Involution/Révolution

Année 2023 – 2024

Alya Swiech, Lola Maquiné, João Vitor Hister, Sandra Kaczmaczyk, élèves de 2nd et 1ère

Établissement : Lycée Alfred Mézières, Longwy (54)

Enseignant : Emmanuel Dubois

Chercheur : Bruno Teheux

Présentation du sujet :

- Faire un modèle mathématique d'un jeu proposé par le chercheur
- Trouver un algorithme de résolution
- Trouver un algorithme qui donne des solutions optimales
- Cartes impossibles

La composition du jeu et explication

Le jeu est composé de 14 jetons, 4 roses, 4 violets, 2 verts, 2 jaunes, 1 blanc ainsi qu'1 noir. Ceux-ci, selon les cartes, sont disposés sur un plateau qui nous sert de support. Pour déplacer les pions, nous disposons d'une roue qui permet de déplacer 4 jetons en même temps sur des rotations de 90°. Elle se place, par ailleurs, sur les encoches au milieu du plateau. Pour finir, comme dit précédemment, il y a, dans le jeu, des cartes qui permettent de définir la position de départ des jetons ainsi que la position finale dans laquelle les jetons doivent se retrouver à la fin. Le but étant donc de réaliser ces cartes avec le moins de mouvement possible.

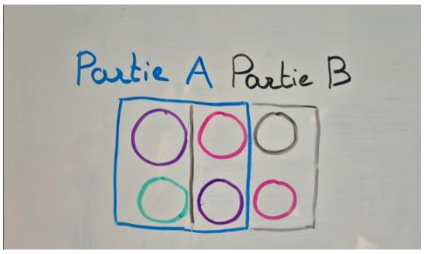
Le modèle mathématique

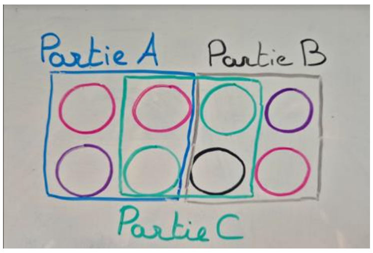
Qu'est-ce qu'un modèle mathématique ?

Un modèle mathématique est une représentation simplifiée et abstraite d'un système réel utilisant des concepts mathématiques tels que des équations, des fonctions, des graphiques ou des statistiques. Il permet de comprendre, analyser et prédire le comportement de ce système en utilisant des outils mathématiques. En l'occurrence, pour nous il s'agit d'un modèle mathématique du jeu présenté que nous présentons.

Comment l'avons-nous réalisé ?

Pour notre part, nous avons réalisé un modèle assez simple qui est simplement décomposé en différentes parties pour communiquer plus facilement sur la position de la roue.





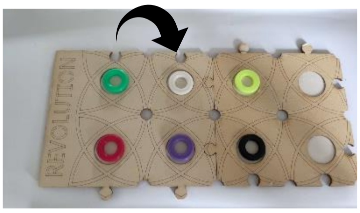
Trouver un algorithme de résolution

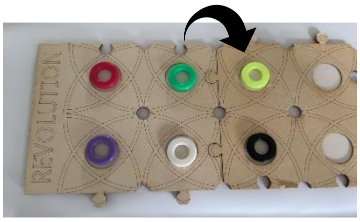
A l'aide de nos différentes recherches, nous obtenons quelques permutations qui peuvent être utile pour résoudre certaines cartes. Nous essayons également de les optimiser au maximum puisque cela reste tout de même le but du jeu.

Légende :
: Rotation de 90° à droite
x2 : Faire le mouvement 2 fois

Permutation en ligne avec 6 jetons

La permutation en ligne avec 6 jetons permet d'inverser la ligne du bas avec celle du haut.





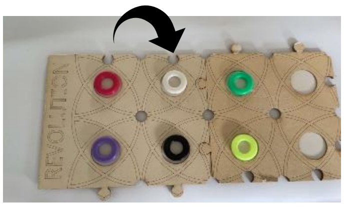
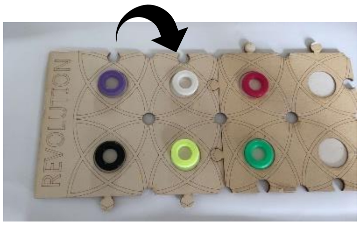
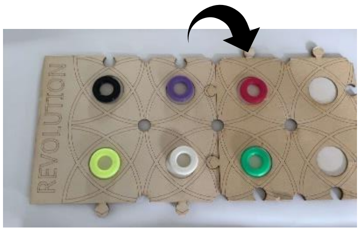


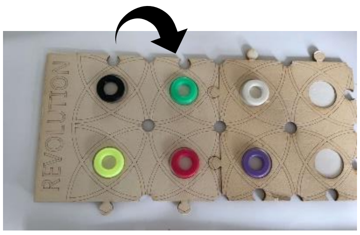
Figure de départ



x2



x2



x2

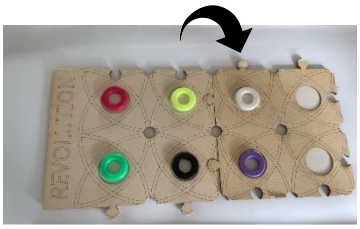
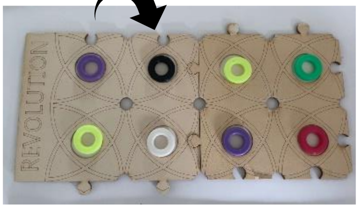


Figure d'arrivée

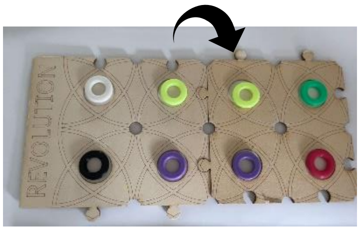
Permutation et inversion des colonnes aux extrémités

Cette permutation permet d’échanger et d’inverser les colonnes aux extrémités.

x2



x2



x2

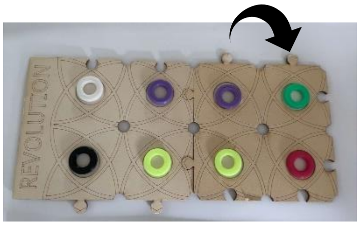
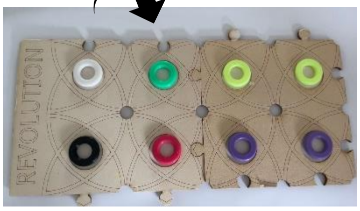


Figure de départ

x2

x2



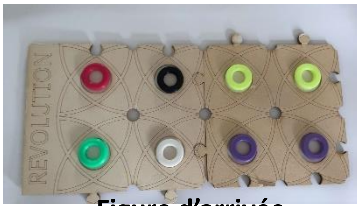


Figure d’arrivée

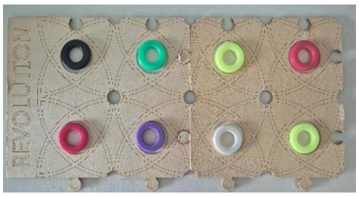
Permutation en ligne avec 8 jetons

Cette permutation permet également d’inverser la ligne du bas avec celle du haut mais cette fois-ci avec 8 jetons au total.

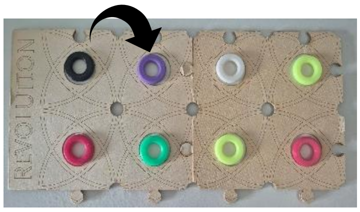
Permutation en ligne de 6 sur partie A

Figure de départ

Permutation en ligne de 6 sur partie B



x2

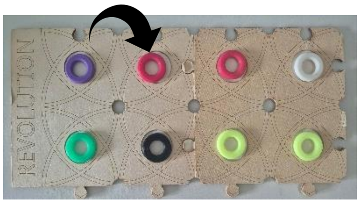


x2

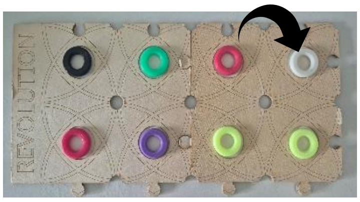
Permutation en ligne de 6 sur partie A

Permutation en ligne de 6 sur partie B

x2



x2



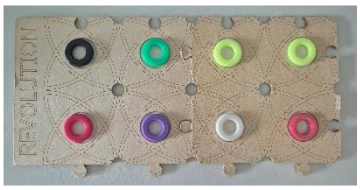


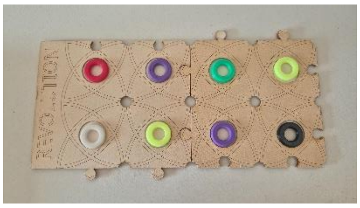
Figure d’arrivée

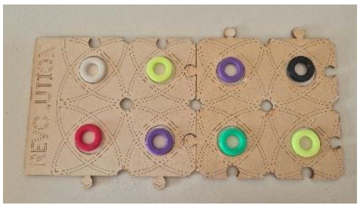
Permutation d’une colonne d’une extrémité

Cette permutation-ci permet d’échanger seulement 2 jetons d’une colonne d’un des 2 extrémités.

Permutation en ligne de 8

Permutation en ligne de 6 sur partie B





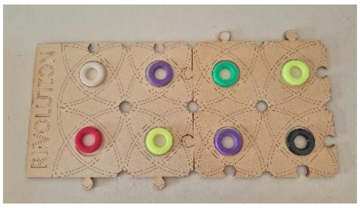


Figure de départ

Figure d’arrivée

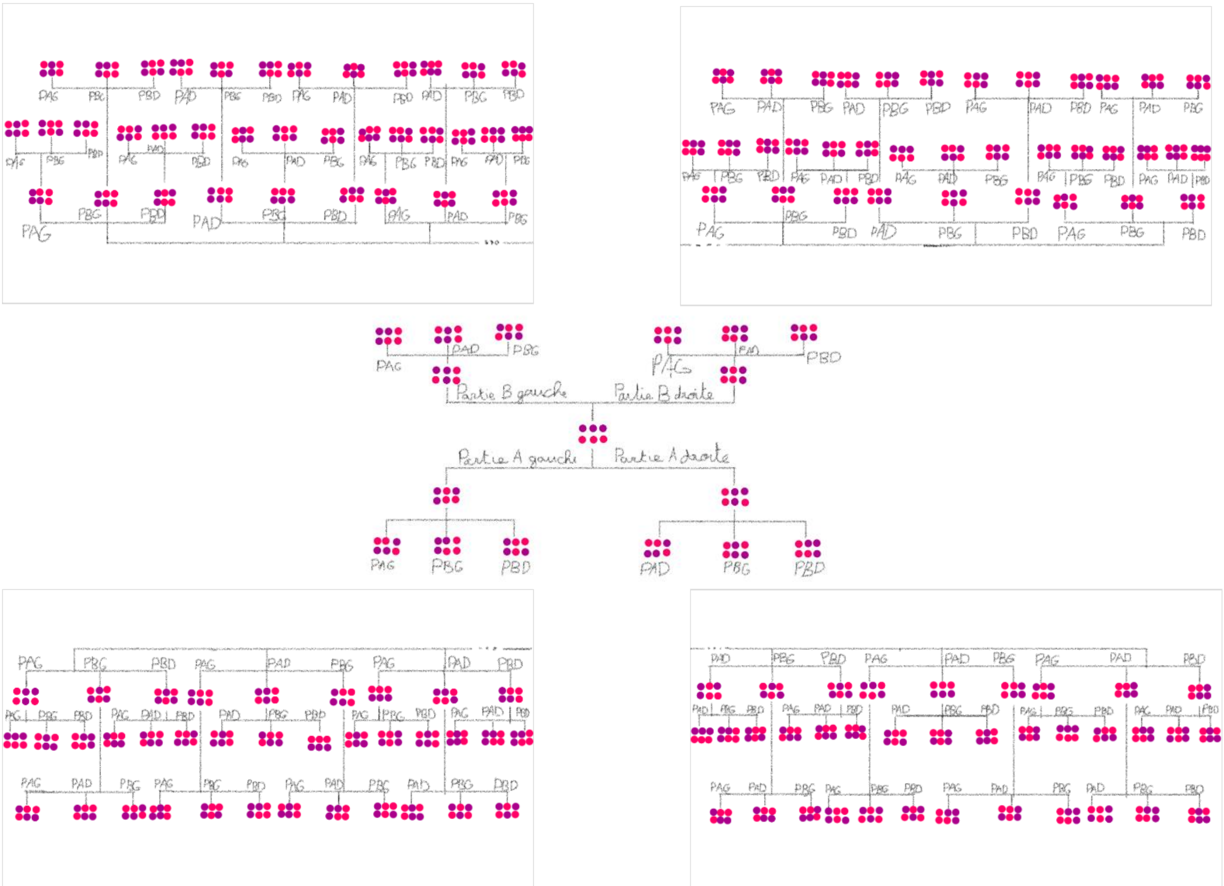
A noter que si l’on veut, inverser uniquement la colonne à l’extrémité de droite, il suffit de faire la permutation en ligne de 6 sur la partie A.

Trouver un algorithme de résolution optimale

Pour trouver un algorithme de résolution optimal, nous avons dû prendre en compte les différents critères présents dans les cartes qui sont plus ou moins complexes à réaliser. En d'autres termes, en fonction de la complexité de la carte les conditions de l'algorithme changent.

Pour cet algorithme, nous avons décidé de travailler uniquement sur des cartes de 6 jetons possédant 3 jetons violets ainsi que 3 jetons roses puisque cela réduit le nombre de position au minimum et nous pouvons le voir avec le calcul suivant : $\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!3!}=\frac{6\,x5\times4}{3\times2}=20$.

Nous avons répertorié les 20 positions ainsi que tous les chemins possibles entre elles dans un tableau :



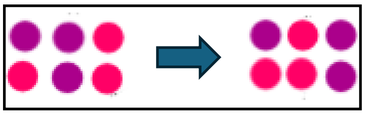
Légende :
PAG : Partie A rotation de 90° vers la gauche
PAD : Partie A rotation de 90° vers la droite
PBG : Partie B rotation de 90° vers la gauche
PBD : Partie B rotation de 90° vers la droite

Comme vous pouvez l'observer, ce tableau à l'allure d'un arbre généalogique. Le principe est de toujours partir du même emplacement que nous nommerons la « position pivot » c'est-à-dire la position située au centre composé de 3 jetons violets sur la ligne du haut ainsi que 3 jetons roses sur la ligne du bas.

Nous partons donc de cette position et en utilisant le modèle mathématique créé, vu précédemment, nous communiquerons avec les parties A ou B qui correspondent au placement de la roue sur le plateau. Un deuxième paramètre doit être pris compte, c'est celui de la rotation qu'elle va faire, en l'occurrence 90° à gauche ou à droite. Etant donné ces 4 possibilités, cela correspondra donc aux quatre branches principales qui apparaissent. Cependant, les 4 branches apparaîtront uniquement dans la première génération puisqu'il est inutile de faire le mouvement contraire à celui réalisé auparavant donc nous l'avons supprimée des générations suivantes pour éviter des répétitions inutiles.

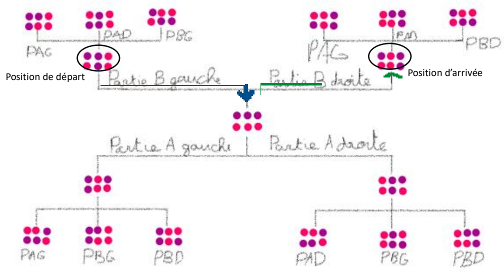
Maintenant, il faut comprendre à quoi cela nous sert. Ce tableau va nous permettre de passer de n'importe quelle position à une autre et c'est là que la position pivot prend son importance. En effet, lorsque l'on souhaite partir de la position de départ pour arriver à la position finale, il suffit de faire le chemin en sens inverse, autrement dit, faire les mouvements contraire (mais l'on place la roue toujours au même endroit) en direction de la position pivot puis lorsque nous atteignons la branche nous permettant d'accéder à notre position finale, il faut refaire le chemin menant à celle-ci. Le but étant de minimiser le nombre de mouvement, on va donc chercher le chemin le plus rapide.

Exemple :



Voici la carte que nous devons résoudre avec un minimum de mouvement.

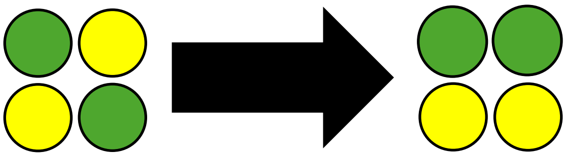
Pour se faire, nous allons réutiliser le tableau vu au-dessus et repéré nos deux figures.



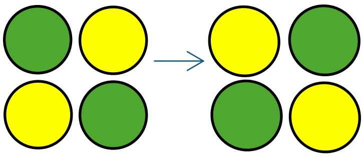
Une fois repéré, nous faisons le chemin en sens inverse représenter en bleu c'est-à-dire le mouvement PBD qui nous ramène à notre position pivot, puis nous faisant le chemin à l'endroit représenté en vert jusque la position d'arrivée, c'est-à-dire le mouvement PBD.

Carte impossible :

Nous avons réalisé une carte qui nous paraît impossible à compléter. Cette carte est composée de seulement 4 jetons qui forment un carré de 2 colonnes et 2 lignes.



Si on cherche les mouvements possibles sur cette formation en carré, les seuls mouvements possibles sont les rotations de gauche et droite, cependant, peu importe le mouvement, il est impossible d'obtenir cette disposition à l'aide de ces uniques mouvements.



Pour cette disposition-ci, nous pouvons observer qu'elle peut être réalisé avec une rotation de gauche ou de droite.

En outre, cela nous démontre bien que l'on ne peut changer 2 jetons d'une colonne sur 4 jetons si l'on n'utilise pas un autre espace.

En effet, si l'on divise les différentes parties, ici A et B nous pouvons constater que dans la figure de départ certaines combinaisons de jetons forment des lignes puis ces mêmes combinaisons sont à l'arrivée des diagonales.

Elle est donc impossible à réaliser.