Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

On fait des pizzas !

Le dénombrement au restaurant

Année 2023– 2024

Anatole Nierenberger, Clara Marie Spat, Hector Silber, Arthur Schwob, Léon Schrodi

Établissement : Lycée Docteur Eugène Koeberlé – Sélestat

Enseignants : Nathalie Meyer, Stéphane Vénéreau

Chercheur : Daniel Panazzolo, Université de Haute-Alsace

1. Introduction

1.1. Mise en situation et présentation

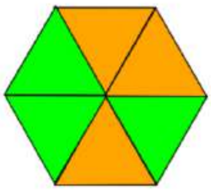
Le pizzaïolo de l'hôtel de Hilbert doit servir $1.4 \times 10^{5\,998\,100\,905}$ résidents ce soir.
Chacun demande une pizza différente de toutes les autres qui seront servies.
En combien de parts devrait-il couper chaque pizza et avec combien de garnitures différentes devrait-il les recouvrir afin de satisfaire cette commande ?

On définit une « pizza » comme un disque que l'on découpe en un nombre n de parts égales, auxquelles nous allons ajouter un nombre g de garnitures différentes.
Cette configuration doit cependant obéir aux contraintes énumérées ci-dessous :

– Chaque garniture doit être présente sur la pizza

– Chaque part ne peut contenir qu'une seule garniture

– Chaque garniture doit impérativement apparaitre sur autant de parts que les autres, c'est-à-dire $\frac{n}{g}$ fois.



Exemple de pizza possible pour $n = 6$ et $g = 2$ (chaque couleur représente une garniture).

1.2. Problématique

Dès lors, on cherche à dénombrer les motifs différents que l'on peut construire en prenant en compte les règles données précédemment. Nous ne connaissons aucune fonction qui puisse calculer cela directement, donc dans l'optique de créer une formule nous-même, on cherche :

Comment la construction de pizza se modélise et quels sont les mécanismes sous-jacents ?

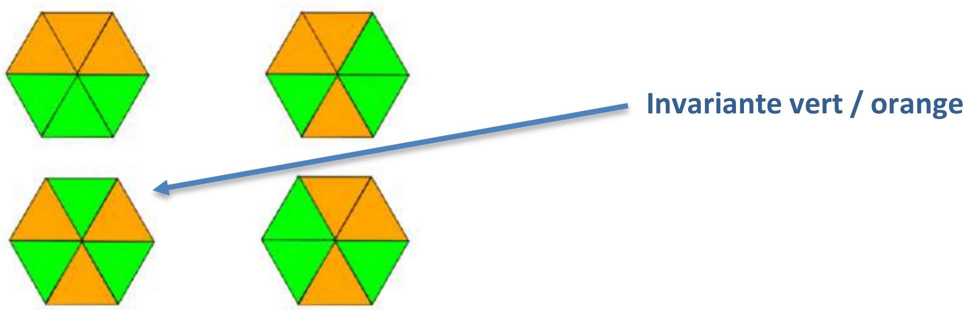
IMPORTANT : DEUX PIZZAS SONT CONSIDÉRÉES COMME LES MÊMES SI ON PEUT TOURNER L'UNE POUR QUE LES DEUX SOIT CONFONDUES

Afin d'aiguiser notre intuition, nous commencerons par nous pencher sur des exemples simples, où n et g sont relativement petits.
Ensuite, nous tenterons de dégager des cas particuliers ainsi que des formules relatives à leur dénombrement, et en vertu d'une analyse plus poussée, nous chercherons à dresser une formule générale qui prend en compte les variables n et g, et à prouver son exactitude.

2. Résultats

2.1. Exemple pour $n = 6$ parts et $g = 2$ garnitures

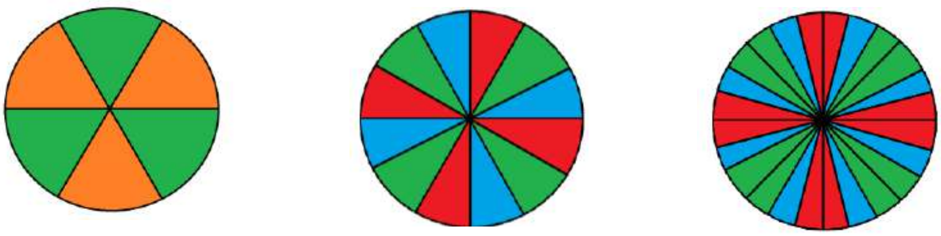
Déjà, on remarque que, de par les règles de constructions, n doit obligatoirement être un multiple de g, tout simplement car chaque garniture doit apparaitre $\frac{n}{g}$ fois.
Ainsi, on se penche sur le cas $n = 6$ et $g = 2$.
Étant donné que les n et g sont relativement petits, on envisage de compter toutes les configurations à la main, et on obtient 4 pizzas distinctes :



Il est relativement facile de voir, après inspections manuelles minutieuses, que ces motifs sont les seuls possibles, il n'y en a pas plus, pas moins.

Par ailleurs, on identifie 2 types de pizzas :

– **Celles qui possèdent une symétrie de rotation, c'est-à-dire qui consistent de motifs qui se répètent, comme « vert orange vert orange vert orange etc... ».**
Exemples de pizzas invariantes par rotation de 2, 3 et 6 parts respectivement, pour des n et g quelconques :

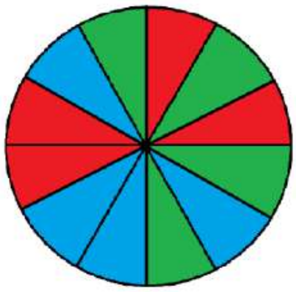


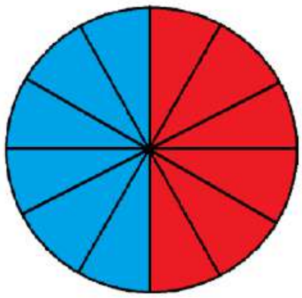
Donc, il existe un moyen de les tourner sur elles même avec un angle inférieur à 360°, c'est-à-dire un tour complet, de sorte à ce que le motif retourne à son état initial.

<u>Dans la suite de l'article, nous appellerons ce cas particulier ''Pizza invariantes'', car elles peuvent ne pas varier sans une certaines rotation.</u>

– Les autres, celles qui, peu importe comment l'on tourne la pizza (moins de 360°), ne reviennent pas à leur état initial.

Exemples de pizzas non-invariantes :





2.2. Cas particulier : les pizzas invariantes

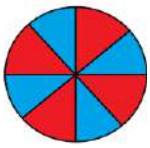
Soit $n = 8$ et $g = 2$. 8 est bien un multiple de 2.

On cherche à dénombrer les motifs invariants en fonction de n et g

Pour ce faire, on divise chaque cas d'invariants en plusieurs catégories :

– Ceux qui se répètent toutes les 2 parts

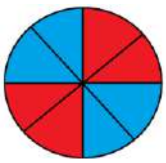
Exemple :



On voit que l'on peut diviser la pizza en $8/2 = 4$ sous-motifs identiques, 2 étant la longueur des motifs

– Ceux qui se répètent toutes les 4 parts

Exemple :



On peut diviser la pizza en $8/4 = 2$ sous-motifs identiques, 4 est la longueur des motifs

En effet, 2 et 4 sont les seuls nombres entiers positifs qui divisent $n = 8$ ***et*** qui sont des multiples de $g = 2$.
Ainsi,

– Chaque garniture occupe le même nombre de parts
Et
– Les sous-motifs qui se répètent peuvent remplir la pizza.

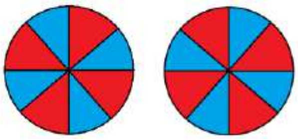
Remarque :
Les motifs sont comme des mini-pizzas, un « sous-groupe » qui respecte les mêmes règles de construction des pizzas.

Pour la suite, on notera E l'ensemble d'invariants selon n et g :

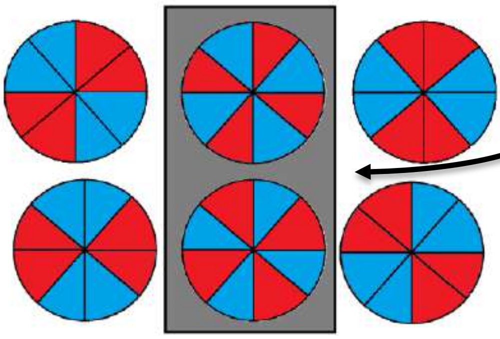
$$\boldsymbol{E} = \{ \textbf{ tous les entiers naturels } \boldsymbol{x} \textbf{ qui divisent } \boldsymbol{n} \textbf{ et qui sont divisibles par } \boldsymbol{g} \}.$$

Maintenant, on cherche à dénombrer ces motifs invariants :

– Pour les pizzas présentant des motifs longs de 2 parts qui se répètent, dénombrés par $\mathrm{inv}(r_2)$, on remarque qu'il n'existe que 2 motifs « différents » (même si elles sont tout de même symétriques par rotation).



– Pour $\mathrm{inv}(r_4)$, on compte 6 motifs longs de 4 parts, cependant, 2 d'entre eux sont aussi des motifs r_2, car 2 divise 4.



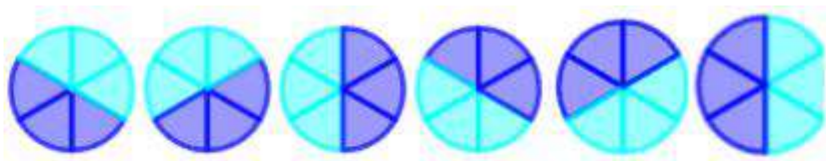
Afin d'éviter les ambiguïtés, nous définirons $\mathrm{inv}(r_4)$ comme $6 - 2 = 4$ (1)

2.3. Premiers pas vers une formule générale

Le concept d'invariants désormais établi, on peut diviser chaque pizzas possibles en 2 groupes (inv et non inv), que l'on peut traiter individuellement.

Quand on tourne une pizza, elle reste la même pizza, donc quand on compte toutes les pizzas sans penser aux rotations possibles, alors elles vont apparaitre plusieurs fois

Exemple : Pour $n = 6$ parts, les pizzas peuvent apparaitre $n = 6$ fois



On voit que les pizzas non invariantes se répètent n fois, tandis que les invariantes se répètent, elles, autant de fois qu'il y a de parts dans leur motif. On va donc séparer les deux groupes, compter leur effectif sans prendre en compte les rotations pour ensuite diviser ces effectifs par leur nombre de « clones » respectifs.

Notre approche est la suivante :

1 – En oubliant totalement le principe de rotation des pizzas, on cherche à calculer le nombre absolu de configurations en utilisant le coefficient binomial, on le note X.
Et donc X compte aussi les pizzas invariantes.

2 – On dénombre aussi toutes les pizzas invariantes sans prendre en compte les rotations, on note Y.

3 - On dispose de l'ensemble des pizzas non invariantes, <u>d'effectif $X - Y$.</u>
Ces pizzas, qui donc ne se répètent pas en motifs, sont comptées n fois chacune, c'est-à-dire autant de fois que leur nombre de parts. Pour les dénombrer en tenant compte des rotations, on divise l'effectif des non-invariantes par n, et on obtient :

$$\text{VRAI nombre de pizzas non invariantes} = \frac{X - Y}{n}.$$

4 - Et pour l'ensemble de pizzas invariantes, d'effectif Y :
Après dénombrement des motifs pour chaque longueur de motif possible, on divise chaque effectif d'invariants sans prendre en compte les rotations par leur longueur de motif, ce qui donne :

$$\sum_{x \in E} \frac{\mathrm{inv}(r_x)}{x}$$

Finalement, on en déduit en regroupant les deux qu'une formule générale serait de cette sorte :

$$\frac{X - Y}{n} + \sum_{x \in E} \frac{\mathrm{inv}(r_x)}{x}$$

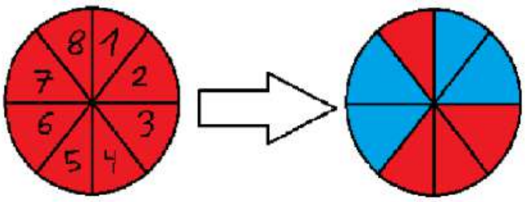
Désormais, le problème se résume au calcul des nombres de possibilités sans prendre en compte les rotations, on cherche à calculer X, Y, et $\mathrm{inv}(r_x)$.

2.4. Coefficient binomial et comptage absolu

<u>Calcul de X</u>

<u>Continuons avec l'exemple où $n = 8$ et $g = 2$.</u>

On représente une pizza comme une liste numérotée, ici, de 1 à 8.
Pour l'instant, il n'y a que la pâte et la sauce, à nous de placer les garnitures.
On place une garniture après l'autre, combien de moyens avons-nous de les placer sans penser aux rotations ?



On a choisi 1, 2, 6 et 7 parmi les 8 options
Le reste est en rouge

Bien, vu que l'on choisit ici 4 parts où mettre la première garniture, fatalement il faudra placer la deuxième garniture sur les 4 parts qui restent afin d'avoir autant de chaque.
Mathématiquement, cela est donné par la formule du coefficient binomial qui donne le nombre de manières de choisir 4 éléments parmi 8 : $X = \binom{8}{4} = 70$.

Cela se calcule très bien, par exemple avec <u>le triangle de Pascal</u>.

<u>Pour une pizza avec $n = 12$ et $g = 3$.</u>

Là, on a d'abord le choix entre 4 parts parmi 12 pour placer la première garniture, puis 4 autres parts parmi celles qui restent, et on place la troisième garniture sur les 4 dernières qui restent.
En multipliant de la même manière qu'un arbre de probabilité, on obtient $\binom{12}{4} \times \binom{8}{4} = 34650$ possibilités.

Avec n parts et g garnitures :

Le nombre de possibilités est le produit répété de ces coefficients binomiaux, ce qui nous donne

$$X = \prod_{k=1}^{g} \binom{n - k\frac{n}{g}}{\frac{n}{g}}$$

Après une manipulation de la formule du coefficient binomial, en vertu de sa définition,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Avec $n!$ la factorielle de n, on obtient une forme plus concise :

$$X = \prod_{k=1}^{g} \binom{n - k\frac{n}{g}}{\frac{n}{g}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{g}}!\right)^{\boldsymbol{g}}}$$

Calcul de $\boldsymbol{Y}$ et de $\mathbf{inv}(\boldsymbol{r_x})$

Pour une pizza avec $n = 16$ et $g = 2$

Déjà, pour formaliser la procédure de calcul, on établit **l'ensemble $\boldsymbol{E}$** des entiers qui divisent 16 et qui sont divisibles par 2 : $E = \{2, 4, 8\}$.

On effectue au cas par cas :

Pour $\mathrm{inv}(r_2)$:

On examine le motif répétitif de longueur de motif 2, et on voit que l'on a le choix entre deux parts pour la première garniture, donc $\mathrm{inv}(r_2) = 2$.

Pour $\mathrm{inv}(r_4)$:

On a le choix de 2 parts parmi les 4 qui forment le motif, donc $\mathrm{inv}(r_4) = \binom{4}{2} - \mathrm{inv}(r_2) = 6 - 2 = 4$ car 2 divise 4.

De même, $\mathrm{inv}(r_8) = \binom{8}{4} - \mathrm{inv}(r_2) - \mathrm{inv}(r_4) = 70 - 6 - 2 = 64$ car 2 et 4 divisent 8.

Et donc**,**

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}} \mathbf{inv}(\boldsymbol{r_x}) = \mathbf{64 + 4 + 2 = 70}.$$

On note que dans ce cas précis, soustraire les invariants de 2 et 4 à ceux de 8 est inutile car on additionne tout à la fin. Cependant ce n'est généralement pas le cas.

Pour une pizza avec $n = 42$ parts et $g = 3$ garnitures :

$E = \{3, 6, 21\}$

On remarque que le calcul d'invariants sans prendre en compte les rotations est exactement le même que celui pour calculer le nombre de pizzas sans réfléchir aux rotations, ainsi, de la même manière, on multiplie les coefficients binomiaux :

$$\mathrm{inv}(r_3) = \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 6$$

$$\mathrm{inv}(r_6) = \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} - \mathrm{inv}(r_3) = 90 - 6 = 84$$

$$\mathrm{inv}(r_{21}) = \binom{21}{7} \times \binom{14}{7} - \mathrm{inv}(r_3) = 399\,072\,960 - 6 = 399\,072\,954$$

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}} \mathbf{inv}(\boldsymbol{r_x}) = \mathbf{6 + 84 + 399\,072\,954 = 399\,073\,044}$$

2.5. Formule générale

Maintenant que l'on peut calculer X, Y et les invariants, on a, après établissement de l'ensemble E :

$$\boldsymbol{N = \frac{1}{n}\left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{g}!\right)^g} - \sum_{x\in E} \mathrm{inv}(r_x)\right) + \sum_{x\in E}\frac{\mathrm{inv}(r_x)}{x}}$$

On peut aussi simplifier la formule :

$$\boldsymbol{\begin{aligned} N &= \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{g}!\right)^g} - \sum_{x\in E}\frac{\mathrm{inv}(r_x)}{n} + \sum_{x\in E}\frac{\mathrm{inv}(r_x)}{x} \\ &= \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{g}!\right)^g} + \sum_{x\in E}\mathrm{inv}(r_x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}}$$

De plus, on remarque que si n est de la forme $p \times g$ avec p un nombre premier, alors $E = \{g\}$. Ainsi,

$$\boldsymbol{\begin{aligned} N &= \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{g}!\right)^g} + \sum_{x\in E}\mathrm{inv}(r_x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{(pg-1)!}{(p!)^g} + \mathrm{inv}(r_g)\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}}$$

Or dans ce cas, $\mathrm{inv}(r_g) = g(g-1)(g-2)\ \dots .\ (2)(1) = g!$ car on choisit successivement 1 parmi g parts, puis entre celles qui restent et ainsi de suite, ainsi on a, pour tout p premier :

$$\boldsymbol{N = \frac{(pg-1)!}{(p!)^g} + g!\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{n}\right)}$$

Mettons cette formule à l'épreuve.

<u>On reprend l'exemple où $n = 42$ et $g = 3$</u>

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{g}!\right)^g} = \frac{42!}{(14!)^3} = 2\ 120\ 572\ 665\ 910\ 693\ 600$$

$$\sum_{x\in E}\mathrm{inv}(r_x) = 399\ 073\ 044$$

$$\sum_{x\in E}\frac{\mathrm{inv}(r_x)}{x} = \frac{6}{3} + \frac{84}{6} + \frac{399\ 072\ 954}{21} = 19\ 003\ 490$$

On rentrant tout cela dans la formule, on a

$$\boldsymbol{N = \frac{2\ 120\ 572\ 665\ 910\ 693\ 600 - 399\ 073\ 044}{42} + 19\ 003\ 490 = 50\ 489\ 825\ 378\ 826\ 050}$$

N'est-ce-pas miraculeux ? Tous ces chiffres, divisions et formules s'assemblent pour donner un nombre entier ! Qui aurait cru qu'après ces additions et multiplications de termes, que le nombre d'arrivée serait entier ? C'est une des facettes sublimes des mathématiques, tous ces détails sont connectés par des liens invisibles de quantité infinie, que nous espérons mettre en évidence à travers cette modeste formule.

On ne peut d'ailleurs pas s'empêcher de s'extasier face à la taille du résultat obtenu, qui est surtout dû à l'explosivité des coefficients binomiaux.

Toutes ces formules ont aussi été testées par ordinateur, qui nous a permis de nous persuader de la véracité de ces dernières en comptant lui-même « à la main » toutes les pizzas possibles pour de nombreuses valeurs de n et g.

2.6. Programme en Python

```python
def suiv(A,g):
 # Fonction pour passer à la pizza suivante,
 # cela fonctionne comme une addition en base g,
 # on créé une liste de pizzas totalement chaotiques, mais exhaustive.
 # On pourra les filter plus tard.
  if A[0]!=g-1:
    A[0]+=1
  else:
    A[0]=0
    A[1]+=1
    for k in range(len(A)-2):
      if A[k+1]==g:
        A[k+1]=0
        A[k+2]+=1
  return A

def rota(A,x):
 # Fonction qui décale la liste pizza de x rangs vers la gauche,
 # agit comme une rotation d'une pizza
  A=A[x:]+A[:x]
  return(A)

def verif(A,g):
 # Fonction qui vérifie si la pizza autant de garnitures de chaque sorte
 # afin de filtrer celles à analyser
  a=len(A)/g
  return(all(A.count(k)==a for k in range(g)))

def pizza(n, g):
 #Initialise avec la pizza vide, une liste totale vide et un compteur à 0
  T = 0
  Liste = []
  Pizza = [0 for k in range(n)]
  # On jongle entre NPizza er Pizza, car Python est très capricieux
  # avec les opérations sur des listes
  for k in range(g**n-1):
    NPizza = Pizza.copy()
    NPizza = suiv(NPizza, g)
    Pizza=NPizza
    # Pour chaque pizza "chaotique" possibles générés par la fonction "suiv",
    # on vérifie si elles respectent les règles
    if verif(Pizza, g):
      # On dresse la liste de toutes les rotations de la Pizza
      Rotations = [rota(Pizza, k) for k in range(n)]
      # Formule concise qui vérifie qu'aucune rotation de la Pizza
      # n'est déjà dans la liste
      if all(not (Rotations[k] in Liste) for k in range(0, len(Rotations))):
        # On ajoute la pizza à la liste
        Liste.append(Pizza)
        #Le compteur du nombre de pizzas est incrémenté de 1
        T += 1
  return (T)

a=pizza(10,2)
b=pizza(14,2)
c=pizza(16,2)
d=pizza(9,3)
e=pizza(8,4)
print("Pizzas pour n=10 et g=2 :", (a))
print("Pizzas pour n=14 et g=2 :", (b))
print("Pizzas pour n=16 et g=2 :", (c))
print("Pizzas pour n=9 et g=3 :", (d))
print("Pizzas pour n=8 et g=4 :", (e))
```

```
Pizzas pour n=10 et g=2 : 26
Pizzas pour n=14 et g=2 : 246
Pizzas pour n=16 et g=2 : 810
Pizzas pour n=9 et g=3 : 188
Pizzas pour n=8 et g=4 : 318
```

Chaque résultat obtenu ici est le même que sa valeur calculée par la formule.

Par ailleurs, pourquoi nous arrêter là ? Pourquoi ne pas essayer de trouver N pour des n et g bien plus grands ?

Par exemple, pour 100 parts et 10 garnitures, on obtient $N \approx 2.357 \times 10^{90}$ pizzas possibles.
Et pour 200 parts et 10 garnitures ? Le nombre de possibilité devient trop grand pour la calculatrice.

Dans l'optique de poursuivre l'infiniment grand, nous allons dans un dépassement chercher un moyen d'approximer notre formule pour trouver un ordre de grandeur des nombres de possibilités immenses que l'on peine à calculer.

3. Dépassement, approximation de l'infiniment grand

3.1. Simplifications de la formule

Nous avons cette formule :

$$\boldsymbol{N = \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{g}!\right)^g} + \sum_{x \in E} \mathrm{inv}(r_x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n}\right)}$$

Déjà, peut-on négliger les invariants ? Car dans l'exemple précédent, on a vu que les invariants ont un effectif des milliards de fois plus mince. Dans un cas général, pour n parts et g garnitures,

$$\mathrm{inv}(r_x) < \frac{x!}{\left(\frac{x}{g}!\right)^g}, \text{ en vertu du produit de coeff. binomiaux}$$

On voit que ce nombre d'invariants grandit avec x, or le plus grand x possible dans l'absolu est $\frac{n}{g}$

$$\mathrm{inv}(r_x) < \frac{x!}{\left(\frac{x}{g}!\right)^g} \leq \frac{\frac{n}{g}!}{\left(\frac{n}{g^2}!\right)^g}$$

On néglige les autres invariants.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\frac{n}{g}!}{\left(\frac{n}{g^2}!\right)^g}}{\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{g}!\right)^g}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\left(\frac{n}{g}!\right)}{n!}}{\dfrac{\left(\frac{n}{g^2}!\right)^g}{\left(\frac{n}{g}!\right)^g}}$$

Et pareil pour g ET n qui tendent vers l'infini.

Après l'utilisation de la règle de l'Hôpital, sur laquelle nous ne nous étendrons pas, on obtient que cette limite est égale à 0 (2). Ainsi, on peut dire que les nombres d'invariants deviennent négligeables pour n et g tendant vers l'infini, on obtiendra toujours un nombre extrêmement proche du résultat.
Notre formule devient :

$$\boldsymbol{N \sim \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{g}!\right)^g}}$$

3.2. Approximation de Stirling

Afin de simplifier les produits, on passe au logarithme :

$$\ln(N) \sim \ln\big((n-1)!\big) - g \ln\left(\frac{n}{g}!\right)$$

Dès lors, on peut utiliser l'approximation de Stirling (la preuve est laissée comme exercice au lecteur) (3):

$$x! \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^{x}$$

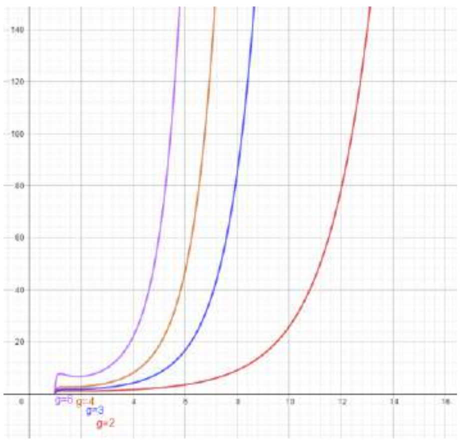
qui donne

$$\ln(x!) \sim \frac{\ln(2\pi x)}{2} + x\ln\left(\frac{x}{e}\right)$$

Ainsi,

$$\ln(N) \sim \frac{1}{2}\ln(2\pi(n-1)) + (n-1)\ln\left(\frac{n-1}{e}\right) - \frac{g}{2}\ln\left(2\pi\left(\frac{n}{g}\right)\right) - g\left(\frac{n}{g}\right)\ln\left(\frac{n}{ge}\right)$$

avec $N = e^{\ln(N)}$.



Nombre de pizzas (ordonnée) selon n (abscisse) pour plusieurs valeurs de g

Par exemple, on a calculé que $n = 42$ et $g = 3$ possède **50 489 825 378 826 050 possibilités**
L'approximation nous donne 51 295 009 597 568690 qui, même si elle n'est pas trop proche de la réalité, permet tout de même de connaitre l'ordre de grandeur du résultat.

Pour $n = 1\,000\,000\,000$ et $g = 1\,000\,000$, on obtient, selon l'approximation, environ $1.417486170058943 \times 10^{5\,998\,100\,905}$, un nombre possédant presque 6 milliards de chiffres.

Super ! Car pour rappel, le pizzaiolo de l'introduction au problème doit servir $1.4 \times 10^{5\,998\,100\,905}$ clients, donc il pourrait cuisiner chaque configurations possibles s'il les coupe en 1 milliard de parts et utilise 1 million de parts différentes.

Et aussi, pour n = 10^{100} *et* $g = 10^{99}$
$N \sim e^{10^{100}+1} \times 10^{99}$ *, ce nombre, bien que plus petit qu'un googleplex* ($= 10^{10^{100}}$)*, reste tellement grand qu'il est physiquement impossible d'écrire ce nombre dans son intégralité, même si l'on avait l'entièreté de l'univers observable comme tableau.*

Voilà de quoi satisfaire les résidents de l'hôtel de Hilbert...

4. Conclusion

Nous avons trouvé une formule générale qui doit probablement marcher pour tout nombre de parts et nombre de garnitures en analysant le dénombrement des pizzas en faisant attention aux rotations.

Le programme qui a prouvé la formule pour des petites valeurs a été fait sur Scratch puis en Python. Cependant, le nombre de cas à traiter devient juste beaucoup trop imposant, et ainsi le programme ne peut pas tous les compter dans un temps raisonnable. Il aurait été possible d'optimiser l'algorithme, par exemple en classant chaque pizza selon leur premières garnitures, et ainsi le programme n'aurait pas à vérifier absolument toutes les pizzas déjà trouvées, mais juste une portion, rangée à un endroit précis. Nous n'avons pas approfondi cette méthode, car nous pensons que la vérification de cas avec de petites valeurs est suffisante pour affirmer notre formule. De même pour la possibilité d'utiliser un autre langage de programmation comme C ou C++, nous ne jugeons pas cela nécessaire.

Nous aurions pu chercher des résultats pour des n ou g négatifs voir même complexes, mais cela a été jugé trop abstrait et nous n'y avons pas creusé.
Pareil pour des pizzas en dimensions supérieures, des cases sur une sphère qui respectent les même règles que les pizzas.

En général, nous avons aimé chercher sur notre problème mathématique, la coordination, la réflexion et le travail en équipe nous a vraiment passionnés.

Merci beaucoup à notre chercheur M. Panazzolo
et merci beaucoup d'avoir lu notre article.

Notes d'édition

(1) Pour préciser si besoin, $\mathrm{inv}(r_x)$ désigne le nombre de pizzas
– invariantes par une rotation de x parts,
– mais non invariantes par les rotations d'un plus petit nombre de parts,
– comptées sans identifier deux pizzas qui s'obtiennent l'une de l'autre par rotation.

(2) Il est difficile de comprendre comment on peut utiliser la règle de l'Hôpital pour évaluer cette limite. Par contre la formule de Stirling permet de le faire, au moins lorsqu'on fixe g. Il reste aussi à vérifier que le terme obtenu en ajoutant toutes les répartitions invariantes par rotation est négligeable.

(3) L'équivalence $x! \sim \sqrt{2\pi x}(x/e)^x$ signifie que le rapport $x!/\left(\sqrt{2\pi x}(x/e)^x\right)$ des deux termes tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$. La différence ne tend pas vers 0.

Prouver la formule de Stirling est à la rigueur accessible au niveau de la terminale mais suggérer au lecteur de le faire comme exercice, sans autre indication, semble être un simple trait d'humour.
On pourra trouver des démonstrations en ligne (par exemple ici : `https://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_stirling.pdf`).