Des carrés et des 4

Année 2023-2024

Amandine Gaugler, Albane Rimelen, Louis Throo, Laura Kuenemann et Célestin Depond Roth
(élèves de Première)

Établissement : Lycée Scheurer Kestner, Thann
Enseignant·es : Claire Ledain, Nicolas Studer, Pascale Fuchs et Véronique Da Silva
Chercheur·Chercheuse(s) : Nicolas Chevallier, Université de Haute Alsace

Introduction

Cet article résume nos recherches durant l'année 2023-2024 de Maths en Jean's. Notre problème traite de l'étude des carrés parfaits, on se pose deux questions :

- Quel est le nombre maximum de quatre à la fin d'un carré parfait ?
- Quel est le nombre maximum de quatre au début d'un carré parfait ?

Rappel : Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.

1. Les carrés parfaits qui finissent par des quatre

1.1. Les carrés qui se terminent par 4 :

Propriété. *Un entier a son carré qui termine par* 4 *si et seulement si il se termine par* 2 *ou* 8.

D'une part, si $n = 10k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} n^2 &= (10k+2)^2 \\ &= 100k^2 + 40k + 4 \\ &= 10(10k^2 + 4k) + 4 \end{aligned}$$

donc n^2 termine bien par 4.

D'autre part, si $n = 10k + 8$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} n^2 &= (10k+8)^2 \\ &= 100k^2 + 160k + 64 \\ &= 10(10k^2 + 16k) + 4 \end{aligned}$$

donc n^2 termine bien par 4.

Pour prouver la réciproque, on prouve que le dernier chiffre du carré dépend du dernier chiffre de n :

Pour n un entier qui finit par 0,

$$\begin{aligned} n &= 10k \\ n^2 &= 100k^2 \\ &= 10(10k^2), \end{aligned}$$

donc n^2 se finit par 0.

Pour n un entier qui finit par 1,

$$\begin{aligned} n &= 10k + 1 \\ n^2 &= 100k^2 + 20k + 1 \\ &= 10(10k^2 + 2k) + 1, \end{aligned}$$

donc n^2 se finit par 1.

Pour n un entier qui finit par 2,

$$\begin{aligned} n &= 10k+2 \\ n^2 &= 100k^2+40k+4 \\ &= 10(10k^2+4k)+4, \end{aligned}$$

donc n^2 se finit par 4.

Pour n un entier qui finit par 3,

$$\begin{aligned} n &= 10k+3 \\ n^2 &= 100k^2+60k+9 \\ &= 10(10k^2+6k)+9, \end{aligned}$$

donc n^2 se finit par 9.

Pour n un entier qui finit par 4,

$$\begin{aligned} n &= 10k+4 \\ n^2 &= 100k^2+80k+16 \\ &= 10(10k^2+8k)+16, \end{aligned}$$

donc n^2 se finit par 6.

Pour n un entier qui finit par 5,

$$\begin{aligned} n &= 10k+5 \\ n^2 &= 100k^2+100k+25 \\ &= 10(10k^2+10k)+25, \end{aligned}$$

donc n^2 se finit par 5.

Pour n un entier qui finit par 6,

$$\begin{aligned} n &= 10k+6 \\ n^2 &= 100k^2+120k+36 \\ &= 10(10k^2+12k)+36, \end{aligned}$$

donc n^2 se finit par 6.

Pour n un entier qui finit par 7,

$$\begin{aligned} n &= 10k+7 \\ n^2 &= 100k^2+140k+49 \\ &= 10(10k^2+14k)+49, \end{aligned}$$

donc n^2 se finit par 9.

Pour n un entier qui finit par 8,

$$\begin{aligned} n &= 10k+8 \\ n^2 &= 100k^2+160k+64 \\ &= 10(10k^2+16k)+64, \end{aligned}$$

donc n^2 se finit par 4.

Pour n un entier qui finit par 9,

$$\begin{aligned} n &= 10k+9 \\ n^2 &= 100k^2+180k+81 \\ &= 10(10k^2+18k)+81, \end{aligned}$$

donc n^2 se finit par 9.

Cela prouve donc que seuls les entiers finissant par 2 et 8 ont leurs carrés qui finissent par 4.

1.2. Les carrés qui se terminent par 44

Liste des carrés parfaits terminant par plus d'un 4 jusqu'à 200 au carré :

$$\begin{aligned} 12^2 &= 144 \\ 38^2 &= 1\,444 \\ 62^2 &= 3\,844 \\ 88^2 &= 7\,744 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 112^2 &= 12\,544 \\ 138^2 &= 19\,044 \\ 162^2 &= 26\,244 \\ 188^2 &= 35\,344 \end{aligned}$$

On remarque qu'à partir des nombres 12 et 38 on ajoute 50 pour trouver le prochain nombre dont le carré parfait termine par deux 4 ou plus.

Ainsi, si $n = 50k+12$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} n^2 &= (50k+12)^2 \\ &= 2500k^2+1200k+144 \\ &= 100\,(25k^2+12k)+144. \end{aligned}$$

D'autre part, si $n = 50k+38$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} n^2 &= (50k+38)^2 \\ &= 2500k^2+3800k+1444 \\ &= 100\,(25k^2+38k)+1444. \end{aligned}$$

Réciproquement, on cherche à savoir si ce sont les seules solutions.
Comme vu dans la partie précédente, les entiers qui au carré finissent par 4, finissent par 2 ou 8. Il faut donc étudier les nombres qui finissent par 2[50] ou 8[50] (1) :

$$50n+8\,;\ 50n+18\,;\ 50n+22\,;\ 50n+28\,;\ 50n+32\,;\ 50n+48.$$

$$(50n+8)^2 = 2500n^2 + 800n + 64 = 100(25n^2 + 8n) + 64$$
$$(50n+18)^2 = 2500n^2 + 1800n + 324 = 100(25n^2 + 18n) + 324$$
$$(50n+22)^2 = 2500n^2 + 2200n + 484 = 100(25n^2 + 22n) + 484$$
$$(50n+28)^2 = 2500n^2 + 2800n + 784 = 100(25n^2 + 28n) + 784$$
$$(50n+32)^2 = 2500n^2 + 3200n + 1024 = 100(25n^2 + 32n) + 1024$$
$$(50n+42)^2 = 2500n^2 + 4200n + 1764 = 100(25n^2 + 42n) + 1764$$
$$(50n+48)^2 = 2500n^2 + 4800n + 2304 = 100(25n^2 + 48n) + 2304$$

Cela prouve donc que tous les nombres dont le carré termine par 44 sont de la forme $50n+12$ ou $50n+38$

1.3. Les carrés qui finissent par 444

Liste des entiers dont le carré termine par 444 entre 1 et $10\,000$:

38 ; 462 ; 538 ; 962 ; 1038 ; 1462 ; 1538 ; 1962 ; 2038 ; 2462 ; 2538 ; 2962 ; 3038 ; 3462 ;3538
3962 ; 4038 ; 4462 ; 4538 ; 4962 ; 5038 ; 5462 ; 5538 ; 5962 ; 6038 ; 6462 ; 6538 ;6962 ; 7038 ;
7462 7538 ; 7962 ; 8038 ; 8462 ; 8538 ; 8962 ; 9038 ; 9462 ; 9538 ; 9962

Il semblerait que les entiers dont le carré se termine par 444 soient séparés de 500 en partant de 38 et de 500 en partant de 462.
On peut alors écrire que

d'une part, si $n = 500k + 38$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} n^2 &= (500k+38)^2 \\ &= 250\,000k^2 + 38\,000k + 1444 \\ &= 1000\,(250k^2 + 38k) + 1444, \end{aligned}$$

d'autre part, si $n = 500k + 462$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} n^2 &= (50k+462)^2 \\ &= 250\,000k^2 + 462\,000k + 213\,444 \\ &= 1000\,(250k^2 + 462k) + 213\,444. \end{aligned}$$

Réciproquement, on cherche à savoir si ce sont les seules solutions.
Comme vu dans la partie précédente, les entiers qui au carré finissent par 44 finissent par 12 ou 38 (2).
Il faut donc étudier les nombres qui finissent par $12[50]$ ou $38[50]$.
D'après des calculs analogues, on obtient que les seuls carrés qui terminent par 444 sont $(500n+38)^2$ ou $(500n+462)^2$ (3). Cela prouve donc que tous les nombres dont le carré termine par 444 sont de la forme $500n+38$ ou $500n+462$

1.4. Existe-t-il un maximum ?

En se basant sur les résultats du programme ci-dessous, il apparait qu'aucun carré inférieur à 10000000^2 ne termine par 4444. On conjecture donc qu'il n'en existe pas.

```python
def genliste() :
    listenb = []
    n = 0
    for i in range (100000000) :
        x = n**2
        liste = list(map(int, str(x)))
        if liste[-1] == 444 :
            print(liste,"est le carré de",n)
            listenb.append(n)
        n = n+1
    print(listenb)
```

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un entier k tel que $k^2 = 10\,000n + 4444$. Alors

$$k^2 = 4\,(2500n + 1111), \quad \text{donc} \quad k = 2\sqrt{2500n + 1111}.$$

Ainsi soit $\sqrt{2500n + 1111}$ est un entier, soit c'est un demi-entier.

— Supposons que $\sqrt{2500n + 1\,111}$ est un entier. On considère alors un entier q tel que

$$q^2 = 2500n + 1111 = 100 \times 25n + 1111.$$

On pose $q \in \mathbb{N}$ tel que q^2 finisse par 11. q^2 se termine par 1 puisqu'il se finit par 11 ainsi $q^2 = 100c + 11$ avec c entier ;
q termine donc par 1 ou 9 car ce sont les seuls nombres dont le carré finit par 1.
Il peut donc s'écrire

$$q = 10a + 1 \text{ ou } q = 10a - 1 \text{ avec } a \text{ entier.}$$

D'une part, si $q = 10a + 1$, alors
$q^2 = 100a^2 + 20a + 1$, or $q^2 = 100c + 11$,
donc $100c + 11 = 100a^2 + 20a + 1$,
d'où $20a = 100(c - a^2) + 10$;
ainsi $a = 5\,(c - a^2) + \frac{1}{2}$.

D'autre part, si $q = 10a - 1$, alors
$q^2 = 100a^2 - 20a + 1$, or $q^2 = 100c + 11$,
donc $100c + 11 = 100a^2 - 20a + 1$,
d'où $20a = 100(a^2 - c) - 10$;
ainsi $a = 5\,(a^2 - c) - \frac{1}{2}$.

— Supposons que $\sqrt{2500n + 1111}$ est un demi entier, donc $\sqrt{2500n + 1111} = \dfrac{k}{2}$ avec k impair.

Alors $2500n + 1111 = \dfrac{k^2}{4}$.
Comme k^2 est impair, $k^2/4$ n'est pas entier, ce qui contredit que $2500n + 1111$ est entier.

Dans ces deux cas, il y a une contradiction avec le fait que l'on suppose a entier. Il n'existe donc pas de carré qui finit par 4444, et par extension, il n'en existe pas avec plus de trois 4.

2. Les carrés parfaits qui commencent par des quatre

Afin de mener à bien nos recherches nous avons tout d'abord réalisé des observations. En premier lieu, nous nous sommes intéressés aux divers entiers qui ont des carrés commençant par 4.
Nous avons conjecturé qu'il existe plusieurs possibilités pour qu'un entier à 2 chiffres ait un carré qui commence par 4 (4) :

— Si le premier chiffre est un 2, et que le deuxième est inférieur à 3, par exemple $20^2 = 400$, $21^2 = 441$ et $22^2 = 484$.
— Si le premier chiffre est 6, et le deuxième chiffre est supérieur à 3, par exemple $64^2 = 4096$, $65^2 = 4225$ et $67^2 = 4489$.

Pour qu'un entier à 3 chiffres ait un carré qui commence par 4 :

— Soit le premier chiffre est un 2 et les deux derniers chiffres forment un nombre inférieur ou égal à 23, par exemple $223^2 = 49\,729$, $210^2 = 44\,100$ et $202^2 = 40\,804$.
— Soit le premier chiffre est 6 et les deux derniers chiffres forment un nombre supérieur ou égal à 34, par exemple $634^2 = 401\,956$ et $698^2 = 487\,204$.

En utilisant le programme Python ci-contre, l'on remarque que les nombres a tels que $a = \sum_{k=1}^{n} 6 \times 10^k + 7$ ont un carré qui commence par un ou plusieurs 4.

```python
def sw4 () :
    liste = []
    listenb = []
    listen = []
    for i in range(10000) :
        x = i**2
        liste = list(map(int, str(x)))
        if liste[0] == 4 :
            listenb.append(x)
            listen.append(i)
    print(listenb)
    print(listen)
```

Exemples :

$$67^2 = 4489 \qquad 667^2 = 444\,889$$

De plus, on remarque que pour n six, on a $(n+1)$ quatre, n huit et 1 neuf.

On cherche maintenant à prouver cette observation en raisonnant par récurrence. Soit

$$A_n = \sum_1^n 6 \times 10^k + 7.$$

On pose

$$H_n : \quad \Big(\sum_{k=1}^n 6 \times 10^k + 7\Big)^2 = \sum_{k=n+1}^{2n+1} 4 \times 10^k + \sum_{k=1}^n 8 \times 10^k + 9.$$

– On initialise à $n = 1$:

$$\Big(\sum_{k=1}^1 6 \times 10^k + 7\Big)^2 = (6 \times 10^1 + 7)^2 = 67^2 = 4489.$$

Or $4489 = 4400 + 80 + 9 = \sum_{k=2}^3 4 \times 10^k + \sum_{k=1}^1 8 \times 10^k + 9$.

H_1 est donc vraie.

– Supposons maintenant que H_n est vraie. On souhaite prouver qu'alors H_{n+1} est vraie.
On pose donc $A_{n+1}^2 = (6 \times 10^{n+1} + A_n)^2$. On développe,

$$A_{n+1}^2 = 36 \times 10^{2n+2} + A_n^2 + 12 A_n \times 10^{n+1}.$$

On remplace A_n d'après H_n,

$$A_{n+1}^2 = 36 \times 10^{2n+2} + 9 + \sum_{k=1}^n 8 \times 10^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} 4 \times 10^k + 12\Big(\sum_{k=1}^n 6 \times 10^k + 7\Big) \times 10^{n+1}.$$

Pour faciliter la rédaction, on pose $T = 36 \times 10^{2n+2} + 9 + \sum_{k=1}^n 8 \times 10^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} 4 \times 10^k$.

On a alors

$$A_{n+1}^2 = T + 72 \times 10^{n+1} \times \sum_{k=1}^n 10^k + 84 \times 10^{n+1}.$$

On utilise la formule de calcul de la somme de termes d'une suite géométrique,

$$A_{n+1}^2 = T + 72 \times 10^{n+1} \times 10 \times \frac{10^n - 1}{9} + 84 \times 10^{n+1}.$$

On simplifie,

$$\begin{aligned}
A_{n+1}^2 &= T + 8 \times 10^{n+1} \times 10 \times (10^n - 1) + \underbrace{84 \times 10^{n+1}}_{8 \times 10^{n+2} \; + \; 4 \times 10^{n+1}} \\
&= T + 8 \times 10^{2n+2} - 8 \times 10^{n+2} + 8 \times 10^{n+2} + 4 \times 10^{n+1}.
\end{aligned}$$

On réinjecte maintenant T,

$$\begin{aligned}
A_{n+1}^2 &= 9 + \sum_{k=1}^n 8 \times 10^k + \sum_{k=n+2}^{2n+1} 4 \times 10^k + 36 \times 10^{2n+2} + 8 \times 10^{2n+2} + \underbrace{4 \times 10^{n+1} + 4 \times 10^{n+1}}_{8 \times 10^{n+1}} \\
&= 9 + \sum_{k=1}^{n+1} 8 \times 10^k + \sum_{k=n+2}^{2n+1} 4 \times 10^k + 36 \times 10^{2n+2} + 8 \times 10^{2n+2} \\
&= 9 + \sum_{k=1}^{n+1} 8 \times 10^k + \sum_{k=n+2}^{2n+1} 4 \times 10^k + \underbrace{44 \times 10^{2n+2}}_{4 \times 10^{2n+3} \; + \; 4 \times 10^{2n+2}} \\
&= 9 + \sum_{k=1}^{n+1} 8 \times 10^k + \sum_{k=n+2}^{2n+3} 4 \times 10^k.
\end{aligned}$$

Donc H_n est vraie implique que H_{n+1} est vraie.

– Or H_1 est vraie. Par le principe de récurrence, H_n est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme le nombre de 6 au début de a n'est pas limité, on pourra avoir autant de quatre au début d'un carré parfait que l'on veut.

3. Conclusion

Pour conclure, on peut donc affirmer que le maximum de 4 à la fin d'un carré parfait est de trois. De plus, il peut y avoir autant de 4 que l'on souhaite au début d'un carré parfait, et l'on a donc un moyen d'en avoir autant que l'on souhaite. Il suffit d'utiliser un nombre n de sorte que $n = \sum_{k=1}^{n} 6 \times 10^k + 7$.

Notes d'édition

(1) La notation $n = 2[50]$ se lit $n = 2$ modulo 50 et signifie que n est égal à 2 plus un multiple de 50. Dans la liste qui suit, il faut ajouter $50n + 2$ et $50n + 42$.

(2) Ce sont plutôt les entiers égaux à 12 ou à 38 *modulo* 50 (ils peuvent aussi “finir” par 62 ou par 88).

(3) Le calcul précédent montre que si on ajoute un multiple de 500 à un entier, on ajoute un multiple de 1000 à son carré et on ne change donc pas ses trois derniers chiffres. Le résultat s'obtient donc en testant les entiers naturels inférieurs à 500 dont le carré se termine par 44, c'est-à dire ceux de la forme $50k + 12$ ou de la forme $50k + 38$, avec $0 \leq k < 10$.

(4) Ce sont plutôt des constatations que des conjectures. Parmi les nombres à deux chiffres, il y a aussi 70 dont le carré commence par 4, et pour les nombres à trois chiffres, on peut aller jusqu'à 707.