

Bonbons et noisettes

Année 2025 – 2026

Élèves de 4^{ème} : Noé LAVERNHE ; Mathis JOLY ; Daniel NGUYEN ; Abel LEROY.

Établissement : Collège Alain-Fournier à Orsay.

Enseignante : Florence FERRY

Chercheur : Vianney De La Salle, Ecole Polytechnique (CPAM)

Le sujet

Au goûter, Marius a le droit à un bonbon qu'il pioche dans un grand sac. Mais ses parents réalisent que manger autant de sucre, ce n'est pas raisonnable. Ils décident donc de rajouter des noisettes dans le sac. A chaque goûter, Marius pioche maintenant au hasard soit un bonbon, soit une noisette. Si c'est une noisette, alors les parents de Marius rajoutent deux nouvelles noisettes dans le sac ! Le pauvre Marius va-t-il pouvoir manger tous ses bonbons ?

Résultats

Nous avons démontré que quel que soit le nombre de noisettes dans le sac, lorsqu'il y a un ou deux bonbons dans le sac, Marius finira toujours par manger tous les bonbons.

I – Premiers exemples

Exemple : Dans le sac, il y a 1 bonbon et 3 noisettes.

Marius commence par piocher une noisette. Il y a une noisette de moins dans le sac mais ses parents en ajoute 2. Il y a maintenant 4 noisettes et 1 bonbon. Marius pioche à nouveau une noisette ; il y en a alors 5. Enfin, Marius pioche le bonbon. Il n'y en a plus ; il a donc réussi.

La question est de savoir si Marius piochera tous les bonbons du sac.

Nous avons testé de nombreux exemples simples ; lorsque le nombre de bonbons et de noisettes étaient très petits, on arrivait à chaque fois à ce que Marius prenne tous les bonbons. Mais dès qu'on augmente soit le nombre de bonbons soit le nombre de noisettes, l'expérience durait très longtemps sans aboutir.

On a eu alors l'idée de faire un programme Scratch pour tester des exemples plus complexes.

II – Programme Scratch

Le programme Scratch (en annexe) nous a aussi permis de faire rapidement de nombreux exemples. On a remarqué que Marius mangeait toujours tous ses bonbons, même si cela pouvait

durer très longtemps (parfois, pour un grand nombre de bonbons et de noisettes, le programme ne donnait pas de réponse). Grâce à tous les exemples testés qui ont abouti, nous avons pu émettre la conjecture que Marius allait toujours réussir à manger tous les bonbons.

III – Autre piste : le tableau de l’infini

Nous avons ensuite pensé à mettre les probabilités de tirage des bonbons et des noisettes dans un tableau à double entrée, pour visualiser l’évolution du problème au fur et à mesure des tirages, comme une plateforme de jeu vidéo sur laquelle on peut se déplacer.

Résultats :	1 bonbon	2 bonbons	3 bonbons	4 bonbons	5 bonbons	6 bonbons
1 noisette	$\frac{1}{2} \text{ ---- } \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} \text{ ---- } \frac{1}{3}$	$\frac{3}{4} \text{ ---- } \frac{1}{4}$	$\frac{4}{5} \text{ ---- } \frac{1}{5}$	$\frac{5}{6} \text{ ---- } \frac{1}{6}$	$\frac{6}{7} \text{ ---- } \frac{1}{7}$
2 noisettes	$\frac{1}{3} \text{ ---- } \frac{2}{3}$	$\frac{2}{4} \text{ ---- } \frac{2}{4}$	$\frac{3}{5} \text{ ---- } \frac{2}{5}$	$\frac{4}{6} \text{ ---- } \frac{2}{6}$	$\frac{5}{7} \text{ ---- } \frac{2}{7}$	$\frac{6}{8} \text{ ---- } \frac{2}{8}$
3 noisettes	$\frac{1}{4} \text{ ---- } \frac{3}{4}$	$\frac{2}{5} \text{ ---- } \frac{3}{5}$	$\frac{3}{6} \text{ ---- } \frac{3}{6}$	$\frac{4}{7} \text{ ---- } \frac{3}{7}$	$\frac{5}{8} \text{ ---- } \frac{3}{8}$	$\frac{6}{9} \text{ ---- } \frac{3}{9}$
4 noisettes	$\frac{1}{5} \text{ ---- } \frac{4}{5}$	$\frac{2}{6} \text{ ---- } \frac{4}{6}$	$\frac{3}{7} \text{ ---- } \frac{4}{7}$	$\frac{4}{8} \text{ ---- } \frac{4}{8}$	$\frac{5}{9} \text{ ---- } \frac{4}{9}$	$\frac{6}{10} \text{ ---- } \frac{4}{10}$
5 noisettes	$\frac{1}{6} \text{ ---- } \frac{5}{6}$	$\frac{2}{7} \text{ ---- } \frac{5}{7}$	$\frac{3}{8} \text{ ---- } \frac{5}{8}$	$\frac{4}{9} \text{ ---- } \frac{5}{9}$	$\frac{5}{10} \text{ ---- } \frac{5}{10}$	$\frac{6}{11} \text{ ---- } \frac{5}{11}$
6 noisettes	$\frac{1}{7} \text{ ---- } \frac{6}{7}$	$\frac{2}{8} \text{ ---- } \frac{6}{8}$	$\frac{3}{9} \text{ ---- } \frac{6}{9}$	$\frac{4}{10} \text{ ---- } \frac{6}{10}$	$\frac{5}{11} \text{ ---- } \frac{6}{11}$	$\frac{6}{12} \text{ ---- } \frac{6}{12}$

Voici les règles de déplacement :

- On commence dans une des cases du tableau.
- Dans chaque case, il y a la probabilité de piocher un bonbon et celle de piocher une noisette.
 - Si nous piochons une noisette, nous allons en bas.
 - Si nous piochons un bonbon, nous allons à gauche.

Le but étant de piocher tous les bonbons, il faut sortir du tableau par la gauche. On remarque que nous ne pouvons que descendre (à chaque tirage le nombre de noisette reste le même ou augmente de 1) ou aller vers la gauche (on ne peut pas ajouter de bonbon donc leur nombre reste le même ou diminue). En somme, nous ne ferons que nous rapprocher du but et on peut penser que à un moment on arrivera à sortir du tableau, c’est à dire que Marius aura un jour mangé tous ses bonbons .

La conjecture est posée avec le programme Scratch et le tableau de l’infini : peu importe le nombre de bonbons et de noisettes dans le sac, Marius arrivera à manger tous les bonbons. Il nous reste à démontrer notre conjecture.

IV – Démonstration – Arbres de probabilités

Nous allons utiliser des arbres de probabilités pour calculer la probabilité à chaque étape de tirer un bonbon ou une noisette. Nous avons besoin d’une propriété et de notations pour la suite de notre article.

Propriété : La somme de la probabilité de piocher une noisette et de la probabilité de piocher

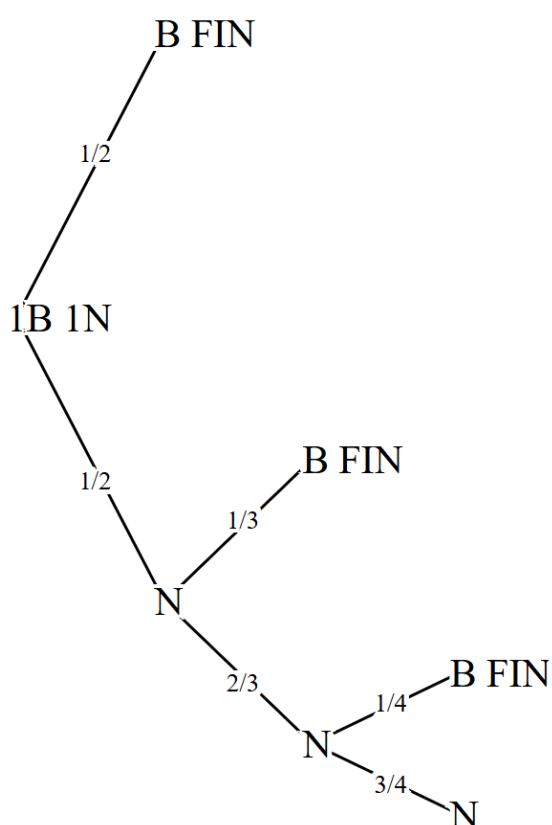
un bonbon est égale à 1 à chaque étape.

Notations : n est le nombre de noisettes, b , le nombre de bonbons et i , le nombre de fois où Marius a pioché dans son sac (ce qui correspond au nombre de goûters). $P(b)$ est la probabilité de piocher tous les bonbons, $P(n)$, celle de piocher toutes les noisettes et P_i sera la probabilité étudiée au i -ème goûter.

1) $b = 1$

a) cas 1 : $n = 1$.

Voici l'arbre de probabilité : B veut dire que Marius a pioché un bonbon et N signifie qu'il a pioché une noisette. Dès que Marius pioche le bonbon, c'est terminé.



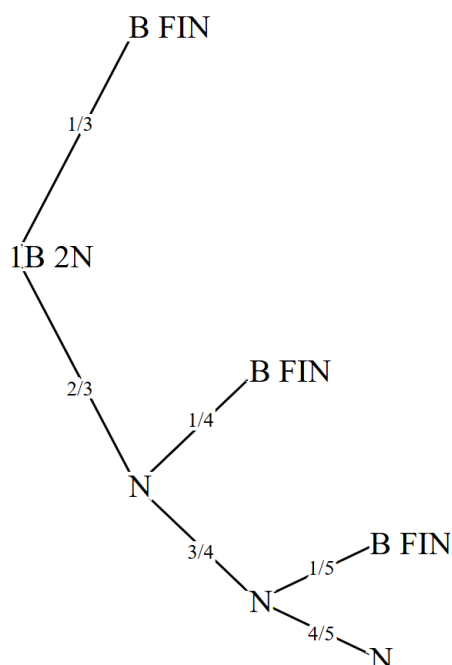
Calculer la probabilité d'avoir le bonbon paraît difficile à calculer donc on va calculer la probabilité de l'événement contraire : ne piocher que des noisettes.

$$P_1(n) = \frac{1}{2}; P_2(n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}; P_3(n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}; \dots; P_i(n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{i}{i+1} = \frac{1}{i+1}$$

On a : $P_i(n) = 1 - P_i(b)$

Lorsque i devient de plus en plus grand, $\frac{1}{i+1}$ se rapproche de plus en plus de 0 et donc $P_i(n) = 1 - P_i(b)$ se rapproche de plus en plus de 1. Donc Marius finira, dans ce cas par avoir son bonbon. [1]

b) cas 2 : $n = 2$.



Nous faisons un raisonnement identique au précédent ; nous calculons la probabilité de ne tirer que des noisettes.

$$P_1(n) = \frac{2}{3} ; P_2(n) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{4} ; P_3(n) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5} ; \dots ; P_i(n) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{i+1}{i+2} = \frac{2}{i+2}$$

$$\text{On a : } P_i(n) = 1 - P_i(b)$$

Lorsque i devient de plus en plus grand, $i + 2$ aussi et $\frac{2}{i+2}$ se rapproche de plus en plus de 0 et donc $P_i(n) = 1 - P_i(b)$ se rapproche de plus en plus de 1.

Dans ce cas également, Marius piochera son bonbon.

c) Nous avons augmenté le nombre de noisettes mais toujours avec la même conclusion.

$$\text{Pour } n = 3 : P_i(n) = \frac{3}{i+3}$$

$$\text{Pour } n = 4 : P_i(n) = \frac{4}{i+4}$$

$$\text{Pour } n = k : P_i(n) = \frac{k}{i+k}$$

Lorsque i devient très grand, le dénominateur devient très grand et la probabilité de ne tirer que des noisettes se rapproche de 0 ; la probabilité de tirer le bonbon se rapproche donc de 1.

Conclusion : S'il n'y a qu'un seul bonbon dans le sac, peu importe le nombre de noisettes, Marius le piochera.

Nous allons maintenant augmenter le nombre de bonbons.

2) $b = 2$

cas 1 : $n = 1$.

Lorsqu'on calcule cette probabilité, ce calcul commence par $\frac{n}{n+b}$. Puis, si on reste sur la branche où on ne tire que des noisettes, le nombre de bonbons reste le même mais le nombre de noisette et donc le nombre total d'ingrédients dans le sac, augmente de 1. Le facteur suivant est donc $\frac{n+1}{n+b+1}$ et ainsi de suite.

A l'étape i , des simplifications vont se faire et il nous restera un produit de facteurs, un nombre donné au numérateur, qui ne dépendra pas de i et au dénominateur, un produit qui dépend de i et qui fera que la probabilité de ne tirer que des noisettes tend vers 0 alors que celle de tirer tous les bonbons tend vers 1. [2]

Nous n'avons pas réussi à le démontrer mais nous pensons, avec toutes ces remarques que, peu importe le nombre de bonbons et de noisettes dans le sac, Marius finira toujours par manger tous les bonbons même si cela peut être très long ! [3]

Pour finir... Un peu d'humour.

Nous avons aussi évoqué la possibilité que :

- le sac explose.
- Marius meure ou quitte la maison de ses parents avant qu'il ait mangé tous ses bonbons.
- Marius reconnaisse les bonbons au toucher.

Remerciements.

Tout d'abord, nous voulons remercier notre professeure de Mathématiques, Mme FERRY, qui nous a permis de nous inscrire à cet atelier de recherche et qui nous a aidé tout le long de l'année. Ensuite, notre chercheur, Vianney, qui nous a proposé des problèmes et qui est venu nous aider dans notre recherche ; mais aussi l'association MATH.en.JEANS, car sans elle, il ne serait rien passé. Enfin nous voudrions te remercier toi, lecteur, d'être arrivé jusqu'au bout de notre article et d'avoir pris le temps de le lire...

Annexes

1 – Programme Scratch



Notes d'Édition

[1] Il faudrait cependant observer que cette conclusion repose sur le fait (admis en Théorie des Probabilités) que la probabilité de l'intersection infinie d'événements (tirer toujours N) est égale à la limite des probabilités (de tirer N) jusqu'au i -ième tirage.

Il faudrait également observer que ce résultat ne donne aucune information sur le temps au bout duquel B sera tiré.

[2] Cette observation est correcte. Formellement, on peut procéder comme suit.

Désignons par $P_i(N)$ la probabilité que, lors des premières i extractions, on obtienne toujours une noisette (N). Nous avons donc

$$P_i(N) = \frac{n}{n+b} \cdot \frac{n+1}{n+b+1} \cdot \dots \cdot \frac{n+i-1}{n+b+i-1}$$

Il faut toutefois garder à l'esprit que i est, à partir d'un certain rang, supérieur à $b+1$. Pour ces valeurs de i nous pouvons donc écrire

$$P_i(N) = \frac{n}{n+b} \cdot \frac{n+1}{n+b+1} \cdot \dots \cdot \frac{n+b}{n+b+b} \cdot \frac{n+b+1}{n+b+b+1} \cdot \dots \cdot \frac{n+i-1}{n+b+i-1}$$

En observant qu'à partir de la valeur $n+b$ du numérateur, tous les termes se simplifient avec les termes initiaux du dénominateur, on peut écrire

$$P_i(N) = \frac{n(n+1) \dots (n+b-1)}{(n+i)(n+i+1) \dots (n+b+i-1)}$$

D'où il suit que $\lim_{i \rightarrow \infty} P_i(N) = 0$. On peut remarquer que l'idée de base de cette démonstration est la même que celle vue plus haut pour $b=2$. Avec b générique, tout est évidemment plus compliqué, mais pas sur le plan conceptuel.

[3] La démonstration vue plus haut répond à la question de savoir si Marius parvient à manger UN bonbon. Pour savoir si Marius mangera TOUS les bonbons, il faut considérer l'ensemble de l'arbre des possibilités, mais l'idée de base reste toujours la même.