

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

## Coloriages de cercles et polygones

Année 2023 – 2024

**Élèves de 3<sup>ème</sup>** : Amaury De Vismes-Ott, Tristan Pichon Pharabod et Alexis Robert.

**Établissement** : Collège Alain-Fournier d'Orsay.

**Enseignante** : Florence Ferry.

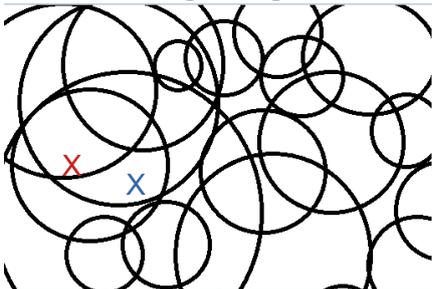
**Chercheur** : Emmanuel Kammerer, Ecole polytechnique Paris-Saclay.

### Le sujet

On trace des cercles dans le plan. La figure obtenue délimite des régions du plan. Deux régions sont dites adjacentes si elles ont au moins un arc de cercle en commun. Combien de couleurs au minimum faut-il pour colorier les régions de sorte que deux régions adjacentes soient de couleurs différentes ? Le résultat est-il encore vrai si on remplace les cercles par des carrés (et si on dit que deux régions sont adjacentes si elles sont séparées par une ligne de longueur non nulle) ? Et si on fait en sorte que l'intersection de deux côtés de carrés distincts soit ou bien vide, ou bien deux points ? Peut-on généraliser à d'autres polygones ?

### I – Coloriage des cercles

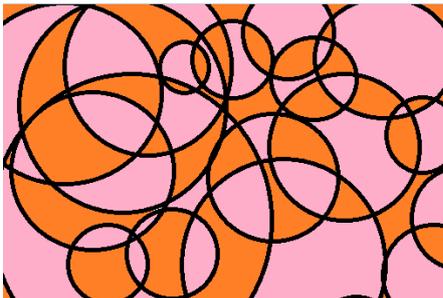
Voici un exemple de plusieurs cercles tracés dans le plan.



Les deux zones formées marquées d'une croix sont dites adjacentes : elles doivent être de couleurs différentes.

Combien faut-il de couleur au minimum ?

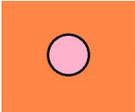
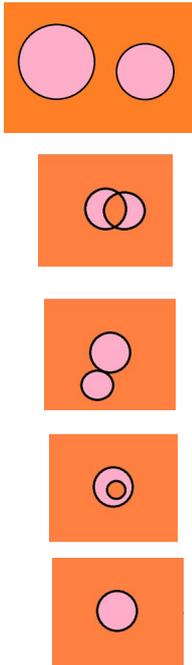
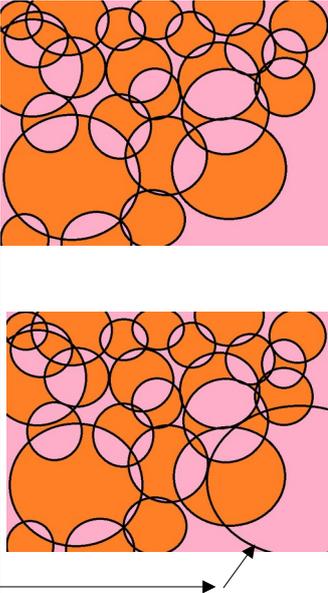
Nous avons réussi à colorier cette région avec simplement deux couleurs :



Sur d'autres exemples, deux couleurs suffisaient également.

**Propriété** : pour colorier une figure formée avec des cercles du plan, deux couleurs suffisent.

**Démonstration**

<p>- S'il n'y a qu'un cercle, deux couleurs suffisent ; la couleur 1 à l'intérieur du cercle et la couleur 2 à l'extérieur.</p>	
<p>- on ajoute un deuxième cercle. Trois cas sont à envisager :</p> <p>cas 1 : les deux cercles n'ont aucune intersection ; dans ce cas, le cercle ajouter pourra prendre la couleur 1 du premier cercle.</p> <p>cas 2 : les deux cercles se coupent en deux points ; dans ce cas, le cercle ajouter pourra prendre la couleur 1 du premier cercle excepté dans la zone appartenant aux deux cercles qui prend la couleur 2.</p> <p>Cas 3 : les deux cercles sont tangents. Le coloriages revient au cas 1.</p> <p>Cas 4 : Le deuxième cercle est entièrement intérieur au premier. Il prend alors la couleur 2 extérieure au premier cercle.</p> <p>Cas 5 : le cercle ajouté est confondu au premier ; il ne se passe rien.</p>	
<p>- Supposons qu'à une étape donnée, nous avons réussi à colorier la figure avec deux couleurs.</p> <p>On ajoute alors un cercle.</p>	

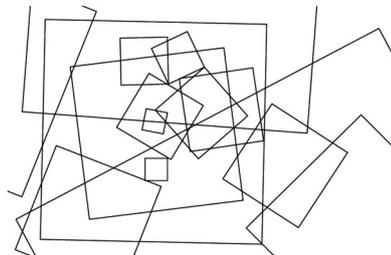
On inverse alors les couleurs 1 et 2 dans toutes les zones intérieures au cercle ajouté.

- A l'intérieur du cercle ajouté, il y avait deux couleurs donc, en les inversant, il n'y a toujours que deux couleurs.
- Pour les « bords » de ce cercle ajouté, nous retrouvons les cas que nous avons décrits ci-dessus, nous n'avons pas besoin d'ajouter de couleur différentes.

Conclusion : deux couleurs suffisent bien pour colorier une zone du plan constituée de cercles.

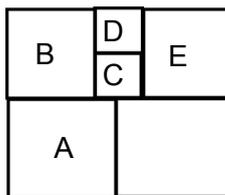
## II – Coloriage des carrés

Premier cas : l'intersection de deux carrés distincts est soit vide soit deux points.  
Exemple :

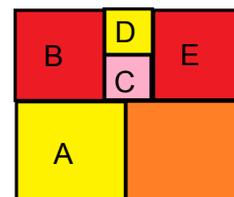


Pour ce cas de figure, la démonstration est identique à celle des cercles : il nous suffit de deux couleurs.

Deuxième cas : les régions adjacentes sont séparées par une ligne de longueur non nulle.  
Exemple :



On a dû utiliser quatre couleurs ici :



Démontrons qu'on ne peut pas utiliser moins de couleurs.

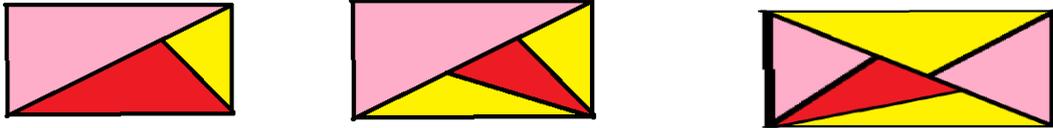
On considère la zone A indiquée sur la figure, coloriée avec la couleur 1. Les zones B et C sont adjacentes à A mais aussi entre elles ; il faut donc ajouter deux couleurs. La zone B est de couleur 2 et la C prend la couleur 3. La couleur de D ne peut être ni 2 ni 3 : elle a donc la couleur 1 (si on veut essayer d'avoir moins de quatre couleurs). La zone E prend alors la couleur 2. Il nous faut obligatoirement une couleur 4 pour la dernière zone.

Dans ce cas de configuration des carrés, nous n'avons pas trouvé une disposition qui nécessiterait plus de quatre couleurs ; mais nous n'avons pas réussi à le démontrer.

### III – Avec d’autres polygones

Dans cette partie, nous n’avons fait que des conjectures basées sur de nombreux exemples mais nous n’avons pas réussi à les démontrer.

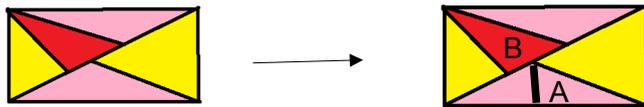
#### - Le triangle



Le maximum du nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier chaque configuration semble être de trois.

Début de démonstration :

Supposons qu’à une étape donnée, on ait trois couleurs. On ajoute un triangle, ce qui revient à joindre un sommet à un des côtés opposés. L’un des deux triangles formés ne touchera pas les trois couleurs en même temps, il pourra donc prendre la couleur non utilisée.

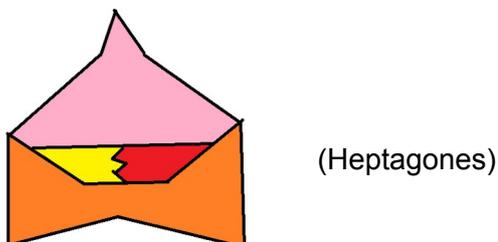
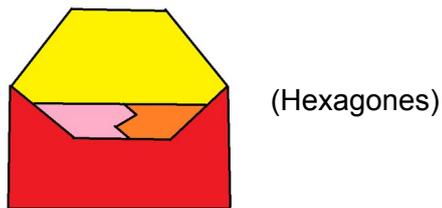
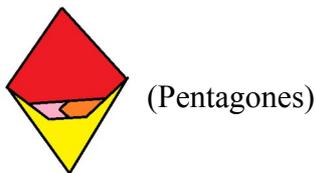


La zone A pourra prendre la couleur de la zone B.

#### - Autres polygones :

Pour les polygones ayant quatre côtés ou plus, nous avons conjecturé qu’il faut au maximum quatre couleurs pour colorier n’importe quelle configuration.

Voici quelques exemples :

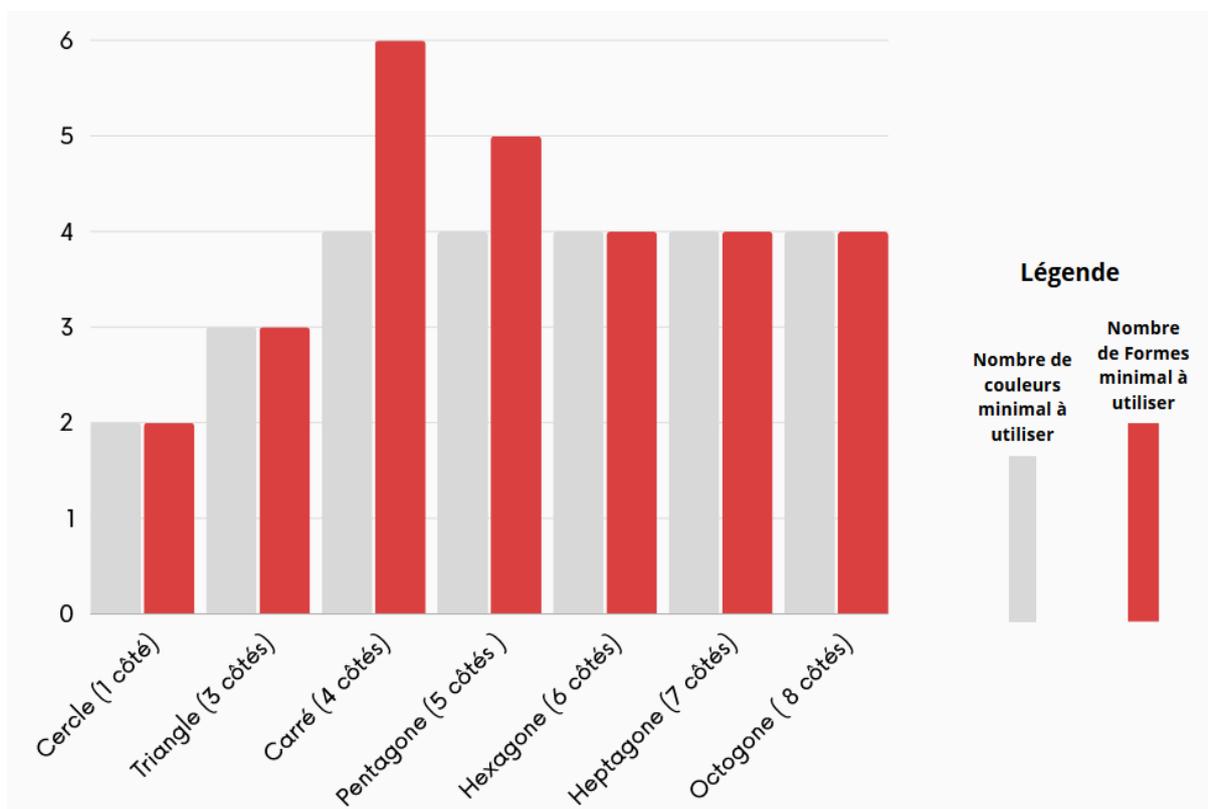


Voici pour finir un diagramme en bâtons représentant, pour des figures données formées avec un polygone donné (en abscisse) :

- En rouge : le nombre de polygones minimum qu'il faudra tracer pour utiliser le maximum de couleurs.

- En gris : le nombre de couleurs minimum qu'il nous faudra si on considère toutes les configurations possibles.

*Excepté pour le cercle et le carré, ce sont des conjectures.*



A delà de 8 côtés sur le polygones, ils semble que les résultats ne varient plus : il faut quatre couleurs minimum et quatre formes minimum pour les utiliser.