Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Année scolaire 2023-2024

Les Circuits électriques

FRANCOIS Valentin, DJATTIT Hocine, DJATTIT Nourdine.

LYCEE CLAUDE-GELLEE

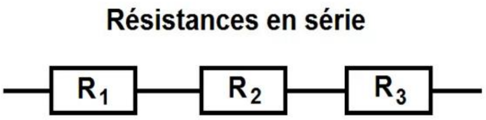
Présentation du sujet :

On dispose d'une très grande collection de résistances qui sont toutes identiques (1ohm). Pour fabriquer de nouvelles sortes de résistances, on peut soit placer des résistances en série, ou bien en parallèle.

1) Quelles valeurs de résistances peuvent être obtenues avec nos résistances de 1 ohm ?
2) Est-il possible de fabriquer une résistance qui aurait pour valeur 69/17 ohm ?
3) Si oui, comment utiliser le moins de résistances et quel est ce minimum ?

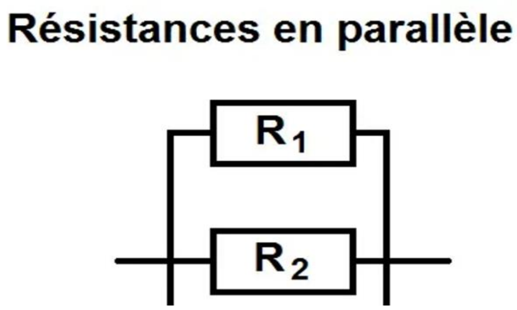
Les formules à connaître :

Calculs de résistance (en ohm) pour des résistances branchées en série :



$$R1+R2+R3=R(totale)$$

Calculs de résistance (en ohm) pour des résistances branchées en parallèle :



$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Testons maintenant plusieurs montages avec un nombre défini de résistances branchées de manière parallèles :

- Avec 2 résistances $R1 = 1ohm$ et $R2 = 1ohm$

$$\frac{R1 \times R2}{R1 + R2} = \frac{1 \times 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

- Avec 3 résistances, on prend le groupe des deux premières de résistance globale $R = \frac{1}{2}ohm$, on met $R3 = 1ohm$ en parallèle :

$$\frac{R \times R3}{R + R3} + \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

- Avec 4 résistances, on prend le groupe des trois premières de résistance globale $R' = \frac{1}{3}ohm$, on met $R4 = 1ohm$ en parallèle :

$$\frac{R' \times R4}{R' + R4} = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Conjecture :

Nous observons alors qu'à chaque fois que l'on rajoute une résistance, on ajoute 1 au dénominateur. Essayons de démontrer cela par récurrence.

Preuve par récurrence :

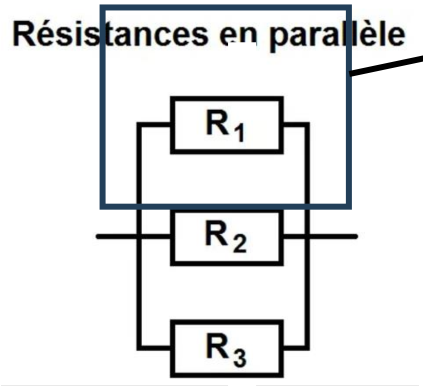
Nous allons démontrer que si on prend n résistances (en parallèles) de 1 ohm, la résistance globale R_n est de $\frac{1}{n}$ ohm

Initialisation : si on a 1 résistance, on a bien une résistance de 1 ohm

$$\mathrm{R1} = \frac{R1}{R1} = \frac{1}{1} = 1$$

Hérédité : on suppose qu'avec un certain nombre n de résistances branchées en parallèles, on obtient 1/n ohm.

On va donc montrer qu'avec n+1 résistances, on va obtenir une résistance totale de 1/(n+1) ohm.



Bloc de n résistances de 1ohm qui correspond à $R_n = \frac{1}{n}$ ohm

Nouvelle résistance de 1ohm.

$$R(n+1) = \frac{\frac{1}{n} \times 1}{\frac{1}{n} + 1} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1+n}{n}} = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, on a prouvé par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, un bloc de n résistance s de 1 ohm en parallèle aura une résistance globale de 1/n ohm.

<u>Quels nombres est-il possible de construire avec ces principes ?</u>

Ainsi, en branchant parallèlement des résistances de 1 ohm, on peut obtenir tous les nombres que peuvent s'écrire sous la forme $\frac{1}{\mathrm{n}}$.

En branchant en série des résistances de 1 ohm, on peut obtenir tous les nombres entiers naturels (N*).

Nous pouvons donc obtenir n'importe quel nombre qui puisse s'écrire sous la forme :

$$x + \frac{1}{n}$$

(x appartenant à N, n appartenant à N*)

<u>Exemple :</u>

Prenons par exemple le nombre $\frac{21}{20}$

Il peut s'écrire sous la forme : $\frac{20}{20} + \frac{1}{20}$ $= 1 + \frac{1}{20}$

Donc nous pouvons avoir cette valeur de résistance (avec des résistances de 1 ohm).

Une autre méthode : la division euclidienne

Prenons le même exemple que ci-dessus soit $\frac{21}{20}$.

Faisons la division euclidienne ; nous obtenons un quotient égal à 1, un reste égal à 1 et un diviseur égal à 20.

Le quotient est donc notre x, le diviseur notre n et notre reste est 1.

Est-il possible de fabriquer une résistance qui aurait pour valeur 69/17 ohm ?

$$\frac{69}{17} = \frac{68}{17} + \frac{1}{17} = 4 + \frac{1}{17}$$

D'après cette démonstration nous pouvons bien fabriquer une telle résistance.

Si oui, comment utiliser le moins de résistances et quel est ce minimum ?

1er modèle (sans optimisation) :

Nous pouvons fabriquer 69 fois une colonne de 17 résistances (qui a donc pour valeur 1/17 ohm) branchées en série. Nous obtenons bien alors une résistance totale de 69/17 ohm. (69 x (1/17) = 69/17)

2ème modèle (avec optimisation) :

D'après notre démonstration précédente, nous pouvons simplifier 69/17 par ceci : 4 + (1/17). Il nous suffit alors de brancher 4 résistances en série (ayant pour valeur totale 4 ohm) puis de branché 17 résistances en parallèle (ayant pour valeur 1/17). Nous obtenons alors bien la valeur voulue.