Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Echecs et Maths

Année 2023 – 2024

Élèves de 3ème : Tasnime BEN MECHKANA, Alban CALMEJANE, Céleste CARNIER-RUEFF, Thibaut COURVOISIER, Matthieu DAUMAS, Louis HENRIOT, Gabriel MAILLET, Louise ROMELOT, Ines TRANCOSO.

Établissements : Collège Alain-Fournier et Collège Alexander Fleming.

Enseignantes : Florence FERRY et Delphine FILLION

Chercheurs : Emmanuel KAMMERER, Ecole Polytechnique de Paris-Saclay et Balthazar FLECHELLES, IHES à Bures sur Yvette.

Le sujet

On place un cavalier sur une grille carrée infinie. Le cavalier est situé à un point d'intersection de la grille, et non dans une des cases comme un échiquier classique ! Il se déplace suivant les règles usuelles (un pas en avant, deux de côté).

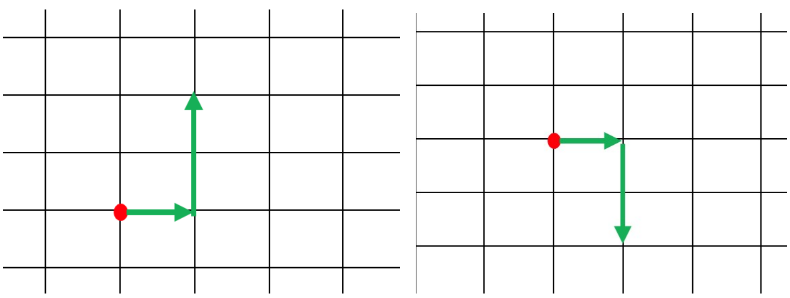
Après chaque déplacement, le cavalier double de taille. En particulier, son prochain déplacement sera deux fois plus grand que le précédent !

Dessiner l'ensemble des points que l'on peut atteindre en 1 coup, 2 coups, 3 coups.

Que remarque-t-on ? Peut-on le démontrer ?

I – Premiers déplacements

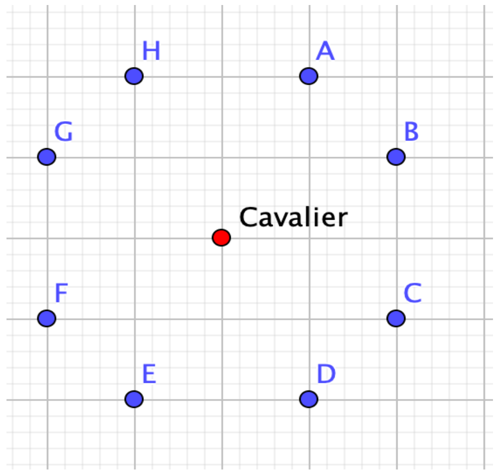
Remarque : au premier coup, le cavalier se déplace avec un pas en avant (dans n'importe quelle direction) et deux pas de côté.

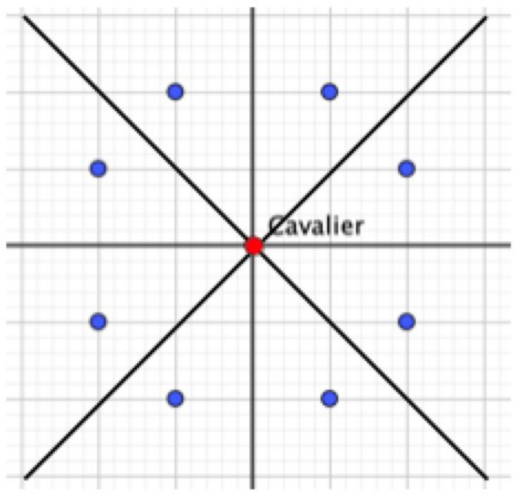


Mais si le cavalier commence par deux pas en avant puis fait un pas de côté, il arrive sur les mêmes points. Sur la première figure par exemple, s'il fait deux pas vers le haut et un pas à droite, il se retrouve au point atteint avec un pas vers la droite et deux vers le haut.

II – Etape 1

Au premier déplacement, huit points sont atteints.





On remarque des symétries : un centre de symétrie qui est la place du cavalier au départ et des axes de symétrie. Si on trouve un premier point, on peut construire tous les autres avec ces symétries.

III – Etape 2

Chacun des huit points de l'étape 1 vont à nouveau en donner huit ce qui fait 64 points à placer. Mais certains points seront atteints plusieurs fois par des déplacements différents. De plus, tous les points de l'étape 1 sont à nouveau atteints.

Pour ne pas en oublier, on va utiliser les symétries.

On choisit un premier point qui en donne huit :

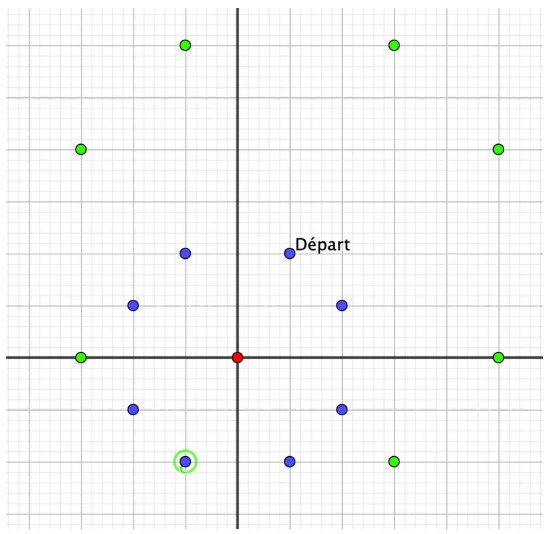
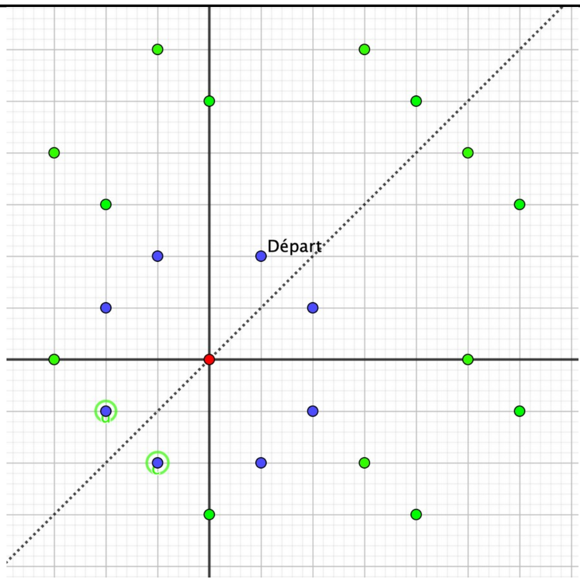
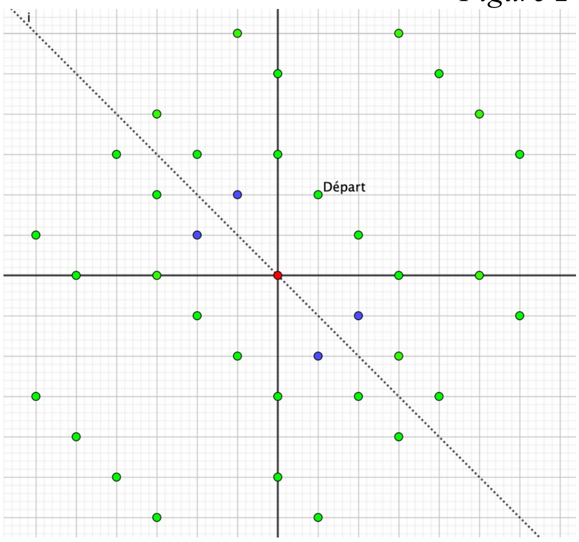
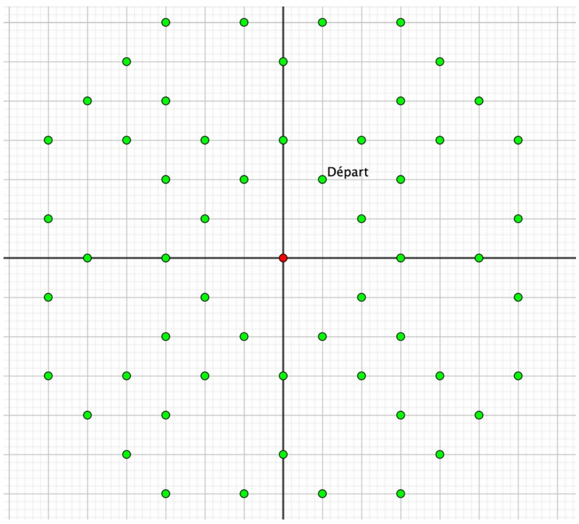


Figure 1

On construit les points symétriques par rapport à un axe (en pointillé ici).	 *Figure 2*
Puis par rapport à un deuxième axe.	 *Figure 3*
Et enfin par rapport aux deux derniers. Tous les points de l'étape 1 sont bien tous atteints.	 *Figure 4*

Voici la figure obtenue avec les points atteints à l'étape 2 :

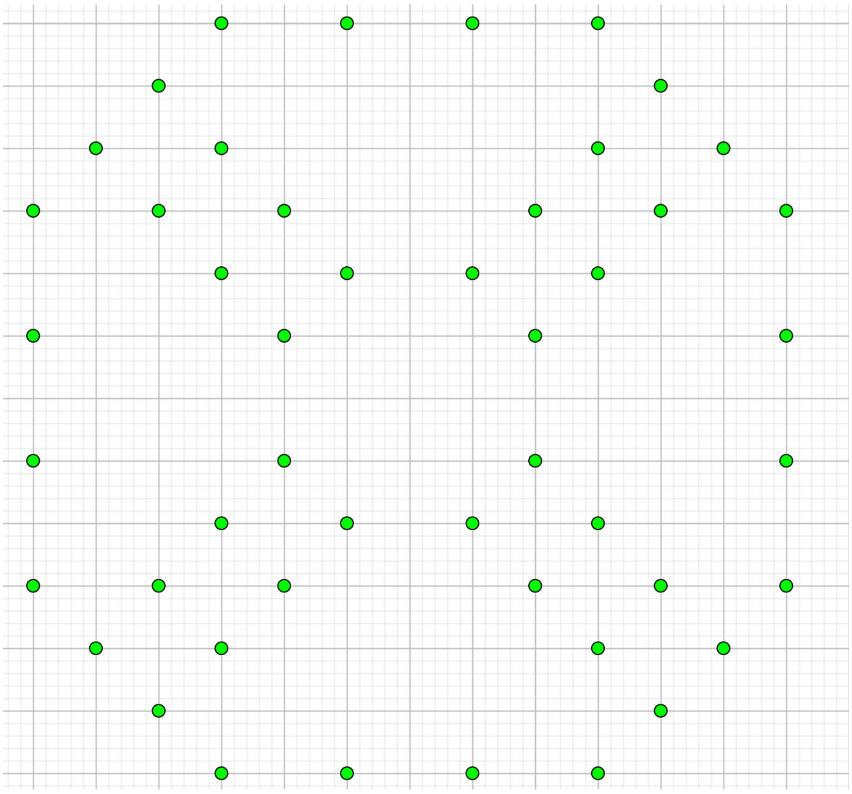


Figure 5

IV – Etape 3

A cette étape le nombre de points à trouver était vraiment très grand ($8^3 = 512$¿ donc nous avons procédé autrement mais toujours en nous aidant des symétries.

On part de l'étape 2 et du polygone obtenu dans le quart de plan en haut à droite. On va construire le même polygone dans les huit directions correspondant aux différents déplacements du cavalier.

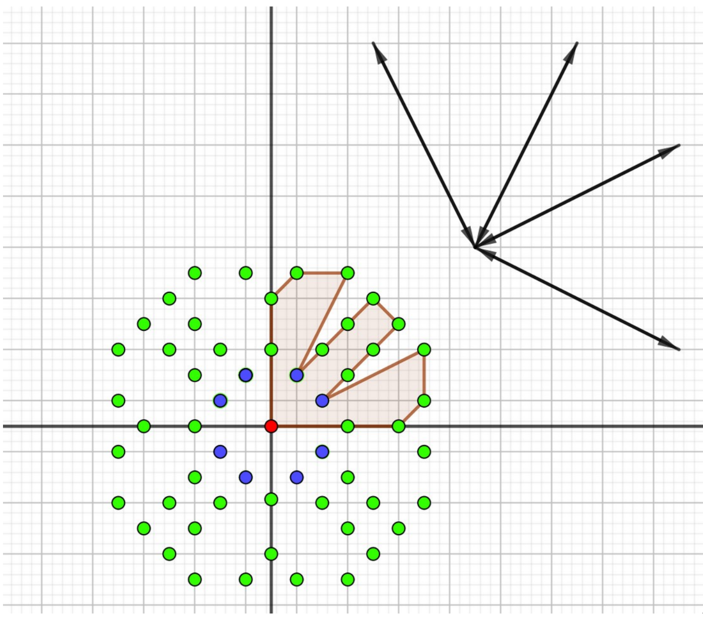


Figure 6

Voici ce qu'on obtient :

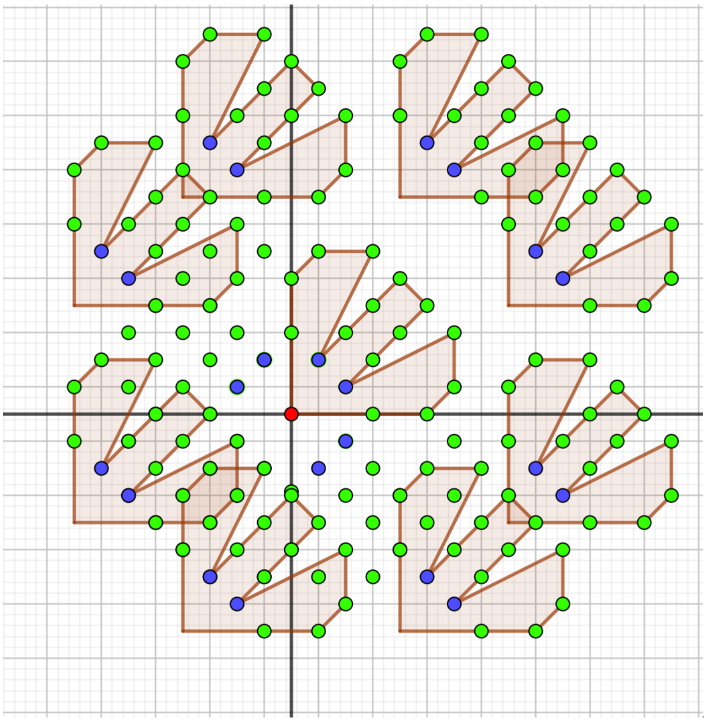


Figure 7

Puis par les différentes symétries, nous arrivons à l'ensemble des points atteints à l'étape 3 :

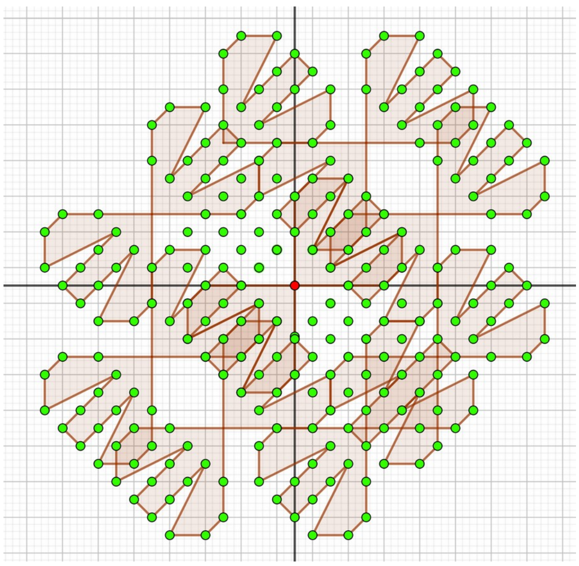


Figure 8

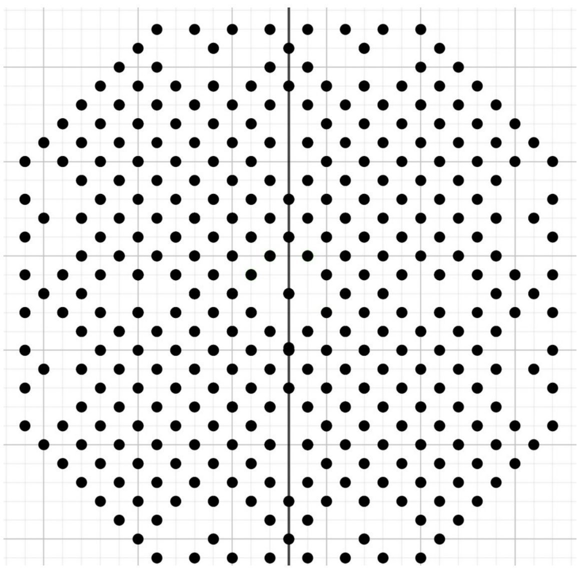
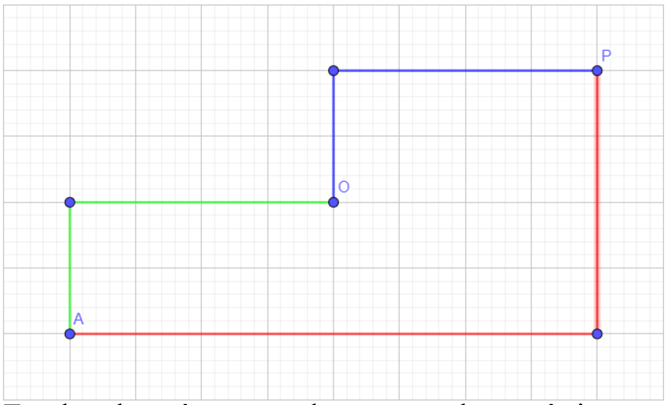


Figure 9

Remarques : les points "intérieurs" aux huit points atteints à l'étape 1 semblent ne jamais être atteints de même que pour le point de départ du cavalier. De plus, si on trace une droite sur notre quadrillage, il semble qu'on ne peut atteindre qu'un point sur deux. Nous allons essayer d'expliquer ces résultats.

V – Quelques résultats

Résultat 1 : un point qui est atteint en *n* coups est atteignable en *n + 1* coups.



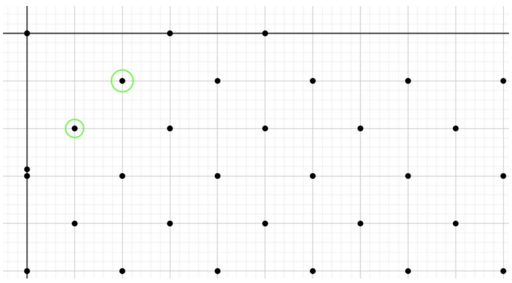
En cherchant à trouver des centres de symétrie on a fini par trouver qu'un point atteignable en 1 coup est atteignable aussi en 2 coups.

Par exemple, sur cette figure, on peut atteindre P en un coup en partant de O en empruntant le chemin bleu ou bien en allant à l'opposé, à A en un coup par le chemin vert (P et A sont symétriques par rapport à 0) ; à partir de A, on pourra atteindre P au deuxième coup avec le chemin rouge (les pas effectués en horizontal et en vertical sont bien doublés).

En *n* coups, on atteindra un point M mais également M', son symétrique par rapport à O.
Il suffira alors de repartir de M' à la *n* + 1 ème étape pour atteindre M.

Résultat 2 : Sur une droite du quadrillage on ne peut atteindre qu'un point sur deux.

Si on zoom une partie de la figure 9 précédente (figure finale de l'étape 3) on observe bien ce résultat :



Essayons de le démontrer. Pour cela, nous allons tracer un repère d'origine le point de départ du cavalier et deux axes perpendiculaires (deux axes de symétrie). L'unité sera un pas du cavalier sur les deux axes. On s'aperçoit alors, sur la figure ci-dessus, que ce sont les points de coordonnées de même parité qui semblent inatteignables, excepté le point (0 ; 0) atteint au départ puis plus jamais ensuite.

Propriété : si on ajoute un nombre pair à un nombre, la parité de ce dernier ne change pas.

Démonstration
Soit n un nombre pair. Il existe un nombre entier k tel que : $n = 2k$. On ajoute ce nombre n à un nombre m.
- Si m est pair, il existe un nombre x tel que : $m = 2x$. On a alors : $m + n = 2x + 2k = 2(x + k)$. $x + k$ étant un entier, le résultat $2(x + k)$ est pair et donc $m + n$ est encore pair comme m.
- Si m est impair, il existe un nombre x tel que : $m = 2x + 1$.

On a alors : $m + n = 2x + 1 + 2k = 2(x + k) + 1$. $2(x + k)$ est pair et donc $m + n$ est impair comme m. La propriété est bien démontrée.

Revenons à notre recherche.
A l'étape 1, le cavalier atteint les huit points suivants :
(2 ; 1), (1 ; 2), (-2 ; 1), (-2 ; -1), (-1 ; 2), (-1 ; -2), (1 ; -2) et (2 ; -1). Nous voyons qu'ils ont tous deux coordonnées de parités différentes.
A partir de l'étape 2, nous ajoutons ou enlevons à chaque coordonnées une puissance strictement supérieure à 0 de deux ce qui donne des nombres pairs. En appliquant la propriété précédente, les coordonnées des points atteints dans les étapes suivantes resteront donc toujours de parités différentes et les points de coordonnées de même parité ne seront jamais atteints (excepté (0 ; 0) atteint une seule fois au départ) .

Soit n un entier positif. On a cherché à exprimer en fonction de n les coordonnées des points atteignables en partant d'un point de coordonnées ($x ; y$) à l'étape $n + 1$:

$(x \pm 2^{n-1} ; y \pm 2^{n})$ et $(x \pm 2^{n} ; y \pm 2^{n-1})$

et à l'étape $n + 2$: $(x \pm 2^{n-1} \pm 2^{n} ; y \pm 2^{n} \pm 2^{n+1})$ et $(x \pm 2^{n} \pm 2^{n+1} ; y \pm 2^{n-1} \pm 2^{n})$

On peut donc affirmer que seuls les points qui respectent la forme des coordonnées en fonction ($x ; y$) suivant seront atteints.

Résultat 3 – Seuls les points de coordonnées de parités différentes peuvent être atteints.

Conjecture : Tous les points de coordonnées de parités différentes peuvent être atteints exceptés les points (0 ; 1), (1 ; 0), (-1 ; 0) et (0 ; -1).

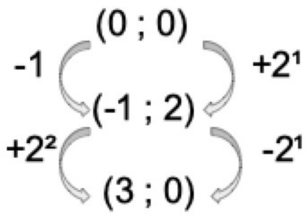
Nous n'avons pas réussi à démontrer ce dernier point.

VI - Recherche d'une suite

Afin d'essayer de démontrer la conjecture précédente, nous nous sommes

concentrés sur les points atteignables de l'axe des abscisses. On essaie de trouver un algorithme qui permet de d'atteindre un point (x ; 0), où x est impair strictement supérieur à 1, à partir de (0 ; 0) en un certain nombre d'étapes.

Comment atteindre (3 ; 0) ?



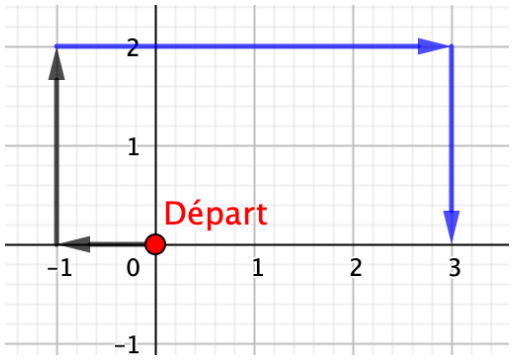
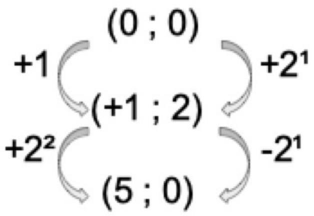


Figure 10

Comment atteindre (5 ; 0) ?



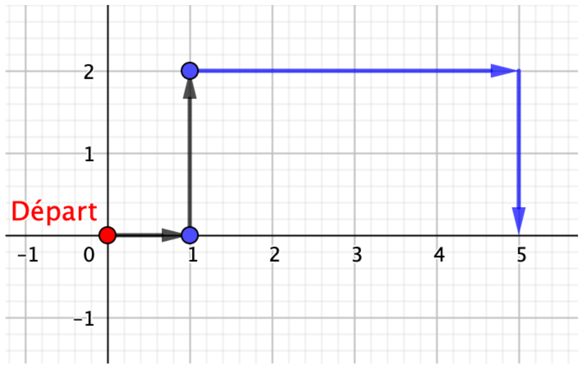
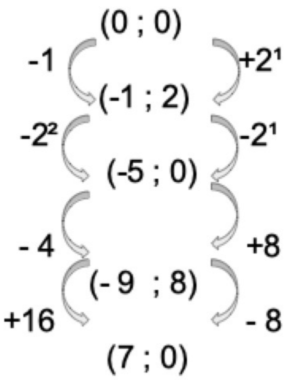


Figure 11

Comment atteindre (7 ; 0) ?



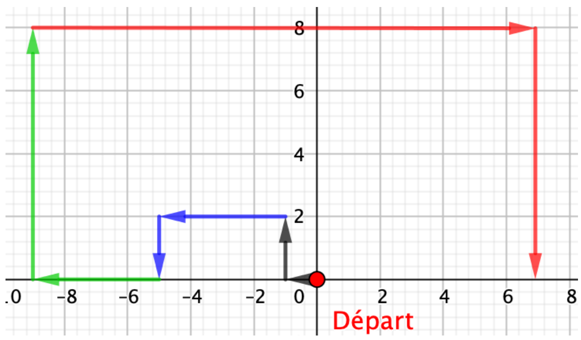
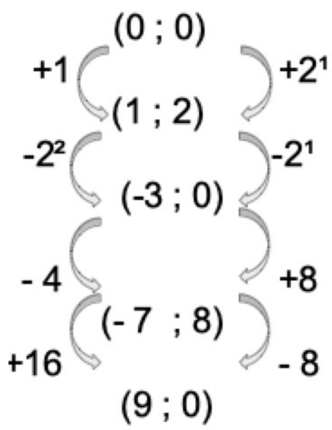


Figure 12

Comment atteindre (9 ; 0) ?



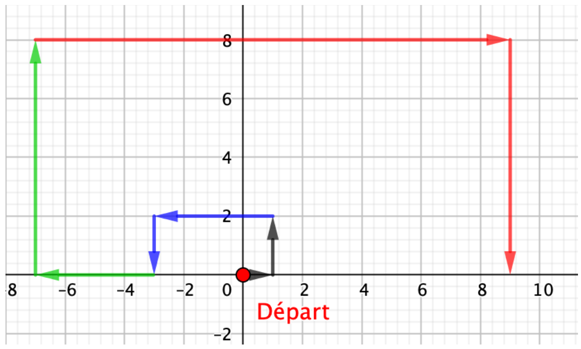


Figure 13

En observant les puissance de 2 ajoutées ou soustraites, on s'aperçoit que pour l'abscisse, ce ne sont que des puissances paires de 2 et pour l'ordonnée, que des puissances impaires de 2. De plus, deux mêmes puissances se suivent. Pour les deux premiers points il faut 2 étapes puis les deux suivants, quatre étapes. Avec toutes ces remarques, nous avons tenté d'atteindre le point (11 ; 0) mais sans succès. Nous persistons à penser qu'il reste atteignable comme tous les autres points de coordonnées de parités différentes, mais, n'ayant pas trouvé d'algorithme, ce résultat reste une conjecture.