Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Dominos et suite de Fibonacci

Année 2023 – 2024

Maxime DECK, Anne-Lou SHEN-NGUYEN, Ivan RAFALSKYI, Nam NGUYEN élèves de 2nd

Établissement : Lycée Blaise Pascal, Orsay

Enseignantes : Hélène Cochard et Cécile Chipot

Chercheuse : Cécilia Derrico

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

Nous disposons d'échiquiers de dimensions $2 \times n$. Nous souhaitons recouvrir les échiquiers entièrement de dominos. Chaque pièce de domino couvre exactement deux cases adjacentes. On se demande de combien de façons différentes il est possible de couvrir l'ensemble de l'échiquier.

1.2. Résultats

- Le nombre de dispositions possibles pour un échiquier de dimensions 2xn correspond au terme F_n de la suite de Fibonacci.
- Nous avons montré que la suite des rapports (formée par le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci) converge vers le nombre d'or.
- Nous avons étudié la suite a semblable à la suite de Fibonacci mais avec une initialisation différente.
- Nous avons montré que la suite des rapports (formée par le rapport de deux termes consécutifs de la suite a) converge également vers le nombre d'or.

2. Réponse à la question et lien avec la suite de Fibonacci

On a commencé par faire des essais avec des échiquier de dimensions (2×1), (2×2), (2×3), (2×4), et (2×5). Nous trouvons alors des nombres de possibilités de pavages F_n respectifs de
$F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 3,\ F_4 = 5,\ F_5 = 8.$
Nous retrouvons les premiers termes de la suite Fibonacci.
N.B On peut dire que si l'échiquier est de dimensions (2x0), il n'y a qu'une seule façon de répondre au problème : ne placer aucun domino. On a donc que

$$F_0 = 1$$

Nous avons ainsi retrouvé le terme 0 de la suite de Fibonacci.

On va montrer que la suite de Fibonacci apparait comme solution au problème posé.
On remarque d'abord que le premier domino posé ne peut avoir que deux positions possibles : soit on le place verticalement, soit on le place horizontalement.
Si le premier domino est vertical, on se ramène à une situation avec un échiquier de dimensions 2×(n−1). Si le premier domino est horizontal, on se ramène à une situation avec un échiquier de dimensions 2×(n−2). (Le domino en dessous du premier se retrouve nécessairement à l'horizontale lui aussi.)
Pour l'échiquier de dimensions (2xn), on a toutes les possibilités des échiquiers de dimensions 2x(n-1) et 2x(n-2). Autrement dit : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

On retrouve bien l'expression du terme au rang n de la suite de Fibonacci.

3. Suite des rapports

3.1. Définition de la suite

A présent, nous allons nous intéresser à la suite des rapports. Pour la définir écrivons la suite de Fibonacci :

$$1; 1; 2; 3; 5; 8; \dots; F_n; F_{n+1}; \dots$$

Pour obtenir un terme de la suite des rapports, on effectue simplement le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci. L'indice n est évidement un entier naturel et l'on nomme cette suite U. Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

On s'intéresse au terme au rang n+1 de cette suite, pour obtenir une relation qui nous sera très utile dans nos recherches.

$$U_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n}}$$

La relation en gras ci-dessus nous permet de définir la fonction f (fonction inverse) :

$$f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$$

NB : Les termes de la suite de Fibonacci étant tous des entiers naturels non nuls ($F_0 = 1$ et $F_1 = 1$ à l'initialisation), les termes de la suite des rapports appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Q}_+^*$. Ainsi, on choisit l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ comme ensemble de définition de la fonction f.

Définir cette fonction nous permet d'obtenir, à partir de la précédente expression, la relation (*) suivante :

$$\boldsymbol{U_{n+1} = f(U_n)}$$

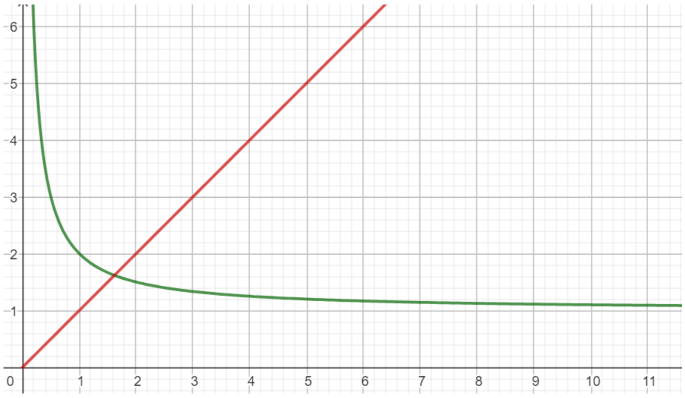
3.2. Etude graphique de la suite

On utilisera la première bissectrice du plan que l'on traduira par la fonction g suivante :

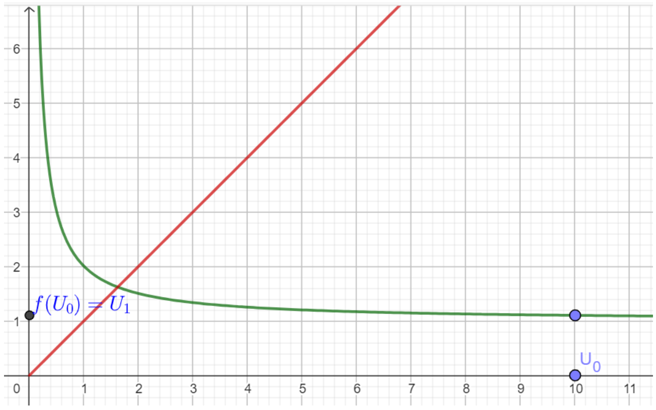
$$g : x \mapsto x$$

NB : A l'instar de la fonction f, l'ensemble de définition de g est également celui des réels positifs et non nuls.

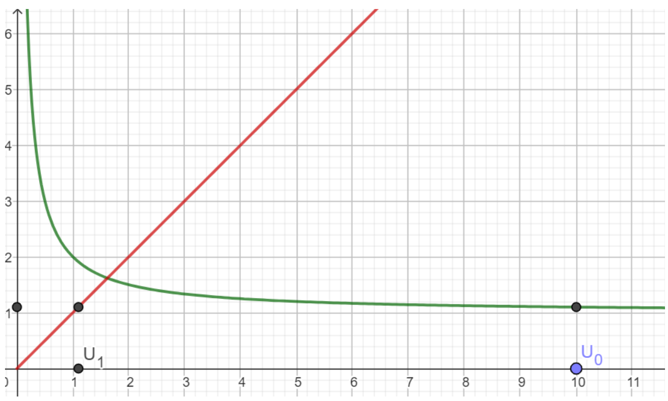
On trace les deux fonctions $f\ (en\ vert)\ et\ g\ (en\ rouge)$ définies précédemment dans un repère orthonormé :



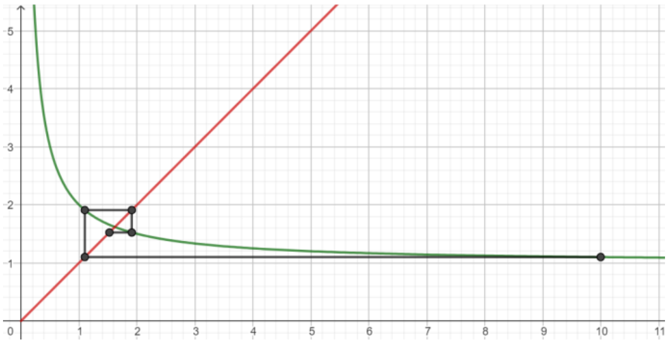
On place ensuite, sur l'axe des abscisses, un point quelconque (cela n'a pas d'importance sur la figure que l'on trace), qui représente le point de coordonnées $(U_0; 0)$. On reporte ce point sur la courbe verte, on peut ainsi lire son ordonnée, qui, en vertu de la relation (*) correspond à U_1 :

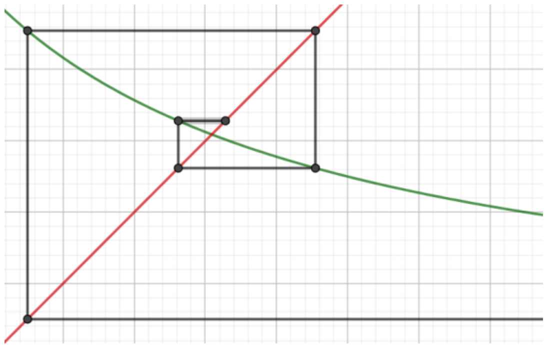


Pour recommencer ce processus de construction, il faudrait que l'on sache où se trouve le point U_1 sur l'axe des abscisses. Nous savons cependant où se trouve le point de coordonnées $(0; U_1)$. Grâce à la première bissectrice du plan, nous pouvons donc reporter ce point sur l'axe des abscisses et obtenir le point de coordonnée $(U_1; 0)$. Suite à cela, nous pouvons réappliquer le processus de construction à l'infini.



On considère uniquement les points sur les courbes vertes et rouges. On relie ensuite ces points. Voici la figure obtenue après la construction des premiers points :





La figure de droite est un zoom de la première. On voit que la figure noire tracée précédemment semble « s'enrouler » autour de l'intersection des courbes représentatives de f et g. On cherche donc à trouver la valeur de ce nombre. On pose l'équation suivante :

$$f(x) = g(x)$$
$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = x$$
$$\Leftrightarrow x + 1 = x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1)$$
$$\Delta = \mathbf{5}$$

Donc

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; et \; x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Notre étude se porte dans l'ensemble des réels positifs ; la deuxième solution étant négative, nous ne la considèrerons pas.

De plus, on remarque que la première solution est exactement le nombre d'or, φ. *On émet donc l'hypothèse que la suite des rapports converge vers le nombre d'or.*

3.3. Démonstration de la conjecture

Nous ne sommes pas en mesure d'affirmer que la phrase soulignée est vraie car dans notre étude graphique nous nous sommes contentés de supposer qu'il y avait une limite. Nous allons à présent démontrer qu'il y en bien une. (Nous connaissons déjà sa valeur ; φ).

Pour ce faire, nous allons considérer (à partir de la suite des rapports) la suite, dont les termes sont de rang pair. Nous ne ferons de même avec la suite dont les termes sont de rang impair. On forme donc la suite des termes pairs et la suite des termes impairs.

Rappel :
- Un entier relatif n est pair s'il existe un entier relatif p tel que $n = 2p$.
- Un entier relatif n est impair s'il existe un entier relatif p tel que $n = 2p + 1$

p désignera un entier naturel qui nous permettra de noter les termes de la suite des termes pairs U_{2p} et ceux de la suite des termes impairs U_{2p+1}.
Bien qu'il soit difficile d'obtenir une figure plus précise, nous avons pu tout de même émettre les hypothèses suivantes. :

- La suite des termes pairs est croissante et majorée par le nombre d'or.
- La suite des termes impairs est décroissante et minorée par le nombre d'or.

Pour les démontrer nous définissons les propositions suivantes :

$$P(p) : U_{2p} \leq U_{2p+2} \leq \varphi$$

« La suite des termes pairs est croissante et majorée par le nombre d'or. »

$$I(p) : \; U_{2p+1} \geq U_{2p+3} \geq \varphi$$

« La suite des termes impairs est décroissante et minorée par le nombre d'or. »

Nous allons démontrer ces deux propositions à l'aide d'une démonstration par récurrence.
On rappelle que (*) désigne la propriété $U_{n+1} = f(U_n)$.

<u>Initialisation :</u>

$$U_0 = 1\,, U_2 = \frac{3}{2} \; et \; \varphi \approx 1{,}618$$
$$Donc \; U_0 \leq U_2 \leq \varphi$$

On en déduit que la proposition $P(0)$ est vraie.

$$U_1 = 2, U_3 = \frac{5}{3} \; et \; \varphi \approx 1{,}618$$
$$Donc \; U_1 \geq U_3 \geq \varphi$$

On en déduit que la proposition $I(0)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u>
Soit $p \in \mathbb{N}$
Nous supposons que les propositions $P \; et \; I$ sont vraies au rang p.
Par hypothèses de récurrence :

$$U_{2p} \leq U_{2p+2} \leq \varphi$$
$$On \; sait \; que \; la \; fonction \; inverse \; est \; décroissante \; sur \; \mathbb{R}_+^*$$
$$Donc \, \frac{1}{U_{2p}} \geq \frac{1}{U_{2p+1}} \geq \varphi$$
$$Donc \; 1 + \frac{1}{U_{2p}} \geq 1 + \frac{1}{U_{2p+1}} \geq \varphi$$
$$Donc \; d'après(*) \; on \; a, U_{2p+1} \geq U_{2p+3} \geq \varphi$$

$$On \; sait \; que \; la \; fonction \; inverse \; est \; décroissante \; sur \; \mathbb{R}_+^*$$
$$Donc \, \frac{1}{U_{2p+1}} \leq \frac{1}{U_{2p+3}} \leq \frac{1}{\varphi}$$
$$Donc \; 1 + \frac{1}{U_{2p+1}} \leq 1 + \frac{1}{U_{2p+3}} \leq 1 + \frac{1}{\varphi}$$
$$Donc \; d'après \; (*) \; on \; a, U_{2p+2} \leq U_{2p+4} \leq \varphi$$

$P(0)$ est vraie. Après avoir supposé que $P(p)$ était vraie nous avons montré que cela impliquait que $P(p+1)$ soit vraie. Ainsi la proposition $P(p)$ est vraie.

$$On\ sait\ que\ la\ fonction\ inverse\ est\ décroissante\ sur\ \mathbb{R}_+^*$$
$$Donc \frac{1}{U_{2p+2}} \geq \frac{1}{U_{2p+4}} \geq \frac{1}{\varphi}$$
$$Donc\ 1+\frac{1}{U_{2p+2}} \geq 1+\frac{1}{U_{2p+4}} \geq 1+\frac{1}{\varphi}$$
$$Donc\ d'après\ (*), U_{2p+3} \geq U_{2p+5} \geq \varphi$$

$I(0)$ est vraie. Après avoir supposé que $I(p)$ était vraie nous avons montré que cela impliquait que $I(p+1)$ soit vraie. Ainsi la proposition $I(p)$ est vraie.

En conclusion :
- La suite des termes pairs est croissante et majorée par le nombre d'or
- La suite des termes impairs est décroissante minorée par le nombre d'or

Les deux suites convergent vers la même limite (le nombre d'or) et forment à elles deux la suite des rapports. *On en déduit donc que la suite des rapports converge vers le nombre d'or.*

4. Etude de la suite a

4.1. Observations préliminaires et définition de la suite *a*

Dans la suite de Fibonacci on a $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$.
Prenons le terme F_4 de la suite de Fibonacci, en supposant que nous ne connaissons pas sa valeur.
On a :

$$F_4 = F_3 + F_2$$

$$Donc\ F_4 = F_2 + F_1 + F_1 + F_0$$

$$Donc\ F_4 = F_1 + F_0 + F_1 + F_1 + F_0$$

$$Donc\ F_4 = 3F_1 + 2F_0$$

$$Donc\ F_4 = 5$$

Nous avons réussi à obtenir la valeur de F_4 en le décomposant en une somme faisant apparaitre les termes $F_0\ et\ F_1$ tous deux égaux à 1. Il semble également que les coefficients (en rouge) devant ces termes correspondent aux termes $F_3\ et\ F_2$.
Nous allons nous demander si à partir des deux premiers termes d'une suite suivant le même principe que celle de Fibonacci, il est possible d'obtenir la valeur du terme au rang n comme nous venons de le faire.

Pour cela nous devons définir la suite a, qui se veut semblable à la suite de Fibonacci mais où les valeurs des deux premiers termes sont différentes.
Les valeurs de $a_0\ et\ a_1$ sont fixées, sont non nulles simultanément, ne sont pas forcément égales entre elles et peuvent différer des deux premiers termes de la suite de Fibonacci. Nous avons ainsi : $a_0 \in \mathbb{R}\ et\ a_1 \in \mathbb{R}$. Nous définissons la suite a ainsi :

$$a_0 \in \mathbb{R}\ et\ a_1 \in \mathbb{R}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

4.2. Démonstration

Nous voulons démontrer qu'il est possible de décomposer un terme au rang n+2 de la suite a en faisant apparaitre les termes a_0 et a_1 avec devant eux des coefficients correspondant aux termes de la suite de Fibonacci aux rangs n+1 et n. Cette proposition s'exprime ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = F_{n+1}a_1 + F_n a_0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$
On appelle P(n) la proposition énoncée ci-dessus au rang n.
Pour la démontrer nous allons utiliser le principe de récurrence double.

<u>Initialisation</u>

$$a_2 = a_1 + a_0$$
$$Donc\ a_2 = 1a_1 + 1a_0$$
$$Donc\ a_2 = F_1 a_1 + F_0 a_0$$

On en déduit que la proposition P(0) est vraie.

$$a_3 = a_2 + a_1$$
$$Donc\ a_3 = a_1 + a_0 + a_1$$
$$Donc\ a_3 = 2a_1 + 1a_0$$
$$Donc\ a_3 = F_2 a_1 + F_1 a_0$$

On déduit que la proposition P(1) est vraie.

<u>Hérédité</u>
Soit $n \in \mathbb{N}$
La proposition P aux rangs n et n+1 s'énonce ainsi :

$$P(n) : a_{n+2} = F_{n+1}a_1 + F_n a_0$$
$$P(n+1) : \ a_{n+3} = F_{n+2}a_1 + F_{n+1}a_0$$

On suppose que la proposition P est vraie aux rangs n et n+1.
Par hypothèses de récurrence on a :

$$a_{n+4} = a_{n+3} + a_{n+2}$$

$$Donc\ a_{n+4} = F_{n+2}a_1 + F_{n+1}a_0 + F_{n+1}a_1 + F_n a_0$$

$$Donc\ a_{n+4} = a_1(F_{n+2} + F_{n+1}) + a_0(F_{n+1} + F_n)$$

$$Donc\ a_{n+4} = F_{n+3}a_1 + F_{n+2}a_0$$

$P(0)$ et $P(1)$ sont vraies. Après avoir supposé que $P(n)$ et $P(n+1)$ étaient vraies on a montré que cela impliquait que $P(n+2)$ soit vraie également. Ainsi on peut affirmer que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies.
On peut donc conclure que :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = F_{n+1}a_1 + F_n a_0}$$

5. Lien entre la suite a et la suite des rapports

Nous nous sommes demandé si la suite des rapports formée à partir de la suite a convergeait elle aussi ver les nombre d'or.
Dans cette partie, nous allons le prouver.

Chaque terme de cette suite est le rapport de deux termes consécutifs de la suite a avec $a_0 \neq 0 \; et \; a_1 \neq 0$. Il nous faut aussi respecter la condition $\forall n \in \mathbb{N}, a_n + a_{n+1} \neq 0$. (par exemple si $a_0 = 2$ et $a_1 = -2$ le rapport $\frac{a_3}{a_2}$ devient impossible.)

Considérons le terme $\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$.

En vertu de la propriété prouvée précédemment, on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} = \frac{F_{n+2}a_1+F_{n+1}a_0}{F_{n+1}a_1+F_n a_0}.$$

On factorise le numérateur par F_{n+2} et le dénominateur par F_{n+1}. On obtient alors:

$$\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} \times \frac{\left(a_1+\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}a_0\right)}{\left(a_1+\frac{F_n}{F_{n+1}}a_0\right)}.$$

Le deuxième membre de cette égalité est composé de deux facteurs.
Le premier $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ est un rapport qui va tendre vers le nombre d'or, d'après la propriété de la suite des rapports.

Dans le second facteur nous voyons apparaître des rapports inverses à ceux de la suite des rapports. Ainsi le numérateur va tendre vers $a_1 + \frac{1}{\varphi}a_0$ et le dénominateur va tendre vers $a_1 + \frac{1}{\varphi}a_0$.
Autrement dit, le second facteur tend vers 1.

Donc le rapport $\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$ va tendre vers $1 \times \varphi$ soit φ.

Donc la suite des rapports formée à partir de la suite a, converge également vers le nombre d'or.

On peut conclure par la propriété suivante :

$$\text{Soit une suite a définie par } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \neq 0 \text{ avec } a_0 \in \mathbb{R}^* \text{ et } a_1 \in \mathbb{R}^*.$$
$$\text{Si l'on forme une autre suite } v \text{ telle que } v_n = \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}},$$
$$\text{alors la suite } v \text{ converge vers le nombre d'or.}$$