Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Castells de a

Année 2023-2024

Nicolas Lemoine, classe de Terminale

Établissement : Lycée François Arago, Perpignan
Enseignant·es : Clément Fita, Marie Diumenge et Abdel Ghabbar Cherdi
Chercheur : Robert Brouzet, Université de Perpignan

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

Pour chacun des trois ”empilements infinis” ci-dessous, le problème consiste à trouver pour quelles valeurs de a ils possèdent un sens mathématique. La question peut se résumer à donner du sens à ces empilements infinis, à connaitre, s'il existe, le nombre qui se cache ”dessous”, avec $a > 0$:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}} \quad ; \qquad a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\dots}}}} \quad ; \qquad a^{a^{a^{a^{\cdots}}}}.$$

1.2. Résultats

Voici les résultats obtenus au terme de la recherche :

— **Pour le premier empilement**

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}},$$

il existe une formule générale qui permet de définir sa valeur en fonction de a :

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}} = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

— **Pour le second empilement**

$$a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\dots}}}}$$

il existe aussi une formule générale bien définie pour tout a : $\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$.

— **Enfin pour le dernier empilement** $a^{a^{a^{a^{\cdots}}}}$, on a obtenu les résultats suivants :

∗ Pour $a \in]\,1\,; e^{e^{-1}}\,]$et $a \in]\,e^{-e}\,; 1\,[$ l'empilement a une valeur réelle finie, donc il a un sens mathématique, mais il n'existe pas de formule générale pour obtenir sa sa valeur, on peut simplement l'approcher à l'aide d'un programme informatique.

∗ Pour $a \in]e^{e^{-1}}; +\infty[$ et pour a $\in]0; e^{-e}[$ il n'y a pas de sens mathématique pour l'empilement (il n'a pas de valeur finie).

∗ Pour $a = 1$ l'empilement possède un sens mathématique, il vaut 1.

∗ Pour $a = e^{-e}$ l'existence de l'empilement n'a pas été déterminée.

2. Résolution des trois problèmes

2.1. Problème 1 : $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}}$

Soit a un nombre réel strictement positif : $a > 0$. On s'intéresse à l'existence du nombre suivant :

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}}.$$

On va construire ce nombre, s'il existe, par itérations successives à l'aide d'une suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & \sqrt{a+u_n} \\ u_0 & = & \sqrt{a} \end{cases}$$

Par cette modélisation, on constate que le nombre qui nous intéresse, s'il existe, est la limite de la suite numérique (u_n). Ainsi, on pourra lui donner un sens mathématique si et seulement si cette suite converge.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f(x) = \sqrt{a+x}.$$

La fonction f ci-dessus est continue et dérivable pour tout $x \in [0; +\infty[$.

La suite (u_n) ainsi construite, fait partie de la classe des suites récurrentes d'ordre 1. Il existe dans la littérature une méthode permettant d'étudier la convergence d'une telle suite. On va donc suivre cette méthode générale rappelée ci-dessous :

— Étape 1 : Etudier la fonction f sur son ensemble de définition (variation, signe etc.).
— Étape 2 : Recherche les éventuels points fixes, solutions de l'équation $f(l) = l$.
(En effet, si la suite (u_n) converge, sa limite est solution de cette équation)
— Étape 3 : Déterminer un intervalle I stable par f sur lequel f est monotone, et tel que $u_0 \in I$ (où un terme suivant : u_1 ou u_2, etc.).
— Étape 4 : Etude de la monotonie de f sur l'intervalle I qui dirige la variation de la suite (u_n) dans I, ce qui permettra de conclure sur la possible convergence de la suite (u_n) et donc de l'existence du nombre qui nous intéresse.

Étape 1

Tout d'abord, pour ce qui est du signe de f, il est strictement positif car x ne peut prendre que des valeurs positives tout comme a.

Maintenant étudions la fonction dérivée de f pour connaître les variations de f.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a+x}}.$$

On a $1 > 0$ et $\sqrt{a+x} > 0$ donc, par quotient $f' > 0$. On en déduit donc que f est croissante sur tout son intervalle de définition.

Étape 2

Soit f une fonction continue sur I. L'étude générale des suites récurrentes d'ordre 1 montre que

Si la suite (u_n) converge vers un nombre réel L appartenant à I,
alors L (sa limite) vérifie $f(L) = L$ (c'est un point fixe de f).

En voici la preuve : on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = L \quad \text{et } u_{n+1} = f(u_n).$$

De ce fait $L = f(L)$ par continuité de f en L.
il faut noter que f doit être continue sur l'intervalle en question.

Autrement dit, il est nécessaire que la fonction f possède au moins un point fixe pour espérer la convergence de la suite (u_n).

Cherchons donc les éventuels points fixes de f :

Resolution de $L = f(L)$: $L \in \mathbb{R}$ est un point fixe de $f \iff f(L) = L$.

$$L = f(L) \iff L = \sqrt{a+L} \implies L^2 = a + L \iff L^2 - L - a = 0$$

En résolvant cette équation, on obtient les deux solutions suivantes :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} > 0 \quad ; \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0.$$

Ici, seul x_1 convient car x_2 est strictement négatif, du fait de la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$1 < 1+4a \quad \text{donc} \quad \sqrt{1} - \sqrt{1+4a} < 0.$$

Or la suite (u_n) ne prend que des valeurs positives puisque une racine carrée est par définition positive ou nulle.

Finalement, si la suite (u_n) converge, alors sa limite sera forcément x_1, l'unique point fixe possible : $L = x_1$.

Étape 3

Maintenant nous allons déterminer un intervalle stable par f contenant toutes les valeurs (u_n) : On va définir u_0 comme la borne inférieure de l'intervalle stable, et nous allons montrer que notre valeur x_1 majore la suite (u_n) (1). Posons donc $I = [u_0; x_1]$.

Montrons par récurrence que (u_n) est majorée par x_1. Posons

$$(\mathscr{P}_n) : \quad u_n \leq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Initialisation Pour $n = 0$, on a $u_0 = \sqrt{a}$. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} u_0 \leq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} &\iff \sqrt{a} \leq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \\ &\iff 2\sqrt{a} \leq 1+\sqrt{1+4a} \\ &\iff \sqrt{4}\times\sqrt{a} \leq 1+\sqrt{1+4a} \\ &\iff \sqrt{4a} \leq 1+\sqrt{1+4a}. \end{aligned}$$

On voit que pour tout $a > 0$, la propriété est vraie au rang 0.

$$u_0 \leq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad (\mathscr{P}_0) \text{ est vraie.}$$

· Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$, prouvons que si la propriété est vraie au rang n, alors elle est aussi vraie au rang $n+1$:

$$u_n \leq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \leq f\left(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right) : f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+$$

Or $f(u_n)=u_{n+1}$ et d'après l'étape 2, $f(x_1)=x_1$ avec $x_1=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Ainsi on a :

$$u_{n+1} \leq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \text{ et } (\mathscr{P}_{n+1}) \text{ est vraie.}$$

Conclusion : **La propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire, alors elle est vraie pour tout** $n\in\mathbb{N}$.

Étape 4

On a vu que la fonction f associée à la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{R}_+$, en particulier sur son intervalle stable. La théorie générale nous dit que (u_n) est monotone sur $I=[u_0;x_1]$ (2).

La variation de (u_n) est donc donnée par la différence u_1-u_0 :

$$u_1-u_0=\sqrt{a+\sqrt{a}}-\sqrt{a}>0, \quad \text{car } a>0 \Longrightarrow a+\sqrt{a}>\sqrt{a}.$$

De ce fait, pour tout $a>0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

On vient de montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée sur $I=[u_0;x_1]$. Finalement, on peut affirmer que (u_n) converge vers l'unique point fixe de la fonction f possible, x_1. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Nous avons maintenant une expression générale x_1 pour exprimer la valeur du nombre représenté par cette empilement infini de racines, et ceci quelque soit la valeur de a strictement positif. Ce nombre existe bel et bien et on a

$$\text{pour tout } a>0, \quad \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}} = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

On remarque que pout tout nombre $b\in[1;+\infty[$, il existe une unique valeur de a strictement positive telle que

$$b=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}} = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

2.2. Problème 2 : $a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}$

Soit a un nombre réel strictement positif : $a>0$. On s'intéresse à l'existence du nombre suivant :

$$a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}.$$

On va construire ce nombre, s'il existe, par itérations successives à l'aide d'une suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & a+\dfrac{1}{u_n} \\ u_0 & = & a+1. \end{cases}$$

Par cette modélisation, on constate que le nombre qui nous intéresse, s'il existe, est la limite de la suite numérique (u_n). Ainsi, on pourra lui donner un sens mathématique si et seulement si cette suite converge.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f(x) = a + \frac{1}{x}\cdot$$

La fonction f ci-dessus est continue et dérivable pour tout $x \in]0; +\infty[$.

On va suivre la méthode générale d'étude d'une suite récurrente d'ordre 1 utilisée dans la résolution du premier problème, cependant ici on va confondre en quelque sorte les étapes 3 et 4.

Étape 1

Tout d'abord pour ce qui est du signe de $f(x)$, la fonction f est strictement positive car a et x sont tous deux strictement supérieur à 0.

Maintenant étudions la fonction dérivée de f pour connaitre ses variations.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot$$

On a $-1 < 0$ et $x^2 > 0$ donc par quotient $f' < 0$. On en déduit que f est décroissante sur tout son intervalle de définition.

Étape 2

Résolution de $L = f(L)$

$$L = f(L) \Longleftrightarrow L = a + \frac{1}{L} \Longleftrightarrow L = \frac{aL+1}{L} \Longleftrightarrow L^2 = aL + 1 \Longleftrightarrow L^2 - aL - 1 = 0.$$

L'equation admet 2 solutions. Ces deux solutions sont

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2} > 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2+4}}{2} < 0.$$

Ici, seul x_1 convient car x_2 est négatif,du fait de la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$a^2 < a^2 + 4 \text{ donc } \sqrt{a^2} - \sqrt{a^2+4} = a - \sqrt{a^2+4} < 0.$$

Or la suite (u_n) ne prend que des valeurs positives puisque la fonction inverse est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement, si la suite (u_n) converge, alors sa limite ℓ sera forcément x_1, l'unique point fixe possible : $\ell = x_1$.

Étape 3

f est décroissante sur $]0; +\infty[$. La théorie générale montre que la suite (u_n) n'est pas monotone. Cependant, elle affirme que les sous-suite paires (u_{2n}) et impaires (u_{2n+1}) de (u_n) sont monotones et de monotonies contraires (3).

On pourra donc montrer que la suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ si et seulement si on montre que les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers cette même limite ℓ. C'est un résultat général sur la convergence des suites.

Remarquons que

$$(u_{2n}) \text{ peut être définie par } \begin{cases} u_0 = a+1 \\ u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n}) \end{cases}$$

$$(u_{2n+1}) \text{ peut être définie par } \begin{cases} u_1 = a + \dfrac{1}{a+1} \\ u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1}) \end{cases}$$

On va tout d'abord déterminer et étudier la fonction $f \circ f : x \to f(f(x))$, que l'on va nommer g.

$$g(x) = f \circ f(x) = a + \frac{1}{a + \frac{1}{x}}\cdot$$

Le signe de g est strictement positif comme celui de f tant que $a > 0$. Nous n'avons pas besoin de calculer la dérivée de g pour obtenir ses variations car la composée de deux fonctions décroissantes donne une fonction croissante. Donc g est croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	a $\nearrow$	$a + \frac{1}{a}$

On définit les suites (v_n) et (w_n) comme suit :

$$(v_n) \text{ est définie par } \begin{cases} v_0 = u_0 = a + 1 \\ v_{n+1} = u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n}) = g(v_n), \end{cases}$$

$$(w_n) \text{ est définie par } \begin{cases} w_0 = u_1 = a + \frac{1}{a+1} \\ w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1}) = g(w_n). \end{cases}$$

On pose l'intervalle $I = \left[\, a\,;\, a + \frac{1}{a} \right]$. Prouvons que I est stable pour la fonction g :

Pour $a > 0$, $g(a) = a + \frac{1}{a + \frac{1}{a}} > a$ et $g\left(a + \frac{1}{a}\right) < a + \frac{1}{a}$ car g est croissante et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = a + \frac{1}{a}\cdot$

Ainsi, $I = \left[\, a\,;\, a + \frac{1}{a} \right]$ est bien un intervalle stable pour la fonction g.

De plus on a

$$\begin{aligned} a < a + \frac{1}{a+1} &\iff 0 < \frac{1}{a + \frac{1}{a+1}} < \frac{1}{a} \\ &\iff a < a + \frac{1}{a + \frac{1}{a+1}} < a + \frac{1}{a} \\ &\iff a < v_1 < a + \frac{1}{a} \\ &\iff v_1 \in \left[\, a\,;\, a + \frac{1}{a} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a < a + \frac{1}{a+1} < a + \frac{1}{a} &\iff a < w_0 < a + \frac{1}{a} \\ &\iff w_0 \in \left[\, a\,;\, a + \frac{1}{a} \right] \end{aligned}$$

Ainsi, tous les termes de la suite (v_n) et (w_n) sont dans I (excepté v_0 pour (v_n)).

Pour la suite, nous considèrerons (v_n) comme la suite (v_n) de premier terme $v_1 \in I$.

Comme g est croissante sur I, nos deux sous-suites (v_n) et (w_n) sont deux suites monotones (théorie générale). Il ne reste plus qu'à évaluer $v_2 - v_1$ et $w_1 - w_0$ pour obtenir le sens de variation de (v_n) et de (w_n). On a

$$w_1 - w_0 = a + \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+1}}} - \left(a + \frac{1}{a+1}\right) = a + \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+1}}} - \left(a + \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{1}}\right).$$

Le signe de $w_1 - w_0$ dépend du signe de $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+1}} - 1$:

$$\begin{aligned}\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+1}} - 1 &= \frac{a+1}{a(a+1)+1} - \frac{a(a+1)+1}{a(a+1)+1} \quad \text{avec } a(a+1)+1>0\\ &= \frac{-(a+1)(a-1)-1}{a(a+1)+1}.\end{aligned}$$

Or l'expression $-(a+1)(a-1)$ est un trinôme du second degré pour la variable a dont la représentation graphique est une parabole dont les branches sont orientées vers le bas et de sommet $S(0, +1)$. Donc, pour tout $a > 0$,

$$\begin{aligned}-(a+1)(a-1) < 1 &\iff -(a+1)(a-1)-1 < 0\\ &\iff \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+1}} - 1 < 0\\ &\iff a + \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+1}} < a+1\\ &\iff a + \frac{1}{a+1} < \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+1}}}\\ &\iff w_1 - w_0 < 0.\end{aligned}$$

(w_n) **est une suite décroissante**.

De même, pour le signe de $v_2 - v_1$, on a

$$v_2 - v_1 = a + \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+1}}}} - \left(a + \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+1}}\right) = \left(\left(a+\frac{1}{w_1}\right) - \left(a + \frac{1}{w_0}\right)\right).$$

Or $w_1 < w_0 \Longrightarrow \dfrac{1}{w_1} > \dfrac{1}{w_0} \Longrightarrow v_2 - v_1 > 0$: (v_n) **est donc une suite croissante**.

De plus tous les termes respectifs de (v_n) et (w_n) prennent leurs valeurs dans l'intervalle stable $I = \left[a\,;\, a+\dfrac{1}{a}\right]$. Donc (v_n) est croissante et majorée par $a + \dfrac{1}{a}$ et (w_n) est décroissante et minorée par a.

D'après le théorème de convergence monotone, les deux suites convergent.

En particulier, comme nous l'avons fait dans le premier problème, ces deux suites convergent forcément vers un des points fixes de la fonction g. Remarquons que x_1, point fixe de f est également un point fixe de g :

$$f(x_1) = x_1 \implies g(x_1) = f(f(x_1)) = f(x_1) = x_1.$$

Maintenant l'équation $g(L) = L$ est équivalente à l'équation $L^2 - aL - 1 = 0$ (4) qui est exactement celle résolue pour trouver les points fixes de f.

Conclusion : x_1 est l'unique point fixe de g donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = x_1 = \lim_{n\to+\infty} w_n.$$

Les deux sous-suites paires (v_n) et impaires (w_n) de (u_n) convergent vers la même limite x_1, donc on peut conclure que (u_n) converge vers cette limite et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

Nous avons maintenant une expression générale x_1 pour exprimer la valeur du nombre représenté par cet embriquement infini d'inverses, et ceci quelque soit la valeur de a strictement positif.

Ce nombre existe bel et bien et on a, pour tout $a>0$,

$$a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\dots}}}} = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

On remarque que pout tout nombre $b\in]1;+\infty[$, il existe une unique valeur de a strictement positive telle que

$$b = a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\dots}}}} = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

2.3. Problème 3 : $a^{a^{a^{a^{\cdots}}}}$

Soit a un nombre réel strictement positif : $a>0$. On s'intéresse à l'existence du nombre suivant :

$$a^{a^{a^{a^{\cdots}}}}.$$

Comme pour les problèmes précédents, on va définir ce nombre par itération à l'aide d'une suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= a^{u_n} \end{cases}$$

Par cette modélisation, on constate que le nombre qui nous intéresse est défini comme limite de la suite numérique (u_n) et ainsi, on pourra lui donner un sens mathématique si et seulement si cette suite converge.

(u_n) est une suite récurrente d'ordre 1 et on pose

$$u_{n+1} = a^{u_n} = f(u_n)$$

avec

$$f\ :\ x\in[0;+\infty[\longrightarrow f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}.$$

La fonction f ci-dessus est bien continue et dérivable pour tout $x\in[0;+\infty[$.

Étape 1

Tout d'abord pour ce qui est du signe de f, on sait que $e^{x\ln(a)}$ est toujours strictement positif car la fonction exponentielle est toujours strictement positive.

Maintenant étudions la dérivée de f pour connaître ses variations.

$$f'(x) = \ln(a)\,e^{x\ln(a)}.$$

On sait que le signe de la dérivée nous donne les variations de f, cependant ici, on voit que selon la valeur de a, le signe de la dérivée change, car c'est le nombre $\ln(a)$ qui contrôle le signe de notre fonction. Ainsi on a :

1. Pour $0 < a < 1$, $f'(x) < 0$, car $\ln(a) < 0$.
2. Pour $1 < a < +\infty$, $f'(x) > 0$, car $\ln(a) > 0$.
3. Pour $a = 1$, $f'(x) = 1$, la valeur de la fonction est constante égale à 1.
   L'empilement pour $a = 1$ converge vers 1 ; ce n'est pas très intéressant comme résultat mais tout de même important à noter.

Nous allons étudier durant la suite de notre recherche, les deux cas possibles :

$$\underline{0 < a < 1} \quad \text{et} \quad \underline{1 < a < +\infty}.$$

Étape 2

Maintenant, nous allons chercher les potentiels points fixes de f en résolvant l'équation $L = f(L)$.

Résolution de $L = f(L)$

$$L = a^L \Longleftrightarrow e^{\ln(L)} = e^{\ln(a^L)} \Longleftrightarrow e^{\ln(L)} = e^{L\ln(a)} \Longleftrightarrow \ln(L) = L \times \ln(a) \Longleftrightarrow \frac{\ln(L)}{L} = \ln(a).$$

On voit ici que l'équation $\dfrac{\ln(L)}{L} = \ln(a)$ n'est résoluble que numériquement, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'écriture plus simple (utilisant les fonctions de référence à notre niveau et des relations mathématiques de base) pour exprimer ce nombre.

Cependant, la dernière égalité et l'équivalence entre les propositions, montre que L est un point fixe pour f si et seulement si L est un antécédent de $\ln(a)$ pour la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\ln(x)}{x}$:

$$\begin{aligned} L = f(L),\ L > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\ln(L)}{L} = \ln(a) \\ &\Longleftrightarrow \quad L \text{ est un antécédent de } \ln(a) \text{ pour la fonction } x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \frac{\ln(x)}{x}. \end{aligned}$$

Il suffit donc, pour montrer l'existence de points fixes pour f, de montrer qu'il existe des antécédents de $\ln(a)$ pour la fonction $h : x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Étude de la fonction $h : x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Tout d'abord, calculons sa fonction dérivée pour pouvoir ensuite obtenir ses variations et donc voir les valeurs possibles que peut prendre $\ln(a)$.

$$h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Cherchons maintenant son signe selon x. : d'une part $x^2 > 0$ pour tout x ; d'autre part

$$1 - \ln(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln(x) < 1 \Longleftrightarrow 0 < x < e^1.$$

On voit donc que f' prend des valeurs positives pour $0 < x \le e^1$.

Nous pouvons maintenant dresser son tableau de variation complet :

x	0	1	e^1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

La lecture du tableau de variation montre alors que l'équation $\dfrac{\ln(x)}{x} = \ln(a)$ admet une (des) solution(s) si et seulement si

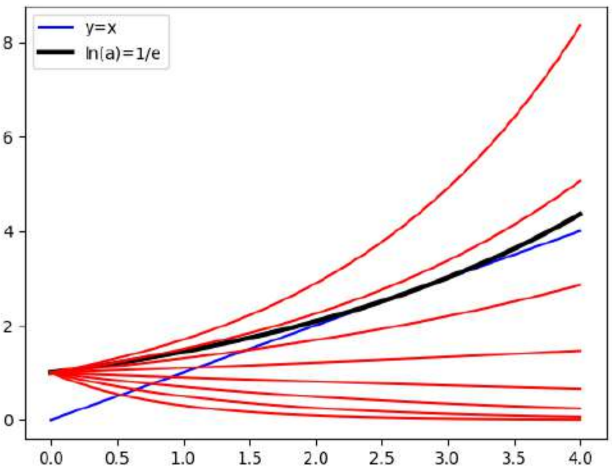
$$\ln(a) \leq \frac{1}{e} \iff 0 \leq a \leq e^{e^{-1}}.$$

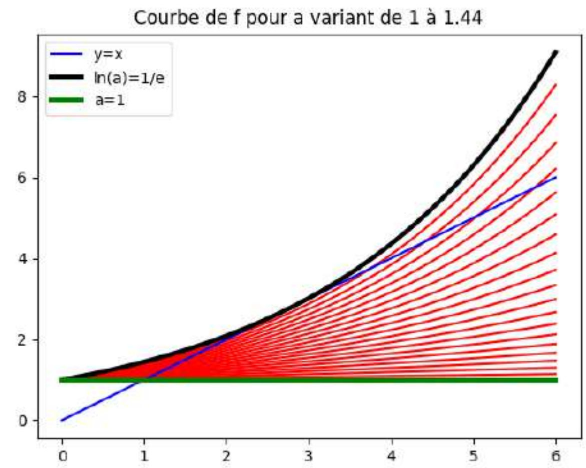
(Remarque : $\frac{1}{e} = e^{-1}$)

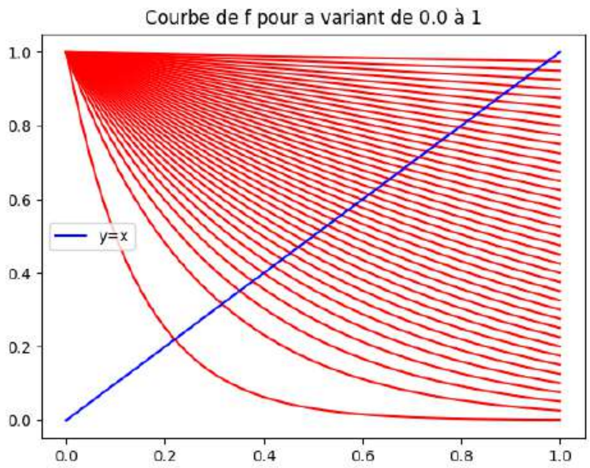
Finalement,

1. Pour $a \in \left]0\,;1\right[$, on a l'existence d'un unique point fixe L avec $0 < L < 1$.
2. Pour $a \in \left]1\,;e^{e^{-1}}\right[$, on a l'existence de deux points fixes L_1 et L_2 avec $1 < L_1 < e^1 < L_2$.
3. **Pour $a > e^{e^{-1}}$, il n'y a pas de point fixe pour la fonction f, donc la suite est divergente.**

On va appuyer notre preuve à l'aide d'un graphique sur lequel on voit à partir de quel moment $f(L) = L$ n'admet plus de solutions.



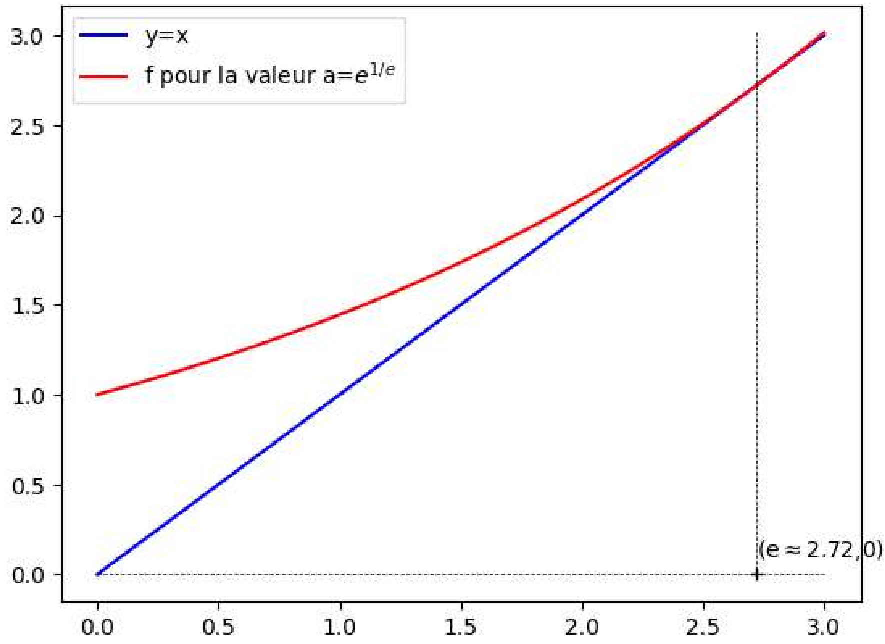




Remarque : Pour $a = e^{e^{-1}}$, on a : $f(x) = e^{x\ln(e^{1/e})} = e^{x/e}$. On pose $L = e$, d'où $f(L) = e^{e/e} = e^1 = L$. Pour $a = e^{e^{-1}}$ le point fixe est $L = e^1$.

Cela nous montre que le seul point fixe possible pour $a \in \left]1\,;e^{e^{-1}}\right]$ est L_1 car L_2 est supérieur à la limite de l'empilement pour $a = e^{e^{-1}}$ (5).

Graphiquement, on trouve, arrondi à 10^{-2}, la même limite.



Étape 3

Etablissons maintenant un intervalle stable pour nos deux cas $0 < a < 1$ et $1 < a \leq e^{e^{-1}}$. (Car on a vu que pour tout a au dessus de $e^{e^{-1}}$, la suite ne converge pas).

Pour $0 < a < 1$:
Par l'étude des variations de f, on voit que la fonction prend ses images dans l'intervalle $[0;1]$, ce qui fait qu'on peut dès à présent dresser l'intervalle stable dans lequel sont compris toutes les valeurs de (u_n). Pour $0 < a < 1$, $I = [0;1]$ est stable pour f.

Pour $1 < a \leq e^{e^{-1}}$

Montrons que $I = [1;e^1]$ est un intervalle stable pour f. On a

$$\begin{aligned}1 <\leq x \leq e^1 \text{ et } 1 < a \leq e^{e^{-1}} &\Longleftrightarrow 1 \leq x \leq e^1 \text{ et } 0 < \ln(a) \leq \frac{1}{e}\\ &\Longrightarrow 0 < x\ln(a) \leq 1 \text{ par multiplication terme à terme}\\ &\Longrightarrow 1 < e^{x\ln(a)} \leq e^1 \text{ par composition avec la fonction exponentielle}\\ &\Longrightarrow 1 < f(x) \leq e^1.\end{aligned}$$

Pour $1 < a \leq e^{e^{-1}}$, $I = [1;e^1]$ est stable pour f.

Étape 4

Après avoir caractérisé l'existence de points fixes pour f et défini un intervalle stable dans nos deux cas, nous pouvons maintenant étudier le comportement de (u_n) sur ces intervalles. Pour cela nous allons nous appuyer sur le critère de convergence suivant dans le cas des suites récurrentes d'ordre 1.

Soient I un intervalle réel et $f : I \longrightarrow$ une fonction dérivable sur I.
On suppose que L est un point fixe de f sur I. Le comportement des suites récurrentes définies par $u_0 \in I$ (et même u_0 "proche" de L) et $u_{n+1} = f(u_n)$, **dépend de** $f'(L)$.

Définition

On dit que L est **attractif** si $|f'(L)| < 1$. On dit qu'il est **répulsif** si $|f'(L)| > 1$ (6).

Critère de convergence

Soient I un intervalle réel et $f : I \longrightarrow I$ une fonction dérivable sur I avec f' continue en L. On considère $V_L \subset I$ un **voisinage** de L.

1. Si L est un point fixe **attractif** de f, et $u_0 \in V_L$, alors la suite (u_n) **converge vers** L.
2. Si L est un point fixe **répulsif** de f, alors la suite (u_n) **ne peut converger vers** L **que si elle stationne en** L.
3. Le cas $|f'(L)| = 1$ peut donner lieu à l'un ou l'autre des comportements précédents.

La suite de l'étude consiste donc établir, pour chaque cas $a \in]0;1[$ ou $a \in]1;e^1[$, s'il existe un point fixe pour f **attractif**.

2.3.1 Pour $1 < a \leq e^{e^{-1}}$, $I = [1;e^1]$ est stable par f

On a

$$|f'(x)| = \ln(a) \times e^{x\ln(a)},$$

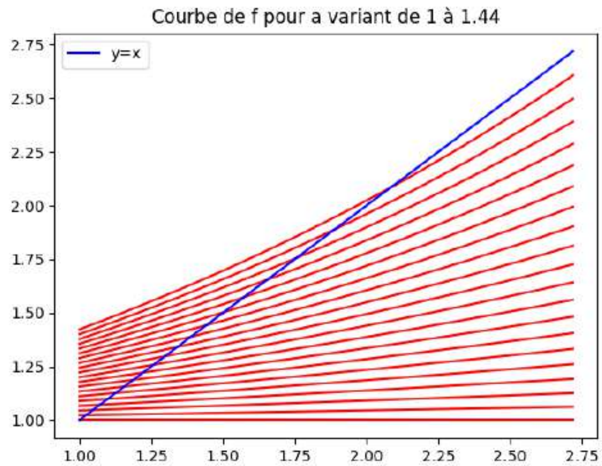
avec pour tout $a \in \left]1; e^{e^{-1}}\right[$,

$$\begin{cases} 0 < \ln(a) < e^{-1} & (1) \\ L_1 \text{ point fixe pour } f,\ 1 < L_1 < e \text{ et } \ln(L_1) = L_1 \times \ln(a) & (2) \end{cases}$$

Ainsi, si L_1 est le point fixe de f pour $a \in \left]1; e^{e^{-1}}\right[$,

$$\begin{aligned} |f'(L_1)| &= \ln(a) \times e^{L_1 \ln(a)} \\ &= \ln(a) \times e^{\ln(L_1)} && \text{avec (2)} \\ &= \ln(a) \times L_1 \\ &= \ln(L_1) && \text{avec (2)} \end{aligned}$$

d'où $0 < |f'(L_1)| < 1$ car $1 < L_1 < e$.



On peut donc conclure que pour tout $a \in \left]1; e^{e^{-1}}\right[$, l'unique point fixe de f **est toujours attractif**.

De plus f étant croissante sur l'intervalle $I = [1;e^1]$ stable pour f, on sait que la suite (u_n) est monotone sur cet intervalle borné, donc **convergente vers son seul point fixe possible** L_1 (7).

2.3.2 Pour $0 < a < 1$, $I = [0;1]$ est stable par f

On sait que f est **décroissante** sur notre intervalle stable I donc (u_n) n'est pas monotone, ce qui signifie que l'on va devoir étudier la convergence des deux sous-suites paires et impaires associées à (u_n) pour conclure sur la convergence de la suite (u_n).

Cependant, en premier lieu, **étudions le caractère "attractif" ou "répulsif" de l'unique point fixe** $L \in [0;1]$ associée à une valeur de $a \in]0;1[$. On a

$$|f'(x)| = -\ln(a) \times e^{x\ln(a)}$$

avec pour tout $a \in]0;1[$

$$\begin{cases} 0 < -\ln(a) < +\infty & (3) \\ L \text{ point fixe pour } f,\ 0 < L < 1 \text{ et } \ln(L) = L \times \ln(a). & (4) \end{cases}$$

Ainsi, si L est le point fixe de f pour $a \in \,]0;1[$,

$$\begin{aligned}
|f'(L)| &= -\ln(a) \times e^{L\ln(a)} \\
&= -\ln(a) \times e^{\ln(L)} && \text{avec (4)} \\
&= -\ln(a) \times L \\
&= -\ln(L) && \text{avec (4)}
\end{aligned}$$

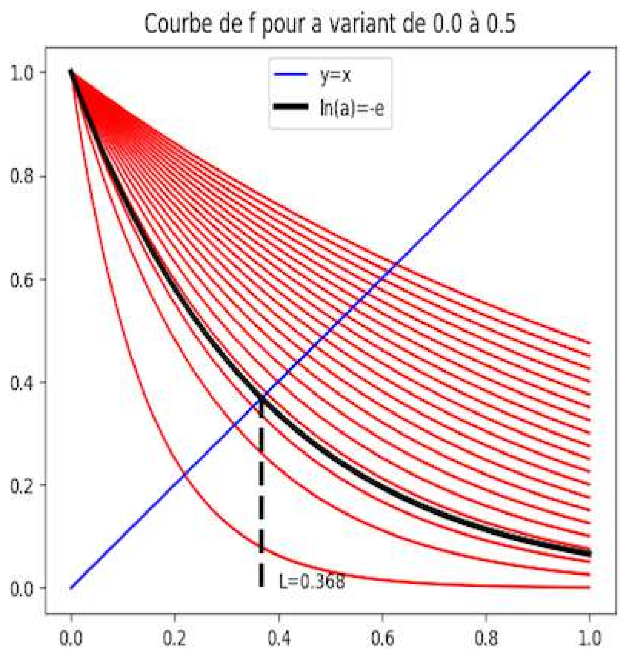
d'où $|f'(L)| < 1 \Longleftrightarrow -\ln(L) < 1 \Longleftrightarrow L > e^{-1} \approx 0.368$.

Donc L est **un point fixe attractif** pour f si et seulement si $L > e^{-1}$.

De plus

$$\left\{\begin{array}{rcl} L & > & e^{-1} \\ |f'(L)| & = & -\ln(a) \times L < 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} L & > & e^{-1} \\ -\ln(a) \times e^{-1} & < & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} L & > & e^{-1} \\ a & > & e^{-e} \end{array}\right.$$

Finalement L est **un point fixe attractif** pour f si et seulement si $a > e^{-e} \approx 0.066$.



Autrement dit, pour $a < e^{-e}$, f **n'admet pas de point fixe attractif** et la suite (u_n) **est divergente** !
Nous pouvons donc nous intéresser uniquement au cas $e^{-e} < a < 1$ pour étudier l'éventuelle convergence de la suite (u_n).

2.3.3 Etude de la convergence de (u_n) – Pour $e^{-e} < a < 1$, $I = [0;1]$ est stable par f

On va définir la fontion g, comme dans l'étude du problème 2, en posant pour tout $x \in [0;1]$

$$g(x) = f \circ f(x) = a^{a^x}.$$

Le signe de g est positif comme celui de f tant que $a > 0$.

Nous n'avons pas besoin de calculer la dérivée de g pour obtenir ses variations car la composée de deux fonctions décroissante donne une fonction croissante. Donc g est croissante sur I.

x	0 $\qquad\qquad$ 1
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$a \nearrow f(a)$

<u>Remarque</u> : On a $g(0) = a = f(1)$ et $g(1) = f(a)$. Donc pour $0 < a < 1$, on a bien $f(0) > f(1)$ puisque f est décroissante sur I et $g(0) < g(1)$.

Intéressons nous maintenant **aux éventuels points fixes pour** g sur l'intervalle $I = [0;1]$.

<u>**Étude des points fixes de $g = f \circ f$**</u>

1. Il est assez clair que l'unique point fixe pour f sur I est un point fixe pour g sur I :
$$\begin{aligned} L \text{ est un point fixe pour } f \text{ sur} I &\iff f(L) = L \\ &\iff f(f(L)) = f(L) = L \\ &\iff g(L) = f(L) = L \end{aligned}$$
2. Par contre il pourrait exister d'autres points fixes pour g qui ne le serait pas pour f !
3. Soit L un point fixe de g. Alors,
$$\begin{aligned} g(L) = L &\iff f(f(L)) = L \\ &\implies f \circ f(f(L)) = f(L) \quad \text{par composition par } f. \\ &\iff g(f(L)) = f(L) \\ &\iff f(L) \; \text{ est un point fixe pour } g. \end{aligned}$$
4. Conclusion
   (a) Tout point fixe pour f est un point fixe pour g.
   (b) Si L est un point fixe pour g, alors $f(L)$ est aussi un point fixe pour g.

<u>**Résolution de $g(L) = L$**</u>

$$\begin{aligned} g(L) = L &\iff e^{e^{L\ln(a)}\ln(a)} = L \\ &\iff e^{L\ln(a)}\ln(a) = \ln(L) \\ &\iff f(L)\ln(a) = \ln(L) \\ &\iff \ln(a) = \frac{\ln(L)}{f(L)} \quad \text{car} f(x) > 0 \text{ pour tout } x \in [0;1] \\ &\iff \frac{\ln(L)}{f(L)} - \ln(a) = 0 \\ &\iff L \text{ est un antécédent de 0 pour la fonction } x \in]0;1[\longrightarrow \frac{\ln(x)}{f(x)} - \ln(a). \end{aligned}$$

Il suffit donc, pour montrer l'existence de point fixe pour g, de montrer qu'il existe des antécédents de 0 pour la fonction $k \,:\, x \in]0;1[\longrightarrow \dfrac{\ln(x)}{f(x)} - \ln(a)$.

Étude de la fonction $k : x \in]0;1[\longrightarrow \dfrac{\ln(x)}{f(x)} - \ln(a)$

Pour tout $x \in]0;1[$,

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{\frac{1}{x}f(x) - \ln(x)f'(x)}{f(x)^2} + 0 \\ &= \frac{\frac{1}{x}f(x) - \ln(x)\ln(a)f(x)}{f(x)^2} \qquad \text{car } f'(x) = \ln(a)f(x) \\ &= \frac{1}{xf(x)} \times \big(1 - x\ln(x)\ln(a)\big) = \frac{k_1'(x)}{k_2'(x)}. \end{aligned}$$

Pour tous $x \in]0;1[$ et $a \in]0;1[$, on a $k_2'(x) = xf(x) > 0$.
Par contre le terme $k_1'(x) = (1 - x\ln(x)\ln(a))$ peut éventuellement changer de signe.

Étude de la fonction $k_1' : x \in]0;1[\longrightarrow 1 - x\ln(x)\ln(a)$

Le tableau de variation de cette fonction est ci-dessous :

x	0		e^{-1}		1
$(k_1'(x))'$		$-$	0	$+$	
$k_1'(x)$	1	$\searrow$	$1 + \dfrac{\ln(a)}{e}$	$\nearrow$	1

Le signe de k' dépend donc du signe du nombre

$$k_1'(e^{-1}) = 1 + \frac{\ln(a)}{e} \quad \begin{cases} \geq 0 \text{ si } a \in [e^{-e};1[\\ \leq 0 \text{ si } a \in]0;e^{-e}]. \end{cases}$$

Considérons maintenant $a \in]e^{-e};1[$ (Possibilité de convergence pour (u_n) (8)).
On a $k'(x) > 0$ pour tout $x \in]0;1[$, d'où le tableau de variation pour la fonction k :

x	0		1
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\ln(a)$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution dans l'intervalle $]0;1[$ à l'équation $k(x) = 0$ (car $-\ln(a) > 0$) (9).

Ainsi g possède un unique point fixe qui est l'unique point fixe pour f sur $]0;1[$. De plus, ce point fixe est attractif.

Considérons maintenant nos deux sous-suites paires et impaires associées à (u_n) :

$$(v_n) \text{ définie par} \begin{cases} v_0 &= u_0 &= a \in]0;1[\\ v_{n+1} &= g(v_n) &= u_{2n} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad (w_n) \text{ définie par} \begin{cases} w_0 &= u_1 &= f(a) \in]0;1[\\ w_{n+1} &= g(w_n) &= = u_{2n+1} \end{cases}$$

$I =]\,0\,;1\,[$ est un intervalle stable pour g.
g étant croissante sur I, les sous-suites (v_n) et (w_n) **sont monotones et bornées** (puisque I est stable pour g).

Toutes deux convergent donc vers l'unique point fixe attractif pour g, et finalement il en est de même pour (u_n).

2.4. Conclusion au problème 3

L'empilement infini suivant $a^{a^{a^{\cdots}}}$ représente bien un nombre réel pour $e^{-e} < a \leq e^{e^{-1}}$, avec $e^{-e} \approx 0.066$ et $e^{e^{-1}} \approx 1.445$. Pour $a = e^{-e}$ l'existence de l'empilement n'a pas été déterminé.
Pour les autres cas, cette écriture n'est pas représentative d'un nombre réel.

3. Conclusion

Dans cet article, pour chacun des trois empilements donnés, le but a été de chercher pour quelles valeurs de a, avec $a > 0$, l'empilement considéré est bien défini au sens mathématique, c'est à dire qu'il existe un nombre se cachant derrière l'expression.
Les 3 empilements ont été étudiés au travers de leur modélisation sous la forme de suites récurrentes d'ordre 1, pour laquelle une méthode exhaustive permet de déterminer la convergence ou non d'une telle suite :
Pour le premier empilement

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}},$$

on a montré la convergence de la suite associée pour tout $a > 0$ vers le nombre L ci-dessous :

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}} = L = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Pour le second empilement,

$$a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ldots}}}},$$

on a montré la convergence de la suite associée pour tout $a > 0$ vers le nombre L ci-dessous :

$$a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ldots}}}} = L = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

Enfin, pour le dernier empilement,

$$a^{a^{a^{a^{\cdots}}}}$$

1. Pour $a \in \,]\,e^{-e}\,;1\,[$, on a l'existence d'un unique point fixe L avec $0 < L < 1$ et la convergence de la suite (u_n) associée, donc l'empilement est bien défini et sa valeur vaut L.
2. Pour $a \in \left]1; e^{e^{-1}}\right]$, on a l'existence de deux points fixes L_1 et L_2 avec $1 < L_1 < e^1 < L_2$ et la convergence de la suite (u_n) associée, cependant on a vu que seul L_1 pouvait être la limite de la suite car L_2 est supérieur à la limite de $a = e^{e^{-1}}$ qui est le plus haut terme de l'intervalle. De ce fait, l'empilement pour $a \in \left]1; e^{e^{-1}}\right]$ converge vers L_1.

3. Pour $a > e^{e^{-1}}$ et $a < e^{-e}$, il n'y a pas de point fixe ou il y a un point fixe répulsif pour la fonction f, donc la suite est divergente, de ce fait, pour ces valeurs, l'empilement n'a pas de sens mathématique.
4. Pour $a = 1$, l'empilement vaut 1, et pour $a = e^{-e}$ l'existence de l'empilement n'a pas été déterminé.

3.1. Piste à creuser

Pour ce qui est des potentielles pistes pour aller plus loin dans la recherche, il serait intéressant d'essayer de déterminer si la suite récurrente représentant le deuxième empilement possède une limite pour des a négatifs, mis à part pour le cas $a = -1$. Il serait aussi judicieux de déterminer pour le 3ème problème, si pour $a = e^{-e}$, l'empilement existe, car c'est le seul cas non traité.

Notes d'édition

(1) A priori, il faut aussi montrer que (u_n) est minorée par u_0. C'est bien le cas car il est montré à l'étape 4 que (u_n) est croissante.

(2) La fonction f étant croissante, $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ a le même signe que $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \geq 0$, donc $u_{n+1} - u_n$ a un signe constant et la suite est monotone ; elle est croissante si $u_1 \geq u_0$.

(3) Avec f décroissante, $u_{n+1} - u_n$ et $u_{n+2} - u_{n+1}$ sont de signes opposés donc la suite n'est pas monotone. Par contre, comme expliqué juste après, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) s'obtiennent par la récurrence définie par la fonction $g = f \circ f$ et cette fonction est croissante, donc elles sont monotones ; leurs monotonies sont contraires car $u_{2n+2} - u_n$ et $u_{2n+3} - u_{2n+1} = f(u_{2n+2}) - f(u_n)$ sont de signes opposés.

(4) La vérification que l'équation $g(L) = a + \frac{1}{a+\frac{1}{L}} = L$ est équivalente à $L^2 - aL - 1 = 0$ est laissée au lecteur.

(5) Il n'a pas encore été montré que l'empilement converge pour $a = e^{1/e}$ (voir note 7). Plus simplement, lorsque $1 \leq a \leq e^{1/e}$, il est montré à l'étape 3 que l'intervalle $I = [1; e]$ est stable par f et, comme $u_0 = a \in I$, on a $1 \leq u_n \leq e$ pour tout $n \geq 0$. Si $a < e^{1/e}$, on a $L_2 > e$ donc la suite ne peut pas converger vers L_2.

(6) La définition de "attractif" [ou "répulsif"] est plutôt qu'il existe un voisinage V_L de L (au moins un petit intervalle ouvert contenant L) pour lequel la propriété 1 [ou 2x] qui suit est vérifiée, et les conditions sur la dérivée sont plutôt des conditions suffisantes. Elles permettent de majorer [ou de minorer] $|u_{n+1} - L|$ en fonction de $|u_n - L|$ lorsque u_n est suffisamment proche de L.

(7) Cette conclusion s'applique encore au cas limite $a = e^{1/e}$. Alors, avec $L = e$, $f'(L) = 1/\ln L = 1$ donc on ne peut plus dire que le point fixe L est attractif, mais on a toujours que f est croissante et que l'intervalle I est stable, avec $u_0 \in I$, ce qui suffit à impliquer que la suite est monotone et bornée, donc convergente.

(8) Rappelons qu'on a écarté au § 2.3.2 le cas $a < e^{-e}$ où la suite diverge car alors le point fixe de f est répulsif.

(9) C'est le fait que k est strictement croissante qui implique que la solution de $k(x) = 0$ est unique.