrivés à une conjecture :

Tous les nombres sont obtenables sauf les puissances de 2.

Conclusion préliminaire : notre suite suit un schéma régulier, mais aucun chiffre n'est à exclure pour le moment.

3. Texte de l'article

Concept de série : Une somme d'entiers strictement positifs et consécutifs admet 2 paramètres.
h : qualifie le nombre de termes positifs consécutifs.
n : qualifie le plus petit nombre de cette somme.
Règle de la parité :
La parité change à chaque terme suivant de la somme. En suivant ce chemin, nous pouvons déterminer la parité du résultat.
La parité d'une somme est déterminée par le nombre de termes impairs qu'elle contient. Si ce nombre est impair, le résultat de la somme sera également impair.

Ex 1 : Impair + Pair = Impair
Ex 2 : Impair + Pair + Impair = Pair
Ex 3 : Pair + impair + pair = impair

Nous avons donc tenté de comprendre pourquoi elles ne sont pas obtenables.
Nous avons exprimé notre problème sous la forme d'une série avec h le nombre de termes positifs consécutifs, n le premier nombre de cette somme, et $U_h(n)$ le résultat de la somme.

=> Pour $h = 2$: $U_2(n) = n + (n+1)$
=> Pour $h = 3$: $U_3(n) = n + (n+1) + (n+2)$
=> Pour $h = 4$: $U_4(n) = n + (n+1) + (n+2) + (n+3)$
=> Pour $h = 5$: $U_5(n) = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+4)$
=> Pour $h = 6$: $U_6(n) = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+5)$
=> Pour $h = 7$: $U_7(n) = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+6)$
=> Pour $h = 8$: $U_8(n) = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+7)$
=> Pour $h = 9$: $U_9(n) = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+8)$
=> Pour $h = 10$: $U_{10}(n) = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+9)$

Nous avons transformé ces sommes en suites simplifiées :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}$:

$$U_h(n) = hn + \frac{h(h-1)}{2}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} U_h(n) &= n + (n+1) + \cdots + (n+h-1) \\ &= n + n + n + \cdots + n + 1 + 2 + 3 + \cdots (h-1) \\ &= nh + \tfrac{h(h-1)}{2} \end{aligned}$$

=> Pour $h = 2$: $U_2(n) = 2n + 1$
=> Pour $h = 3$: $U_3(n) = 3n + 3$

On a ensuite factorisé ces suites :

=> Pour $h = 2$: $U_2(n) = 1 \times (2n+1)$
=> Pour $h = 3$: $U_3(n) = 3 \times (n+1)$

Nous pouvons maintenant examiner de plus près les composantes de chaque nombre obtenu par ce processus.

Les séquences dans lesquelles h est un entier impair ($h = 1\ [2]$), soit :

=> Pour $h = 3$: $U_3(n) = 3(n + 1)$
=> Pour $h = 5$: $U_5(n) = 5(n + 2)$
=> Pour $h = 7$: $U_7(n) = 7(n + 3)$
=> Pour $h = 9$: $U_9(n) = 9(n + 4)$
=> Pour $h = 11$: $U_{11}(n) = 11(n + 5)$

Le résultat de la séquence est divisible par : h et $n + (h-1)/2$.
Soit Impair × Pair ou Impair × Impair.

Les séquences dans lesquelles h est un entier pair ($h = 0\ [2]$), soit :

=> Pour $h = 2$: $U_2(n) = 1(2n + 1)$
=> Pour $h = 4$: $U_4(n) = 2(2n + 3)$
=> Pour $h = 6$: $U_6(n) = 3(2n + 5)$
=> Pour $h = 8$: $U_8(n) = 4(2n + 7)$
=> Pour $h = 10$: $U_{10}(n) = 5(2n + 9)$

Le résultat de la séquence est divisible par : $h/2$ et $2n + h - 1$.
Soit Impair × Impair ou Pair × Impair.

On remarque que l'on n'obtient jamais un facteur pair, multiplié par un autre facteur pair.

Les nombres qui ne peuvent être obtenus que de cette manière (Pair × Pair) (1) ne peuvent donc pas être décomposés.
Nous savons que les seuls représentants de cette catégorie sont les puissances de 2, cela explique donc le fait que ces dernières ne sont pas obtenables.

4. Conclusion

On a donc trouvé qu'en additionnant des nombres entiers consécutifs strictement positifs, les seuls nombres impossibles à obtenir sont les puissances de 2 (2).

Notes d'édition

(1) En excluant le cas où l'un des facteurs est égal à 1. En effet on ne peut pas avoir $h = 1$ puisque la somme doit comporter au moins deux entiers, et avec h pair le second facteur $2n + h - 1$ est impair et supérieur ou égal à 3.

(2) Non. Il a été montré que les puissances de 2 ne peuvent pas être obtenues, mais pas que ce sont les seuls nombres impossibles à obtenir.

On voit dans la liste des résultats avec h pair qu'on obtient tous les entiers naturels impairs à partir de 3 avec $h = 2$, tous les nombres de la forme $2(2m + 1)$ à partir de 2×5 avec $h = 4$,… En prenant $h = 2^{k+1}$, on obtient les nombres $2^k(2n + 2^{k+1} - 1)$ avec $n \geq 1$, c'est-à-dire tous les nombres de la forme $2^k(2m + 1)$ avec $m \geq 2^k$.
Tout entier naturel N non nul est le produit $2^k(2m + 1)$ d'une puissance de 2 et d'un entier impair, avec $m \geq 1$ si N n'est pas une puissance de 2. Il reste donc à vérifier que ces nombres peuvent être obtenus avec h impair lorsque $m < 2^k$. On peut alors prendre $h = 2m + 1$, de sorte que $U_h(n) = h\left(n + \frac{h-1}{2}\right) = (2m + 1)(n + m)$ puis, comme $2^k - m > 0$, on peut choisir $n = 2^k - m$ et on obtient bien $U_h(n) = 2^k(2m + 1)$.