Chemins sur une grille

Année 2023 – 2024

Maxime Paralieu, Raphaël Roche, Dylan Amrous

Élèves de classe de 2nd

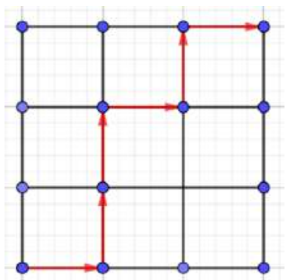
Établissement(s) : Lycée Blaise Pascal

Enseignant·e(s) : Prénom Nom, Prénom Nom, …

Chercheur·Chercheuse(s) : Prénom Nom, Labo.

Présentation du sujet

On imagine une grille carrée de n*n cases allant d'un point de départ en bas à gauche à un point d'arrivée en haut à droite. En supposant que l'on ne puisse aller que vers la droite et le haut :
-Combien existe-t-il de chemins allant du départ à l'arrivée ?
-Combien existe-t-il de chemins si on ne peut passer que dans la moitié nord-ouest de la grille ?
-Combien existe-t-il de chemins sur une grille rectangle de côtés n et k avec n et k quelconques ?



Nos débuts

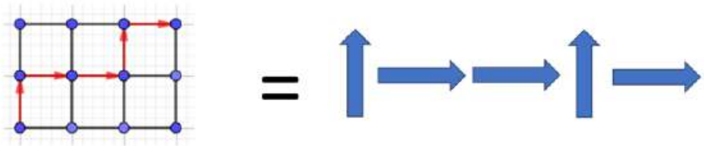
On a d'abord commencé par chercher le nombre de chemins différents à la main pour des petites valeurs de n.
Par exemple, pour n=2 on a trouvé 6 chemins, et pour n=3 on en a trouvé 20.

On a fait la même chose pour une grille rectangle avec des petites valeurs de n et k.
Par exemple, pour n=2 et k=3 on a 10 chemins différents.

Après quelques essais, on s'est rendu compte que notre méthode n'était pas très efficace, et qu'avec des plus grandes valeurs, trouver le nombre de chemins différents prendrait beaucoup trop temps et on ne serait pas à l'abri de commettre des erreurs. Il faut donc que l'on trouve une formule permettant de calculer le nombre chemins.

La formule

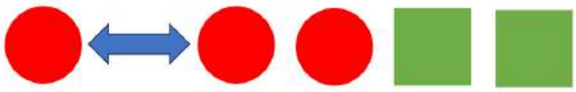
Imaginons que l'on remplace chaque mouvement sur la grille par une flèche allant vers le haut ou vers la droite. Un chemin est alors représenté par une unique manière de ranger ces flèches. Pour trouver le nombre de chemins total, il faut donc trouver le nombre de manières possibles de ranger les flèches entre elles.



Nous allons vous expliquez comment nous avons trouvé la formule à l'aide d'un exemple.
Imaginons que l'on est ces objets-ci :

Tout d'abord, si l'on souhaite placer un objet, il n'y a qu'une seule manière car les autres n'ont pas encore été placés. Ensuite, pour placer un deuxième objet, on a deux possibilités : soit à gauche du premier, soit à droite. Enfin, si on veut en placer un troisième, on a 3 possibilités (tout à gauche, entre les deux premiers, tout à droite).
On en déduit donc qu'à chaque fois que l'on place un nouvel objet, il y a un emplacement supplémentaire pour le suivant. Pour n objet, on aurait donc 1*2*3*…*n autrement dit n! possibilités.

Cependant, quand plusieurs objets sont identiques, on peut les intervertir sans changer la disposition apparente.



Dans ce cas, si on intervertit deux ronds rouges entre eux, on voit bien que la disposition reste la même. Comme on vient de le voir précédemment, il y a trois ronds rouges, donc 3! manières de les ranger et donc il existe 3! ordres identiques pour chaque manière de ranger les autres objets. On peut aussi intervertir les carrés.
Pour ne garder que les manières non identiques de ranger ces objets, il faut donc diviser le nombre de manières total par le nombre de manières identiques.

La formule pour calculer le nombre de manière de ranger x objets dont y et z sont identiques est :

$$\frac{x!}{y! \times z!}$$

Réponse à certaines des questions

Maintenant, revenons au problème.
On commence par le cas du rectangle. Celui-ci est de longueur k et de largeur n. Il faudra donc, peut importe le chemin pris, aller k fois vers le haut et n fois vers la droite. En remplaçant les déplacements par des flèches, on obtient ainsi k flèches verticales identiques, n flèches horizontales identiques et donc k+n flèches au total.
D'après la formule précédente, on a donc :

$\frac{(k+n)!}{k! \times n!}$ chemins possibles

On peut ainsi en déduire le nombre de chemins pour un carré de côté n :

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

La dernière question

Maintenant que l'on a répondu aux deux premières questions, il nous reste encore la dernière : Combien existe-t-il de chemins si on ne peut passer que dans la moitié nord-ouest de la grille ?

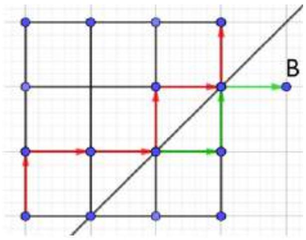
Après avoir cherché à la main le nombre de chemins possibles pour des petites valeurs de n, nous avons trouvé une relation qui pourrait être intéressante.
En effet, en comparant les nombres de possibilités avec et sans la diagonale, on se rend compte que le nombre de possibilités est divisé par n+1 lorsqu'on ajoute la diagonale.

Valeur de n	Nombre de chemins sans diagonale	Nombre de chemins avec diagonale
0	1	1
1	2	1
2	6	2
3	20	5

On conjecture donc que le nombre de chemins avec la diagonale est égal à celui sans la diagonale, divisé par n+1 :

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \div (n+1)$$

Puisqu'on connait le nombre de chemins totaux, le nombre de chemins ne coupant pas la droite est donc le nombre de chemins totaux moins le nombre de chemins coupant la droite. Pour calculer le nombre de chemins coupant la droite, on va remplacer ces chemins par leurs symétriques à partir du moment où ils coupent la droite pour la première fois.



Avant de couper la diagonale, le chemin va une fois de plus vers la droite que vers le haut. Après l'avoir coupé, il monte donc une fois de plus vers le haut que vers la droite. Cependant, avec le symétrique, quand il coupe la droite, le chemin va une fois de plus à droite que vers le haut. Avec le symétrique, on tombera donc toujours sur le point B.

Le nombre de chemins coupant la droite correspond donc au nombre de chemins allant jusqu'au point B. A partir d'un carré de côté n, on monte n-1 fois et on va n+1 fois vers la droite pour atteindre le point B.
Le nombre de chemins coupant la droite est donc :

$$\frac{(n+1+n-1)!}{(n+1)!\,(n-1)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$$

Le nombre de chemins ne coupant pas la droite est donc le nombre de chemins totaux moins le nombre trouvé, soit :

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$$

Cependant, le résultat est plus compliqué que le celui conjecturé. On essaie donc de simplifier :

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)! \times n! \times (n+1)}$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)! \times n}{n! \times (n-1)! \times n \times (n+1)}$$

$$\frac{(2n)!\,(n+1)}{(n!)^2(n+1)} - \frac{(2n)! \times n}{(n!)^2 \times (n+1)}$$

$$\frac{(2n)!\,(n+1) - (2n)! \times n}{(n!)^2 \times (n+1)}$$

$$\frac{(2n)!\,(n+1-n)}{(n!)^2 \times (n+1)}$$

$$\frac{(2n)! \times 1}{(n!)^2} \div (n+1)$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \div (n+1)$$

La conjecture est donc vraie, le nombre de chemins ne coupant pas la diagonale pour un quadrillage carré de côté n est :

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \div (n+1)$$

Merci d'avoir lu cet article jusqu'au bout. On espère qu'il vous a plu.
On aimerait également remercier nos professeurs et notre chercheuse qui nous ont aidé tout au long de l'année pour résoudre ce sujet.