Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

En route vers le Chaos

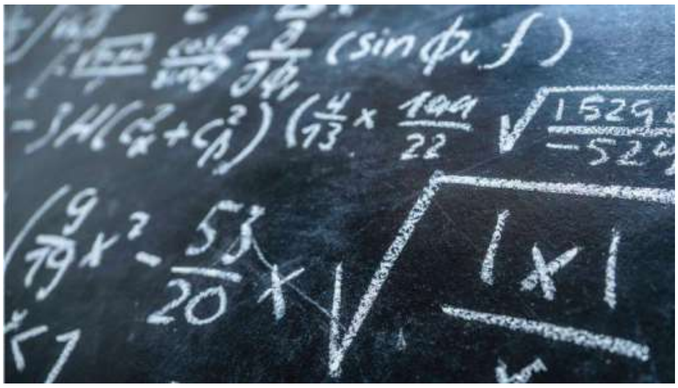
Année 2023-2024

Evaéna Maillard, Katia Duffis, Neyla Chkir (Terminale)

Établissement : Lycée Caroline Aigle

Chercheur : Damien Gobin, Université de Nantes

Enseignant : David Gréau



Sommaire

1. Le Sujet

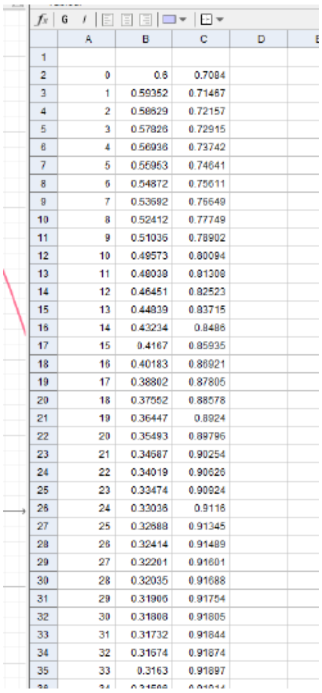
On considère un nombre réel $a > 0$, et on fixe un réel x_0. On construit alors une suite de nombres en calculant, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 1 - a\, x_n^2$. Pour des valeurs de a proches de zéro, on peut voir assez facilement que la suite de nombres se comporte très simplement. Plus la valeur de a augmente, plus ça se complique, pour arriver à une situation chaotique. On se propose d'essayer de tester ce phénomène numériquement, grâce à un calcul sur ordinateur, et de justifier ensuite certains phénomènes observés.

Pour cela nous allons voir que :

- La suite est définie par récurrence à l'aide d'une fonction continue qui laisse stable l'intervalle $[0,1]$ (1).
- La monotonie de la suite va dépendre de la monotonie de f (et donc potentiellement de la valeur de a) et du terme initial de la suite.
- Si la suite converge ce sera vers un point fixe de f et si les sous-suites d'indices pairs et impairs convergent ce sera vers un point fixe de $f \circ f$
- On cherche donc à résoudre, dans le cas de l'étude des sous-suites, l'équation $f \circ f(x) = x$ ce qui mène à une équation polynomiale de degré 4 dont les racines, et donc la convergence de ces sous-suites et ainsi la nature de la suite (u_n), dépendent de la valeur de a.

2. Observations

Nos outils d'observations



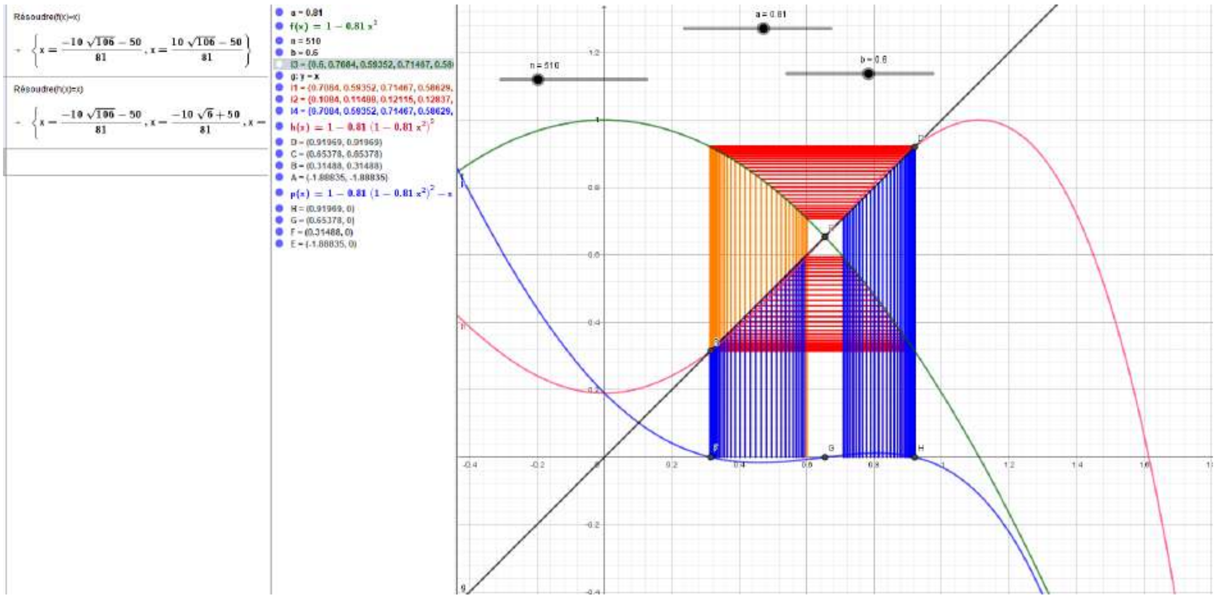
	A	B	C	D
1				
2	0	0.6	0.7084	
3	1	0.59352	0.71467	
4	2	0.58629	0.72157	
5	3	0.57826	0.72915	
6	4	0.56936	0.73742	
7	5	0.55953	0.74641	
8	6	0.54872	0.75611	
9	7	0.53692	0.76649	
10	8	0.52412	0.77749	
11	9	0.51036	0.78902	
12	10	0.49573	0.80094	
13	11	0.48038	0.81308	
14	12	0.46451	0.82523	
15	13	0.44839	0.83715	
16	14	0.43234	0.8486	
17	15	0.4167	0.85935	
18	16	0.40183	0.86921	
19	17	0.38802	0.87805	
20	18	0.37552	0.88578	
21	19	0.36447	0.8924	
22	20	0.35493	0.89796	
23	21	0.34687	0.90254	
24	22	0.34019	0.90626	
25	23	0.33474	0.90924	
26	24	0.33036	0.9116	
27	25	0.32688	0.91345	
28	26	0.32414	0.91489	
29	27	0.32201	0.91601	
30	28	0.32035	0.91688	
31	29	0.31906	0.91754	
32	30	0.31808	0.91805	
33	31	0.31732	0.91844	
34	32	0.31674	0.91874	
35	33	0.3163	0.91897	

Nous avons pu observer le comportement de cette suite grâce à plusieurs outils :

- La modélisation de suite sur calculatrice
- Une feuille de tableur. Il était alors compliqué de voir les limites de la suite car les valeurs étaient très proches sans être égales.

NOTRE OUTIL PRINCIPAL

- Graphique Geogebra modélisant la courbe $f(x) = 1 - ax^2$ et la courbe $g(x) = x$ afin d'obtenir la valeur des termes de la suite en fonction du premier terme x_0, ici noté b (2).



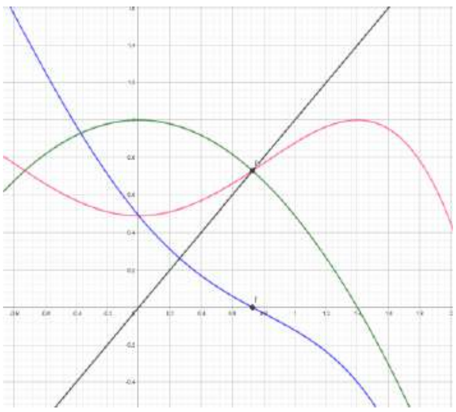
❖ Comportement de la suite

Pour toutes nos observations, $b = x_0 = 0{,}6$

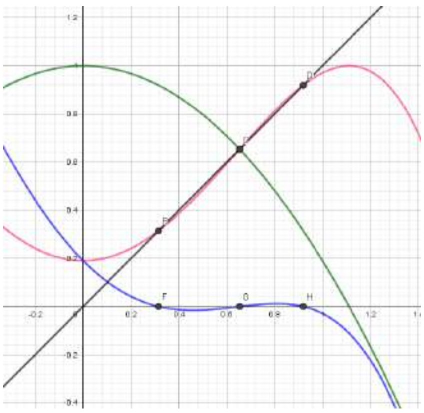
- Pour $0 < a \ \leq\ 1$ et $0\ \leq x_0\ \leq 1$ tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[0; 1]$.
- La suite converge pour une valeur de $a \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$ (au départ, nous pensions que c'était 0,748)
- Pour $a\ > \frac{3}{4}$, la suite n'est plus convergente. La suite des termes d'indices pairs converge vers un nombre réel et la suite des termes d'indices impairs vers un autre nombre réel.

❖ Comportement des fonctions

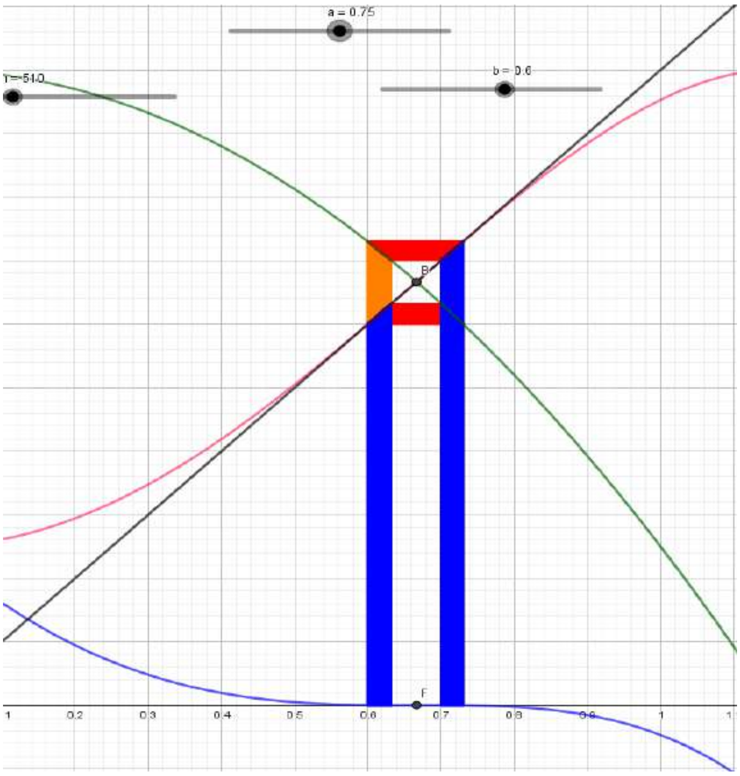
On pose h la fonction telle que $h(x) = f(f(x))$ pour $x\ \epsilon\ [0; 1]$. La courbe représentative de cette fonction admet un seul point d'intersection avec la courbe $y = x$ dans l'intervalle $[0; 1]$ pour $0 < a \leq 0{,}75$. Pour de plus grandes valeurs de a, elle admet 3 trois points d'intersection.



$a < 0{,}75$



$a > 0{,}75$



$a = 0{,}75$

3. Démonstrations

❖ La suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$

Nous aimerions démontrer que la suite ne sort pas de l'intervalle $[0; 1]$ pour un $a \in [0; 1]$. Pour ceci, nous utilisons un raisonnement par récurrence:

Posons $x_0 \in [0; 1]$ et $0 \leq a \leq 1$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété: "$0 \leq x_n \leq 1$"

Initialisation
Pour $n = 0$, on pose $0 \leq x_0 \leq 1$. La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité
Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un certain entier n. On a, d'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq x_n \leq 1$.
Or la fonction $f: x \to 1 - ax^2$ est une fonction décroissante sur $[0; 1]$. D'où

$$f(0) \geq f(x_n) \geq f(1)$$

$$1 \geq x_{n+1} \geq 1 - a$$

or $0 \leq a \leq 1$ donc $1 - a \geq 0$, soit

$$0 \leq 1 - a \leq x_{n+1} \leq 1$$

La propriété $P(n + 1)$ est alors vraie.

Conclusion
La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❖ Étude de la fonction h

Pour la suite de nos démonstrations, nous aurons besoin des variations de la fonction h définie pour $x \in [0;1]$ par $h(x) = f(f(x))$ soit $h(x) = 1 - a(1 - ax^2)^2$.

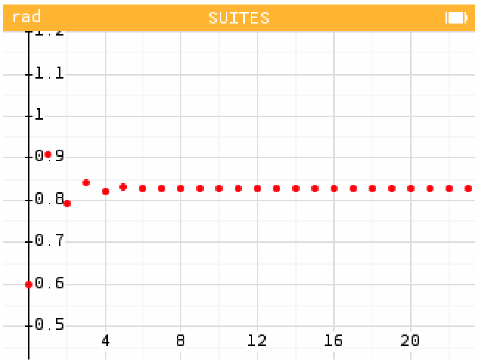
Pour cela, étudions la fonction f :

Soit f' la dérivée de f : $f'(x) = -2ax$. Or $x_0 \in [0,1]$ et $0 \leq a \leq 1$ donc $f'(x) \leq 0$.

Ainsi, f est décroissante sur $[0,1]$.

Sachant que la fonction h est la composée de la fonction f par elle-même, elle est la composée de deux fonctions strictement décroissantes donc elle est strictement croissante sur $[0,1]$.

❖ Etude de la suite pour $a < 0,75$



➢ Etude d'un cas particulier

Posons $a = \frac{1}{4}$ et $x_0 = 0,6$

Pour tout réel x,

$$h(x) = f(f(x))$$

Ainsi $h(x) = 1 - a(1 - ax^2)$.

Et donc $h(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note (u_n) la suite des termes d'indice pair de la suite (x_n).
  (u_n) est définie par $u_{n+1} = h(u_n)$ et $u_0 = x_0 = 0,6$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note (v_n) la suite des termes d'indice impair de la suite (x_n).
  (v_n) est définie par $v_{n+1} = h(v_n)$ et $v_0 = x_1 = 0,91$.

Observons la suite (u_n)

D'après les premiers termes, la suite (u_n) semble croissante: $u_0 = 0,6$, $u_1 = 0,79$, $u_2 = 0,82$ ...

D'après la partie précédente, la suite reste dans l'intervalle $[0;1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a. Ainsi, (u_n) est majorée par 1.

Prouvons le par un raisonnement par récurrence :
Pour $n \in N$, notons $P(n)$, la propriété : "$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$".

Initialisation
Pour $n = 0$, $u_0 = 0,6$ et $u_1 = h(u_0) = 0,79$ soit $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$.
La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité
Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un certain entier n.

On a	$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$	d'après l'hypothèse de récurrence
	$h(0) \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(1)$	car la fonction h est croissante sur $[0;1]$.
Donc	$0 \leq \frac{3}{4} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{55}{64} \leq 1$.	

La propriété $P(n+1)$ est alors vraie.

Conclusion
La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (3).

On vient alors de démontrer que la suite (u_n) est donc croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite converge ainsi vers une limite $0 \leq L_0 \leq 1$.

En conclusion :

- La suite (u_n) converge vers une limite $0 \leq L_0 \leq 1$.
- Elle est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$.
- La fonction h est une fonction polynôme de degré 4, c'est donc une fonction continue.

Ainsi, d'après le théorème du point fixe, la limite L_0 est un point fixe de la fonction h soit une solution de l'équation $h(x) = x$.

Observons la suite (v_n)

D'après les premiers termes de la suite (v_n) la suite semble décroissante : $v_0 = 0{,}91$, $v_1 = 0{,}84$, $v = 0{,}83$ ...
D'après la partie précédente, la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a.
Ainsi, (v_n) est minorée par 0.

Prouvons le par un raisonnement par récurrence.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$, la propriété : "$0 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1$".

Initialisation
Pour $n = 0$, $v_0 = 0{,}91$ et $v_1 = h(v_0) = 0{,}84$ soit $0 \leq v_1 \leq v_0 \leq 1$.
La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité
Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un certain entier n.

On a : $0 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1$ d'après l'hypothèse de récurrence

$h(0) \leq h(v_{n+1}) \leq h(v_n) \leq h(1)$ car la fonction h est croissante sur $[0; 1]$.

Donc $0 \leq \frac{3}{4} \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq \frac{55}{64} \leq 1$

La propriété $P(n+1)$ est alors vraie.

Conclusion
La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vient alors de démontrer que la suite (v_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite converge ainsi vers une limite $0 \leq M_0 \leq 1$.

En conclusion

- La suite (v_n) converge vers une limite $0 \leq M_0 \leq 1$.
- Elle est définie par récurrence par $v_{n+1} = h(v_n)$.
- La fonction h est une fonction polynôme de degré 4, c'est donc une fonction continue.

Ainsi, d'après le théorème du point fixe, la limite M_0 est un point fixe de la fonction h, M_0 vérifie $h(M_0) = M_0$.

Trouvons les limites L_0 et M_0

$$h(x) = x \Leftrightarrow 1 - a(1 - ax^2)^2 = x \Leftrightarrow \frac{-1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4} = x \Leftrightarrow \frac{-1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{3}{4} = 0$$

Pour résoudre cette équation, étudions la fonction d définie par

$$d(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{3}{4}$$

d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est donnée par $d'(x) = \frac{-x^3+4x-16}{16}$.

Nous avons besoin du signe de cette dérivée pour $x \in [0; 1]$. Pour cela, nous cherchons ses variations sur $[0; 1]$. Introduisons alors la dérivée seconde de d :

$$d''(x) = \frac{-3x^2 + 4}{16}$$

Pour $x \epsilon [0; 1]$, $-3x^2 + 4 > 0$ donc $d''(x) > 0$. Dans ce cas, d' est croissante sur $[0;\ 1]$ donc les images de x dans cet intervalle par la fonction dérivée sont inférieures à l'image de 1 : $d'(x) \leq d'(1)$. Or $d'(1) = -\frac{13}{16}$. D'où $d'(x) \leq -\frac{13}{16} < 0$ donc d' est négative sur $[0; 1]$ et la fonction d est décroissante.

On obtient alors le tableau :

x	0	1
Signe de $d'(x)$	$-$	
Variations de $d(x)$	$\frac{3}{4}$ $\searrow$	$-\frac{9}{64}$

- La fonction d est une fonction continue comme fonction polynôme.
- La fonction d est strictement décroissante sur $[0; 1]$.
- $f(0) = \frac{3}{4}$, $f(1) = -\frac{9}{64}$ et $0 \in \left[-\frac{9}{64}; \frac{3}{4}\right]$

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $d(x) = 0$ et donc $h(x) = x$ admet une seule solution sur $[0; 1]$. La fonction $h(x)$ n'admet alors qu'un seul point fixe dans l'intervalle. En conclusion, $L_0 = M_0$ donc les sous-suite (u_n) et (v_n) convergent vers une seule et même limite. La suite (x_n) converge donc.

Cherchons la valeur de M_0 et L_0, les solutions à $h(x) = x$, ou bien $d(x) = 0$.

$$d(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{3}{4} = 0$$

On se retrouve face à un polynôme de degré 4. Or si on trouve les solutions à $f(x) = x$ alors, on aura déjà 2 racines du polynôme d. Car si $f(x) = x$ on a également $f(f(x)) = f(x) = x$.

On résout alors :

$$\begin{aligned} f(x) = x \ &\Leftrightarrow \ 1 - \tfrac{1}{4}x^2 = x \Leftrightarrow -\tfrac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow -((x+2)^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow -((x+2)^2 - (2\sqrt{2})^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow -(x - 2\sqrt{2} + 2)(x + 2\sqrt{2} + 2) = 0 \Leftrightarrow x \epsilon \{2\sqrt{2} - 2\ ;\ -2\sqrt{2} - 2\}. \end{aligned}$$

Or, $-2\sqrt{2} - 2 < 0$ donc n'appartient pas à l'intervalle $[0; 1]$

La seule solution pour $M_0 = L_0$ est $-2 + 2\sqrt{2} \simeq 0.83$. Elle appartient bien à l'intervalle $[0; 1]$.

On trouve $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L_0 = M_0 = -2 + 2\sqrt{2}$.

- **Dans le cas général**

Jusqu'ici nous avions fixé le $a = \frac{1}{4}$ et le premier terme $x_0 = 0{,}6$. Maintenant, nous cherchons à démontrer que la suite (x_n) converge pour tout $a \leq 0{,}75$ et pour tout x_0 de l'intervalle $[0;1]$.

Nous voulons pour cela déterminer le sens de variations et la convergence des sous-suites (u_n) et (v_n) selon le premier terme x_0 de la suite principale.

Pour cela nous allons utiliser le théorème du point fixe et la fonction d définie sur $[0;1]$ par $d(x) = h(x) - x$.

<u>Le tableau de signes de la fonction d</u>

Pour cela cherchons les racines de ce polynôme :

$$d(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - a(1 - ax^2)^2 - x = 0 \Leftrightarrow 1 - a + 2a^2x^2 - a^3x^4 - x = 0.$$

On se retrouve face à un polynôme de degré 4… Or si on trouve les solutions de $f(x) = x$ alors, on aura déjà 2 racines du polynôme d.

Soit : $f(x) = x \Leftrightarrow 1 - ax^2 = x \Leftrightarrow -ax^2 - x + 1 = 0$

Celui-ci est un polynôme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ de degré 2, avec $\alpha = -a$, $\beta = -1$ et $\gamma = 1$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 + 4a$$

Pour un $a \neq 0$ dans l'intervalle $]0;1]$ on a $\Delta > 0$ et le polynôme admet donc 2 racines :

$$\varphi_0 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = -\frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2a}$$
$$\varphi_0' = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = -\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a} < 0$$

La fonction d étant un polynôme de degré 4 avec pour racines φ_0 et φ_0'. Elle peut s'écrire sous la forme $d(x) = -a^3(x - \varphi_0)(x - \varphi_0')(x - \varphi_1)(x - \varphi_2)$ avec φ_1 et φ_2 a déterminer.

Or on sait déjà que $-ax^2 - x + 1 = -a(x - \varphi_0')(x - \varphi_0)$

Soit $d(x) = a^2(-ax^2 - x + 1)(cx^2 + bx + e)$

$$\Leftrightarrow d(x) = (-a^3x^2 - a^2x + a^2)(cx^2 + bx + e)$$

$$\Leftrightarrow d(x) = -a^3x^4c - ba^3x^3 - a^3x^2e - ca^2x^3 - ba^2x^2 - ea^2x + ca^2x^2 + ba^2x + ea^2$$

$$\Leftrightarrow d(x) = (-a^3c)x^4 + (-ba^3 - ca^2)x^3 + (-a^3e - ba^2 + ca^2)x^2 + (-ea^2 + ba^2)x + ea^2$$

Par identification avec notre première expression de la fonction, on se retrouve à résoudre :

$$\begin{cases} -a^3c = -a^3 \\ -ba^3 - ca^2 = 0 \\ -a^3e - ba^2 + ca^2 = 2a^2 \\ -ea^2 + ba^2 = -1 \\ ea^2 = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -\dfrac{1}{a} \\ e = \dfrac{1 - a}{a^2} \end{cases} \text{car } a \neq 0$$

Donc on a $d(x) = -a^3(x - \varphi_0')(x - \varphi_0)\left(x^2 - \frac{1}{a}x + \frac{1-a}{a^2}\right)$.

Ainsi, pour trouver les dernières racines du polynôme on doit trouver celles de $x^2 - \frac{1}{a}x + \frac{1-a}{a^2}$.

Celui-ci est un polynôme du second degré avec $\alpha = 1$, $\beta = \frac{-1}{a}$ et $\gamma = \frac{1-a}{a^2}$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left(\frac{-1}{a}\right)^2 - \frac{1 - a}{a^2} \times 4 = \frac{-3 + 4a}{a^2}$$

Ici, nous sommes dans le cas où $a < 0{,}75$ donc on a $\Delta < 0$, donc le polynôme n'admet pas de racines réelles

La fonction d admet alors une seule racine dans notre intervalle d'étude : φ_0.

Et dans l'expression de la fonction d : $d(x) = -a^3(x - x_{0,})(x - x_0)\left(x^2 - \frac{1}{a}x + \frac{1-a}{a^2}\right)$ le coefficient dominant $-a^3$ est négatif car $a > 0$. Donc la fonction d étant un polynôme de degré 4 avec un coefficient dominant négatif est donc positive, s'annule et devient négative. De plus, on sait que f est une fonction décroissante. On peut alors construire le tableau :

x	0		φ_0		1
Signe de $d(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $f(x)$	1	$\searrow$	φ_0	$\searrow$	$1-a$

<u>Etude des sous-suites</u>

Nous allons maintenant étudier les sous-suites (u_n) et (v_n) .
Rappelons que (u_n) est la suite des termes pairs de la suite (x_n), définie par récurrence par $u_{n+1} = h(u_n)$, et (v_n) est la suite des termes impairs de la suite (x_n), définie par récurrence par $v_{n+1} = h(v_n)$.

→ <u>Pour $x_0 \epsilon\ [0, \varphi_0[$</u>

On observe que si $x_0 = u_0 \in [0, \varphi_0[$ alors, $d(u_0) > 0 \Leftrightarrow h(u_0) - u_0 > 0 \Leftrightarrow h(u_0) > u_0 \Leftrightarrow u_1 > u_0$.
Dès lors, la suite (u_n) apparaît comme croissante. Or on démontré que la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a. Alors, la suite (u_n) semble également majorée par 1.

Prouvons le par récurrence :
Pour tous $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété : "$1 \geq u_{n+1} \geq u_n \geq 0$".

<u>Initialisation</u>
$1 \geq u_1 \geq u_0 \geq 0$. La propriété est donc vraie au rang 0.

<u>Hérédité</u>
Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un certain entier n.

On a $\quad 1 \geq u_{n+1} \geq u_n \geq 0$ $\quad$ d'après l'hypothèse de récurrence
$\quad h(1) \geq h(u_{n+1}) \geq h(u_n) \geq h(0)$ $\quad$ car la fonction h est croissante sur $[0; 1[$.

Donc $\quad 1 \geq 1 - a(1-a)^2 \geq u_{n+2} \geq u_{n+1} \geq 1 - a \geq 0$,
car $1 > a$ $\ donc\ $ $1 - a > 0$ d'où $a(1-a)^2 > 0$ et ainsi $1 - a(1-a)^2 < 1$.

La propriété est donc vraie pour $n + 1$.

<u>Conclusion</u>
La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vient alors de démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la sous suite (u_n) converge vers une limite $L \leq 1$.

Ainsi,

- La suite (u_n) converge vers une limite $0 \leq L \leq 1$
- Elle est définie par récurrence par $u_{n+1} = h(u_n)$
- La fonction h est une fonction polynôme de degré 4, c'est donc une fonction continue.

Donc, d'après le théorème du point fixe, la limite L est un point fixe de la fonction h, L vérifie $h(L) = L$.
Or d'après notre étude de la fonction d, dans notre situation, la fonction h admet pour seul point fixe dans $[0\,;1]$ le point φ_0 . Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \varphi_0$.

Pour la suite (v_n), si $x_0 \in [0, \varphi_0[$ alors $v_0 = f(x_0) \in [\varphi_0; 1]$.
Or d'après le tableau de signe de d, dans cet intervalle $d(v_0) < 0$ donc $h(v_0) - v_0 < 0$ et ainsi $h(v_0) < v_0$, d'où $v_1 < v_0$.
Dès lors, la suite(v_n), apparaît comme décroissante. Or on démontré que la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a. Alors, la suite (v_n) semble également minorée par 0.
Nous pouvons prouver tout cela par récurrence comme précédemment et on en arrive à la conclusion que (v_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \varphi_0$.

Ainsi, les deux sous-suites admettent les mêmes limites donc la suite (x_n) est convergente vers $\varphi_0 = -\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}$ c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \varphi_0 = -\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}$.

→ Pour $x_0 \epsilon\ [\varphi_0; 1]$

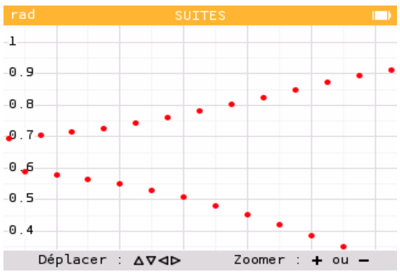
En raisonnant de la même façon, on trouve ici que (u_n), est décroissante et minorée donc converge vers un point fixe de h. Or, avec un $a \in [0;\frac{3}{4}]$, la fonction h n'a qu'un seul point fixe φ_0 dans [0;1]. Donc la suite (u_n), converge en φ_0.
On trouve également que la sous suite (v_n) est croissante et majorée donc converge vers un point fixe de h, φ_0.
Ainsi, la suite (x_n) est convergente et tend vers $\varphi_0 = -\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \varphi_0 = -\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}.$$

Conclusion

Nous avons ici démontré que quelque soit la valeur de a dans l'intervalle $\left[0;\frac{3}{4}\right]$, les deux sous suites (u_n) et (v_n) admettait la même limite : $\varphi_0 = -\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}$. Ainsi, la suite (x_n) est convergente lorsque $0 \leq a \leq \frac{3}{4}$.

❖ Etude de la suite pour $a > 0,75$



Etude d'un cas particulier

Posons $a = 0{,}8$, $x_0 = 0{,}6$ et

$$h(x) = 1 - a(1 - ax^2)^2 = 1 - 0{,}8(1 - 0{,}8\,x^2)^2$$

On a
(u_n) la suite des termes pairs de la suite (x_n), définie par $u_{n+1} = h(u_n)$ et $u_0 = x_0 = 0{,}6$
et (v_n) la suite des termes impairs de la suite (x_n), définie par $v_{n+1} = h(v_n)$ et $v_0 = x_1 = 0{,}712$.

Observons la suite (u_n)

D'après les premiers termes, la suite (u_n) semble décroissante : $u_0 = 0{,}6$, $u_1 = 0{,}594$, $u_2 = 0{,}588$ ...

D'après la partie précédente, la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a. Ainsi, (u_n) apparaît aussi comme minorée par 0.

Prouvons-le par une récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$, la propriété : "$1 \geq u_n \geq u_{n+1} \geq 0$".

Initialisation

Pour $n = 0$, $u_0 = 0{,}6$ et $u_1 = 0{,}594$ soit $1 \geq u_0 \geq u_1 \geq 0$. La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité

Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un certain entier n. On a

	$1 \geq u_n \geq u_{n+1} \geq 0$	d'après l'hypothèse de récurrence,
Soit	$h(1) \geq h(u_n) \geq h(u_{n+1}) \geq h(0)$	car la fonction h est croissante sur $[0,1]$.
D'où	$1 \geq 0{,}968 \geq u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq 0{,}2 \geq 0$	

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vient alors de démontrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite converge ainsi vers une limite $0 \leq L \leq 1$.

En résumé,

- La suite (u_n) est décroissante et converge vers une limite $0 \leq L \leq 1$.
- Elle est définie par récurrence par $u_{n+1} = h(u_n)$
- La fonction h est une fonction polynôme de degré 4, c'est donc une fonction continue.

Donc, d'après le théorème du point fixe, la limite L de la suite (u_n) est un point fixe de la fonction h. L vérifie $h(L) = L$.

Trouvons L.

$$h(x) = x \iff h(x) - x = 0 \iff d(x) = 0$$

Or on sait que $d(x) = a^2(-ax^2 - x + 1)\left(x^2 - \frac{1}{a}x + \frac{1-a}{a^2}\right)$, donc avec $a = 0{,}8$

$$h(x) = x \iff d(x) = 0{,}64(-0{,}8\,x^2 - x + 1)\left(x^2 - 1{,}25\,x + \frac{5}{16}\right) = 0$$

On a $-0{,}8\,x^2 - x + 1 = 0$ ou $x^2 - 1{,}25\,x + \frac{5}{16} = 0$.

$-0{,}8x^2 - x + 1$ est un polynôme de degré 2 avec un discriminant $\Delta_1 = (-1)^2 + 4 \times 0{,}8 = 4{,}2 > 0$. Donc ce polynôme admet 2 racines réelles :

$$x_0 = \frac{1 + \sqrt{4{,}2}}{-1{,}6} = \frac{-5 - \sqrt{105}}{8} \simeq -1{,}91$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{4{,}2}}{-1{,}6} = \frac{-5 + \sqrt{105}}{8} \simeq 0{,}66$$

De plus, $x^2 - 1{,}25\,x + \frac{5}{16}$ est un second polynôme du second degré avec pour discriminant $\Delta_2 = (-1{,}25)^2 - 4 \times \frac{5}{16} = \frac{5}{16} > 0$ donc ce polynôme admet 2 racines réelles :

$$x_2 = \frac{1{,}25 + \sqrt{\frac{5}{16}}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \simeq 0{,}90$$

$$x_3 = \frac{1{,}25 - \sqrt{\frac{5}{16}}}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \simeq 0{,}35$$

Donc

$$S = \left\{ x_0 = \frac{-5-\sqrt{105}}{8} ; x_3 = \frac{5-\sqrt{5}}{8} ; x_1 = \frac{-5+\sqrt{105}}{8} ; x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \right\}$$

Or $u_0 = 0{,}6$, la suite est décroissante et minorée par 0.
Donc $L = x_3$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_3 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ (4).

Observons la suite (v_n)

D'après les premiers termes, (v_n) semble croissante: $v_0 = 0{,}712$, $v_1 = 0{,}717$, $v_2 = 0{,}723$ …

D'après la partie précédente, la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a. Ainsi, (v_n) apparaît comme majorée par 1.

Prouvons le par récurrence.:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$, la propriété : "$1 \geq v_{n+1} \geq v_n \geq 0$".

Initialisation
Pour $n = 0$, $v_0 = 0{,}712$ et $v_1 = 0{,}717$soit $1 \geq v_1 \geq v_0 \geq 0$. La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité

Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un certain entier n. On a

	$1 \geq v_{n+1} \geq v_n \geq 0$	d'après l'hypothèse de récurrence.
Soit	$h(1) \geq h(v_{n+1}) \geq h(v_n) \geq h(0)$	car la fonction h est croissante sur [0,1]
D'où	$1 \geq 0{,}968 \geq v_{n+2} \geq v_{n+1} \geq 0{,}2 \geq 0$	

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion
La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On vient alors de démontrer que la suite (v_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite converge ainsi vers une limite $0 \leq M \leq 1$.

En résumé,

- La suite (v_n) est croissante et converge vers une limite $0 \leq M \leq 1$.
- Elle est définie par récurrence par $v_{n+1} = h(v_n)$.
- La fonction h est une fonction polynôme de degré 4, c'est donc une fonction continue.

Donc, d'après le théorème du point fixe, la limite M de la suite (v_n) est un point fixe de la fonction h, M vérifie $h(M) = M$.

Trouvons M.

De même que précédemment, trouver les points fixes de h revient à trouver les racines de d avec $a = 0{,}8$, donc ici nous avons pour solutions

$$S = \left\{x_0 = \frac{-5-\sqrt{105}}{8}\,; x_3 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}\,; x_1 = \frac{-5+\sqrt{105}}{8}\,; x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}\right\}$$

Or $v_0 = 0{,}712$ et la suite est croissante. Donc $M = x_2$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$.

<u>Conclusion</u>

Les deux sous suites de la suite principale (x_n) convergent toutes deux. Or elles n'admettent pas la même limite : $L \neq M$. Il n'y a donc pas convergence de la suite (x_n)

- **Dans le cas général**

Jusqu'ici nous avions fixé le a et le premier terme x_0. Maintenant, nous cherchons à démontrer que le suite (x_n) ne converge plus pour tout $a > 0{,}75$ et pour tout x_0 de l'intervalle $[0; 1]$ (5).

Nous voulons ainsi déterminer le sens de variations et la convergence des sous-suites (u_n) et (v_n) selon le premier terme x_0 de la suite principale.

Pour cela nous allons utiliser le théorème du point fixe et la fonction d définie par $d(x) = h(x) - x$.

<u>Le tableau de signe de la fonction d</u>

Pour cela cherchons les racines de ce polynôme, nous savons déjà qu'il en admet 2 :

$$\varphi_0 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = -\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}$$
$$\varphi_0' = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = -\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a} < 0$$

Et nous savons également que d s'écrit de la forme

$$d(x) = -a^3(x-\varphi_0')(x-\varphi_0)\left(x^2 - \frac{1}{a}x + \frac{1-a}{a^2}\right).$$

Ainsi, pour trouver les dernières racines du polynôme on doit trouver celles de $x^2 - \frac{1}{a}x + \frac{1-a}{a^2}$.

Celui-ci est un polynôme du second degré avec $\alpha = 1$, $\beta = \frac{-1}{a}$ et $\gamma = \frac{1-a}{a^2}$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = \left(\frac{-1}{a}\right)^2 - \frac{1-a}{a^2} \times 4 = \frac{-3+4a}{a^2}$$

Ici, nous étudions le cas où a est supérieur à $\frac{3}{4}$ donc notre déterminant Δ est positif et le polynôme admet 2 racines réelles :

$$\varphi_1 = \frac{1-\sqrt{-3+4a}}{2a}$$
$$\varphi_2 = \frac{1+\sqrt{-3+4a}}{2a}$$

Pour construire le tableau de signe de d, nous avons besoin maintenant de connaître l'ordre de ses racines.

On a $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$, donc $2 \leq \sqrt{1+4a} \leq \sqrt{5}$ et $0 \leq \sqrt{4a-3} \leq 1$.

D'où $2 \leq \sqrt{1+4a} + \sqrt{4a-3}$, donc $1 - \sqrt{4a-3} \leq -1 + \sqrt{4a+1}$ et

$$\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2a} \leq \frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2a}.$$

Alors $\varphi_1 \leq \varphi_0$.

On sait que $4\sqrt{4a-3} \geq 0$ car une racine est toujours positive.

Soit $4\sqrt{4a-3} + 1 + 4a \geq 1 + 4a$ donc $4 + 4\sqrt{4a-3} - 3 + 4a \geq 1 + 4a$,
et ainsi $(2 + \sqrt{4a-3})^2 \geq 1 + 4a$.
On obtient donc $2 + \sqrt{4a-3} \geq \sqrt{1+4a}$, puis $1 + \sqrt{4a-3} \geq -1 + \sqrt{1+4a}$ et finalement

$$\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2a} \geq \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}$$

et donc $\varphi_2 \geq \varphi_0$.

Tableau de variations de f

f est une fonction décroissante. On a alors le tableau :

x	0		φ_1		φ_0		φ_2		1
Signe de $d(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de $f(x)$	1	↘	φ_2	↘	φ_0	↘	φ_1	↘	$1-a$

Etude des sous-suites

Nous allons maintenant étudier les sous-suites (u_n) et (v_n).

Rappelons que (u_n) est la suite des termes pairs de la suite (x_n), définie par récurrence par $u_{n+1} = h(u_n)$, et (v_n) est la suite des termes impairs de la suite (x_n), définie par récurrence par $v_{n+1} = h(v_n)$.

→ Pour $x_0 \epsilon\, [0, \varphi_1[$;

On observe que si $x_0 = u_0 \in [0, \varphi_1[$ alors, $d(u_0) = h(u_0) - u_0 > 0 \Leftrightarrow u_1 = h(u_0) > u_0$.
Dès lors, la suite (u_n) apparaît comme croissante. Or on a démontré que la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a. Alors, la suite (u_n) semble également majorée par 1.

Prouvons le par récurrence.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$, la propriété : "$1 \geq u_{n+1} \geq u_n \geq 0$"

Initialisation
$1 \geq u_1 \geq u_0 \geq 0$.
La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité
Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un certain entier n.
On a : $1 \geq u_{n+1} \geq u_n \geq 0$ d'après l'hypothèse de récurrence,
$h(1) \geq h(u_{n+1}) \geq h(u_n) \geq h(0)$ car la fonction h est croissante sur $[0;1[$.
Donc $1 \geq 1 - a(1-a)^2 \geq u_{n+2} \geq u_{n+1} \geq 1 - a \geq 0$
car $a \geq 0 \Leftrightarrow a(1-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - a(1-a)^2 \leq 1$.
La propriété est donc vraie pour $n+1$.

Conclusion
La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vient alors de démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la sous suite (u_n) converge vers une limite $L \leq 1$.

Ainsi,
- La suite (u_n) converge vers une limite $0 \leq L \leq 1$.
- Elle est définie par récurrence tel que $u_{n+1} = h(u_n)$.
- La fonction h est une fonction polynôme de degré 4, c'est donc une fonction continue.

Donc, d'après le théorème du point fixe, la limite L est un point fixe de la fonction h, L vérifie $h(L) = L$.

Par analyse, on sait que (u_n) est croissante et converge vers un point fixe de h. Donc on peut en conclure qu'elle va converger vers le premier point fixe, ici φ_1 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \varphi_1$

Pour la suite (v_n), si $x_0 \epsilon\ [0, \varphi_1[$ alors $v_0 = f(x_0) \in [\varphi_2; 1]$.
Or d'après le tableau de d, dans cette intervalle, $d(v_0) < 0$ soit $h(v_0) - v_0 < 0$, $h(v_0) < v_0$ et $v_1 < v_0$.
Dès lors, la suite (v_n), apparaît comme décroissante. Or on a démontré que la suite reste dans l'intervalle $[0;1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a. Alors, la suite (v_n) semble également minorée par 0.
Nous pouvons prouver tout cela par récurrence comme précédemment et on en arrive à la conclusion que (v_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \varphi_2$.
Ainsi, les deux sous-suites n'admettent pas la même limite donc la suite (x_n) n'est plus convergente :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \varphi_1 = \frac{1-\sqrt{-3+4a}}{2a} \neq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \varphi_2 = \frac{1+\sqrt{-3+4a}}{2a}$.

En procédant de même, on en déduit que

- Pour $x_0 \epsilon\ ]\varphi_1, \varphi_0[$
  - La sous-suite (u_n) est décroissante et converge vers φ_1 et la sous-suite (v_n) est croissante et converge vers φ_2.
- Pour $x_0 \epsilon\ ]\varphi_0, \varphi_2[$
  - La sous-suite (u_n) est croissante et converge vers φ_2 et la sous-suite (v_n) est décroissante et converge vers φ_1.
- Pour $x_0 \epsilon\ ]\varphi_2, 1]$
  - La sous-suite (u_n) est décroissante et converge vers φ_2 et la sous-suite (v_n) est croissante et converge vers φ_1.

- **Conclusion**

Ainsi, qu'importe le premier terme, pour un $a \geq \frac{3}{4}$, les deux sous-suites sont convergentes chacune vers un point fixe différent : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ alors la suite globale (x_n) n'est pas convergente.

4. Conclusion

Le sujet de MATh.en.JEANS “en route vers le chaos” modélise une suite chaotique. La suite chaotique appartient au groupe des suites logistiques, type de suites popularisées par le biologiste Robert May et créé par le mathématicien Pierre François Verhulst. Une application de la suite logistique peut résider dans la modélisation de la taille d'une population biologique au fil des générations.

Nous avons dans un premier temps modélisé notre suite sur Geogebra et nous avons remarqué que son comportement était chaotique (6). En effet, avec des calculs, nous avons observé que la suite converge vers un unique réel pour une valeur de a entre 0 et $0{,}75$. Au-dessus de $0{,}75$, la suite n’est plus convergente, les deux sous-suites convergent vers des valeurs différentes. L’ensemble des termes d’indices pairs converge vers un nombre réel et l’ensemble des termes d’indices impairs vers un autre nombre réel. Les deux sous-suites convergent vers deux points distincts, donc la suite (x_n) ne converge plus.

Notre suite peut, en apparence, sembler simple à étudier au vu de sa relation de récurrence basée sur une fonction polynôme du second degré. Mais dès lors que l’on change un simple paramètre, son comportement peut devenir complexe, voire chaotique. En effet, cette suite est une ouverture vers la théorie du chaos dans le sens où elle est très sensible au paramètre a.

Notes d’édition

(1) Ceci suppose $a \leq 1$, de façon que $f(1) = 1 - a \geq 0$, et on fait cette hypothèse dans tout l’article. Mais en fait cette restriction empêche d’obtenir un comportement chaotique, alors qu’elle n’est pas nécessaire : pour $a \leq 2$, on peut trouver un autre intervalle laissé stable par f. Par exemple pour $a = 2$, $f(x) = 1 - 2x^2$ et on a $f([-1;1]) = [-1;1]$.

(2) Dans les graphiques, le graphe de f est tracé en vert, celui de $h = f \circ f$ en rouge, et la courbe bleue représente $d(x) = h(x) - x$ (h et d sont introduits plus loin).
Il est aussi présenté la construction graphique de la suite (x_n) : partant de $(x_0, 0)$ on trace le segment vertical jusqu’au point $\left(x_0, f(x_0)\right) = (x_0, x_1)$ du graphe de f, puis un segment horizontal de ce point jusqu’au point (x_1, x_1) de la diagonale, permettant de retrouver x_1 en abscisse, puis le segment vertical jusqu’à $\left(x_1, f(x_1)\right) = (x_1, x_2)$, et ainsi de suite.

(3) Cette démonstration va être répétée plusieurs fois, pour les deux suites (u_n) et (v_n) dans tous les cas étudiés dans l’article, alors qu’on peut énoncer le résultat une fois pour toutes : du fait que la fonction h laisse stable l’intervalle $[0;1]$ et y est croissante, elle montre que la suite (u_n) est toujours monotone, croissante si $u_1 \geq u_0$ et décroissante si $u_1 \leq u_0$.

(4) En effet, $x_3 \simeq 0{,}35$ est le seul point fixe de h dans l’intervalle $[0\,;1]$ qui est inférieur à $u_0 = 0{,}6$.

(5) Sauf pour le point fixe de f : si $x_O = \varphi_0$, la suite est constante.

(6) Il n’y a pas de comportement chaotique dans les cas étudiés ici. Pour $a > 0{,}75$, la suite (x_n) s’approche indéfiniment d’une oscillation de période 2 entre φ_1 et φ_2, ce qui est très régulier ! Aussi, une caractéristique du chaos est la sensibilité aux conditions initiales, alors qu’ici le comportement de la suite est toujours le même, à quelques détails près dépendant seulement de la position de x_0 par rapport points fixes de h.

La suite logistique classique définie par $x_0 \in [0;1]$ et $x_{n+1} = \mu\, x_n(1 - x_n)$, avec $0 \leq \mu \leq 4$, a un comportement chaotique pour des valeurs du paramètre μ assez grandes (voir par exemple l’article de Wikipedia). On peut montrer que la suite étudiée ici s’y ramène au moyen d’un changement de la forme $x'_n = \alpha x_n + \beta$. Ainsi, le chaos apparaît bien, mais pour des valeurs de a supérieures à 1, exclues dans cet article (voir note 1).
On suggère au lecteur de tester la suite pour $a = 2$ avec différentes valeurs initiales dans $[-1;1]$.