

Ensemble sans somme

Année 2025 – 2026

Ka-rel et Da-san Shand Royant élèves de classe 5^e et 4^e

Établissement(s) : Collège sévigné (Mayenne, 53)

Enseignant·e(s) : Henri Ficheux (Lycée Lavoisier, Mayenne (53))

Chercheur·Chercheuse(s) : Gilles Caron (Nantes Université)

Sommaire

1. Introduction.....	1
1.1. Présentation du sujet	1
1.2. Résultats	2
2. Le plus grand ensemble sans somme	2
3. Nos méthodes pour construire des ensembles sans somme	3
3.1. Les ensembles sans somme contenant 2	3
3.2. Des ensembles sans somme de taille fixée	3
3.3. Des ensembles sans somme avec un écart régulier	4
4. Conclusion	4

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

Définition : Un ensemble sans somme est un ensemble de nombres entiers positifs pour lequel toute somme de 2 de ses nombres n'est pas dans l'ensemble.

Par exemple,

- $E = \{2; 3\}$ est un ensemble sans somme car $2 + 3 = 5 \notin E$, $2 + 2 = 4 \notin E$ et $3 + 3 = 6 \notin E$
- alors que $F = \{1; 2; 3\}$ n'en n'est pas un car $1 + 2 = 3 \in E$ ou encore $1 + 1 = 2 \in E$

[1]

Nous nous sommes demandés quel était le plus grand ensemble sans somme.

Nous nous sommes demandés comment savoir rapidement si un ensemble est sans somme.

Nous nous sommes demandés quel était le plus grand ensemble sans somme avec des nombres compris

entre 1 et un nombre donné.

Nous avons cherché des méthodes pour construire des ensembles sans somme.

Nous avons travaillé uniquement avec des nombres entiers strictement positifs. (Remarquons que 0 ne peut pas être dans un ensemble sans somme, puisque si 0 est dans un ensemble E , alors la somme $0+0$ y est aussi et donc E n'est pas un ensemble sans somme).

1.2. Résultats

Nous avons trouvé que le plus grand ensemble sans somme est l'ensemble des nombres impairs. [2]

Nous n'avons pas trouvé de méthode pour savoir rapidement si un ensemble est sans somme.

Nous avons dénombré tous les ensembles sans somme contenant des nombres compris entre 1 et n , où n est un nombre allant de 1 à 11, puis nous avons construit un graphique pour représenter le nombre total d'ensembles sans somme en fonction de n .

Nous avons trouvé plusieurs méthodes pour construire des ensembles sans somme.

2. Le plus grand ensemble sans somme

Théorème : Le plus grand ensemble sans somme est celui contenant tous les nombres impairs.

Démonstration

Un ensemble qui ne contient que des nombres impairs est nécessairement un ensemble sans somme, car la somme de deux nombres impairs est un nombre pair, donc un nombre qui n'est pas dans cet ensemble.

Montrons-le, sachant que

- Un nombre pair est un nombre qui s'écrit $2 \times k$ où k est un nombre entier
- Un nombre impair est un nombre qui s'écrit $2 \times k + 1$ où k est un nombre entier.

Lorsque l'on ajoute deux nombres impairs, on obtient donc le nombre $N = (2 \times k + 1) + (2 \times l + 1)$ où k et l sont deux nombres entiers. Or le nombre N est égal à $2 \times k + 2 \times l + 2 \times 1 = 2 \times (k + l + 1)$ où $k + l + 1$ est un nombre entier, donc N est un nombre pair.

De plus, si on complète l'ensemble de tous les nombres impairs avec le nombre pair $2 \times k$, alors l'ensemble obtenu ne peut pas être sans somme, parce que $2 \times k = 1 + 2 \times (k - 1) + 1$ est la somme des 2 nombres impairs 1 et $2 \times (k - 1) + 1$ qui sont dans cet ensemble.

3. Nos méthodes pour construire des ensembles sans somme

3.1. Les ensembles sans somme contenant 2

Conjecture : On obtient un ensemble sans somme en complétant $\{2\}$ par les nombres obtenus en ajoutant successivement 1, puis 4 : $E =$

$\{2; 3; 7; 8; 12; 13; 17; 18; 22; 23; 27; 28; \dots\}$.

Nous avons trouvé cette méthode en tâtonnant avec l'objectif de trouver le plus grand ensemble sans somme contenant 2, et nous n'avons pas trouvé de preuve de ce résultat. [3]

3.2. Des ensembles sans somme de taille fixée

Théorème : En partant d'un nombre quelconque, on peut construire un ensemble sans somme en complétant par tous les nombres inférieurs à son double.

Par exemple : $\{10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19\}$

Démonstration

Le plus petit résultat que l'on peut obtenir en ajoutant deux nombres d'un tel ensemble est le double du plus petit nombre de l'ensemble, alors qu'on n'a dans cet ensemble que des nombres inférieurs à ce résultat : on a bien construit un ensemble sans somme.

Remarque :

On peut ainsi construire un ensemble sans somme constitué de nombres consécutifs de taille n aussi grande que l'on veut : l'ensemble $\{n; n+1; \dots; 1n+2 \dots 2n-1\}$.

3.3. Des ensembles sans somme avec un écart régulier

Théorème : en partant de $\{1\}$, on peut construire un ensemble sans somme en complétant par les nombres obtenus en ajoutant successivement le même nombre entier positif n supérieur ou égal à 2.

Par exemple, avec $n = 3$, on obtient l'ensemble sans somme $\{1; 4; 7; 10; 13; 16; \dots\}$.

Démonstration

Prenons un nombre n supérieur ou égal à 2, et considérons l'ensemble E contenant tous les nombres de la forme $1 + k \times n$ où k est un nombre entier positif.

- Remarquons d'abord qu'il y a une différence de n , qui est supérieure ou égale à 2, entre chaque nombre de E . En particulier, E ne contient aucun successeur d'un nombre de E .
- Lorsque l'on ajoute deux nombres de cet ensemble E , on obtient le nombre $N = 1 + k \times n + 1 + l \times n$ où k et l sont deux nombres entiers positifs. Or ce nombre N est égal à $1 + k \times n + l \times n + 1$ c'est-à-dire à $1 + (k + l) \times n + 1$, le successeur de $1 + (k + l) \times n$, c'est-à-dire un successeur d'un nombre qui est dans E , car $(k + l)$ est un nombre entier positif. N n'est pas dans E qui est donc bien un ensemble sans somme.

[4]

4. Conclusion

Il y a plusieurs manières de construire des ensembles sans somme mais le plus grand ensemble sans somme sera forcément celui contenant tous les nombres impairs.

Nous n'avons pas trouvé comment savoir, sans tester toutes les sommes possibles, si un ensemble est sans somme, mais nous avons listé, pour les dénombrer, tous les ensembles sans somme contenant des nombres entre 1 et n , où n est un nombre allant de 1 à 11, puis nous avons construit un graphique : nous pouvons observer l'évolution du nombre total d'ensembles sans somme, mais aussi le nombre d'ensembles sans somme contenant l'entier n , qui sont donc des « nouveaux ensembles » qui n'étaient pas présents dans le dénombrement des précédents.

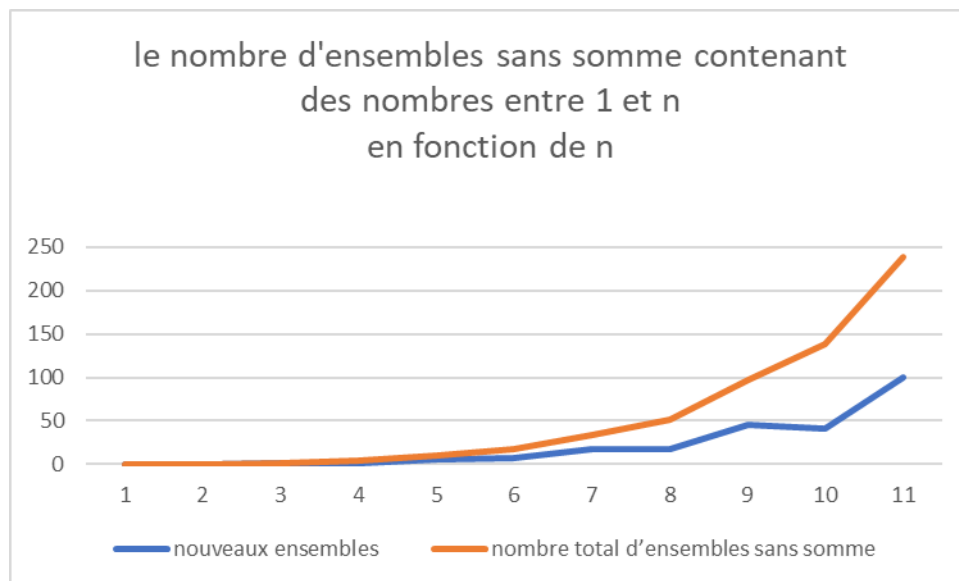


Figure 1: graphique.png

Nous avons remarqué sur ces quelques résultats, un « saut » de plus en plus important dans le nombre de « nouveaux ensembles », à chaque nouveau nombre impair, alors que le nombre de « nouveaux ensembles » reste stable à chaque nouveau nombre pair. Nous émettons l'hypothèse que cela s'explique par la raison suivante : avec un nombre pair il y a un nombre inutilisable, égal à la moitié de ce nombre pair (par exemple dans les nouveaux ensembles contenant 10, il n'y aura pas le nombre 5, car $5+5=10$) [5]

NOTES DE L'ÉDITION

[1] On pourrait donner ici quelques autres exemples, plus généraux, d'ensembles sans sommes. Les plus simples sont les ensembles constitués d'un seul élément. On peut ensuite considérer les ensembles à deux éléments pour lesquels le plus grand est différent du double du plus petit. On peut ensuite passer à des critères analogues, qui seront de plus en plus compliqués, pour des ensembles comportant davantage d'éléments.

[2] Il n'est pas correct de dire que l'ensemble des nombres impairs est le « plus grand » ensemble sans sommes. Comme on le montrera par la suite, il existe d'autres ensembles **infinis** de nombres naturels qui possèdent cette propriété, et, parmi des ensembles infinis, il n'est pas évident de déterminer lequel est le plus grand. Cette question est étudiée en Théorie des Ensembles.

La formulation correcte est que l'ensemble I des nombres impairs est **maximal** pour la propriété d'être sans sommes. Cela signifie que I possède cette propriété et qu'aucun ensemble contenant I et distinct de I ne possède cette propriété. Mais l'ensemble I n'est pas le seul ensemble maximal.

[3] La conjecture est effectivement correcte.

Observons tout d'abord que l'ensemble E est égal à $A \cup B$, où $A = \{2 + 5 \times k : k \geq 0\}$ et $B = \{3 + 5 \times k : k \geq 0\}$.

À ce stade, il faut rappeler une propriété des nombres naturels : tout nombre naturel m peut être écrit **de façon unique** sous la forme $m = n + k \times 5$, où n et k sont des nombres naturels et où $0 \leq n < 5$. Les nombres n et k sont évidemment le reste et le quotient de la division de m par 5.

Cette propriété (qui peut être généralisée en remplaçant 5 par un nombre naturel positif arbitraire) relève d'un domaine intéressant des mathématiques, l'Arithmétique modulaire, qui est étudié à des niveaux scolaires plus avancés.

Considérons maintenant la somme $m + n$ de deux éléments de E . Montrons que cette somme est nécessairement de l'une des formes suivantes : $0 + k \times 5$ ($k > 0$), ou $1 + k \times 5$, ou $4 + k \times 5$, et qu'elle ne peut donc pas appartenir à E . Nous pouvons distinguer trois cas.

Cas 1 : m et n appartiennent tous deux à A . Il existe alors deux nombres naturels a et b tels que $m = 2 + 5 \times a$ et $n = 2 + 5 \times b$. Il s'ensuit que $m + n = 4 + 5 \times (a + b)$, ce qui n'appartient pas à E .

Cas 2 : m et n appartiennent tous deux à B . En raisonnant comme dans le cas précédent, il existe deux nombres naturels a et b tels que $m + n = 6 + 5 \times (a + b) = 1 + 5 \times (1 + a + b)$ ce qui n'appartient pas à E .

Cas 3 : $m \in A$ et $n \in B$ (ou inversement). Il existe alors deux nombres naturels a et b tels que $m = 2 + 5 \times a$ et $n = 3 + 5 \times b$. On a donc $m + n = 5 + 5 \times (a + b) = 0 + 5 \times (1 + a + b)$, ce qui n'appartient pas à E .

Nous pouvons donc conclure que E est un ensemble sans sommes. Pour montrer qu'il est maximal, considérons un nombre $n \notin E$ et vérifions qu'il est la somme de deux éléments de E . Le nombre n doit être de l'une des trois formes suivantes : $a \times 5$ ($a > 0$), ou $1 + a \times 5$, ou $4 + a \times 5$.

Considérons seulement le cas $n = a \times 5$, car les autres se démontrent de manière analogue. Puisque $a > 0$, nous pouvons considérer deux nombres naturels b et c , tous deux supérieurs ou égaux à 0, tels que $b + c = a - 1$.

Les nombres $2 + 5 \times b$ et $3 + 5 \times c$ appartiennent à E , et leur somme vaut $5 + 5 \times (b + c) = 5 \times (b + c + 1) = 5 \times a = n$.

[4] Il serait intéressant d'examiner dans quelles conditions ce résultat peut être généralisé. Il s'agirait notamment de déterminer quels ensembles de nombres de la forme $a + k \times n$ (où a et n sont fixés et $k \geq 0$) sont sans sommes.

[5] Cette explication est intéressante, mais pas très claire. Je pense que, si elle était développée mathématiquement de manière rigoureuse, elle conduirait à des résultats intéressants.