Captain Kirk

Année 2023– 2024

Manon Desiaume, Théo Doc, Dorian Echasseriau, Vianney Fleuriet, Lucie Mallet,
Elliott Poisson, Ange Roy-Margueritat, élèves en classe de seconde et première générale.

Établissement : Lycée Marguerite de Navarre Bourges
Enseignant·es : Olivier Crechet, Aurélie Fievez, Nathalie Herminier,Amélie Roche-Hernandez
Chercheurs : Xavier Bultel et Benjamin Nguyen de L'INSA du Centre Val-de-Loire

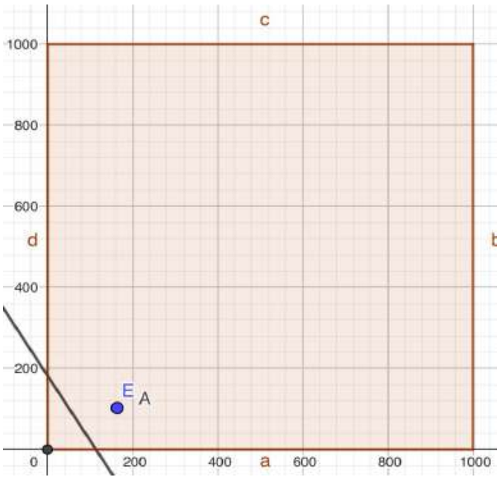
1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

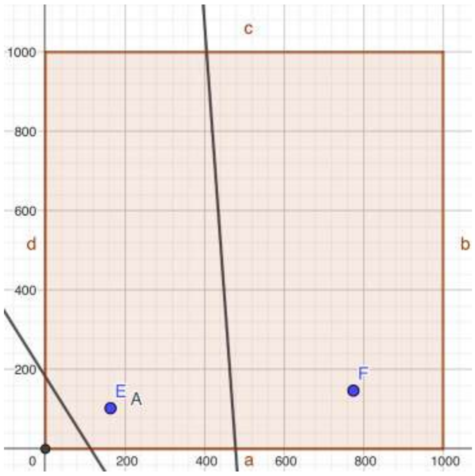
Le Captain Kirk se trouve sur une planète carrée de 1000 km par 1000 km et veut trouver une ville. Il se trouve au début dans le coin en bas à gauche de la planète. A chaque téléportation, il peut savoir grâce à une machine s'il s'est rapproché ou s'il s'est éloigné de la ville. Pour faire nos tests, nous avons principalement utilisé Géogébra qui est un logiciel permettant de tracer des figures géométriques, des droites et des segments sur un plan orthonormé. Nous avons utilisé des coordonnées pour placer les points à l'endroit exact voulu. On représente chaque téléportation par un point, s'il est plus proche le point sera bleu et s'il est plus loin le point sera rouge. Une fois que le point ne nous sert plus, il devient jaune. Le Captain Kirk considère qu'il a trouvé la ville quand elle se trouve dans un rayon de 1km autour de lui. Son objectif est de trouver la ville avec le moins de téléportations possible.

1.2. Début des recherches

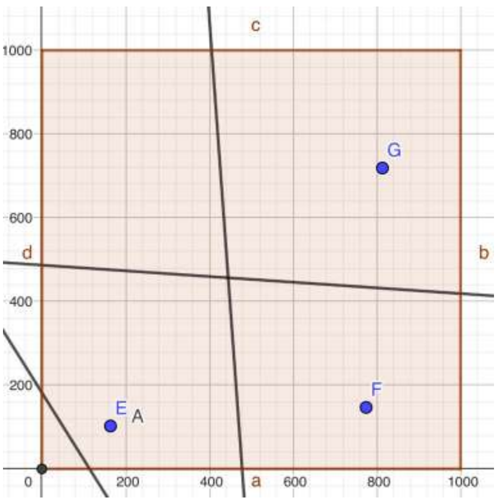
Nous nous sommes séparés en deux groupes différents pour pouvoir tester plusieurs techniques efficacement. Nous avons commencé par trouver la ville en mettant un point de téléportation, à chaque fois opposé au dernier, pour délimiter une zone de recherche. Mais l'endroit où nous devions chercher était trop flou et nous nous perdions facilement.
Par conséquent, pour plus de facilité, il fallait réduire précisément la zone de recherche, notamment avec l'utilisation de médiatrice (1) . Il est question d'une droite perpendiculaire à un segment formé par deux points de téléportation, et qui coupe le segment en son milieu. L'utilisation de médiatrice permet donc de mieux définir la zone de recherche où la ville se trouve approximativement selon si l'on s'est rapproché ou éloigné de la ville, avec d'un côté de la médiatrice la zone où la ville ne se trouve pas, et de l'autre côté de la médiatrice, l'endroit où la ville se trouve. Cependant, nous devons quelque fois utiliser un point inutile, c'est à dire un point dont la médiatrice ne nous servira pas mais qui servira d'étape pour ensuite placer un autre point qui nous avantagera mieux.



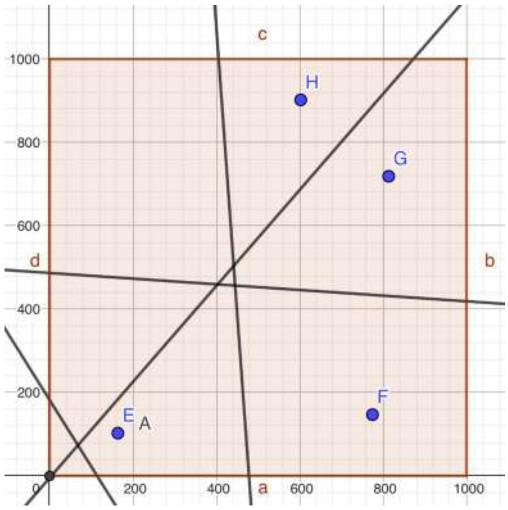
1. Ajout de la médiatrice du segment [0 ; E]



2. Ajout de la médiatrice du segment [E ; F]



3. Ajout de la médiatrice du segment [F ; G]



4. Ajout de la médiatrice du segment [G ; H]

(2)

Enfin, l'un des deux groupes a trouvé une technique prometteuse avec des triangles et nous avons donc commencé à travailler tous ensemble sur cette technique mais elle s'avérait trop longue et laborieuse. Puis, c'est après que nous avons trouvé une autre technique avec des carrés. Finalement, nous sommes revenus sur la technique des triangles car nous avions trouvé un meilleur moyen pour l'utiliser. Nous avons donc trouvé deux techniques, toutes les deux efficaces.

2. Les différentes techniques

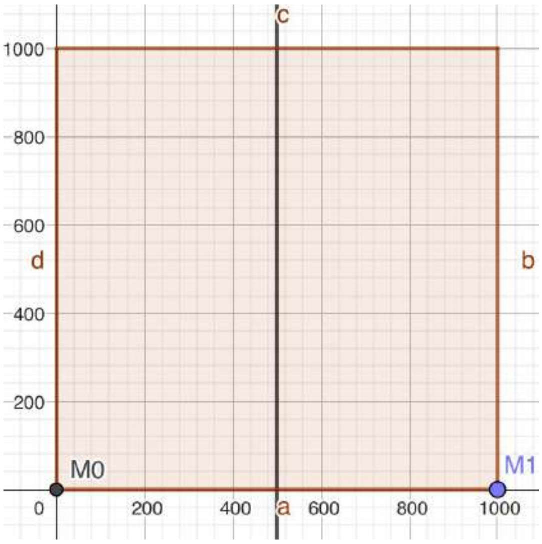
2.1. Technique des carrés

La première technique est celle des carrés. Elle est légèrement moins efficace que celle des triangles, même si nous pensions le contraire au début puisqu'elle est plus simple et plus intuitive. Cette technique consiste à diviser notre planète en 4 carrés en 2 coups, soit couper avec les médiatrices à la verticale avec une première téléportation puis de couper à l'horizontale avec la deuxième téléportation (ou l'inverse).

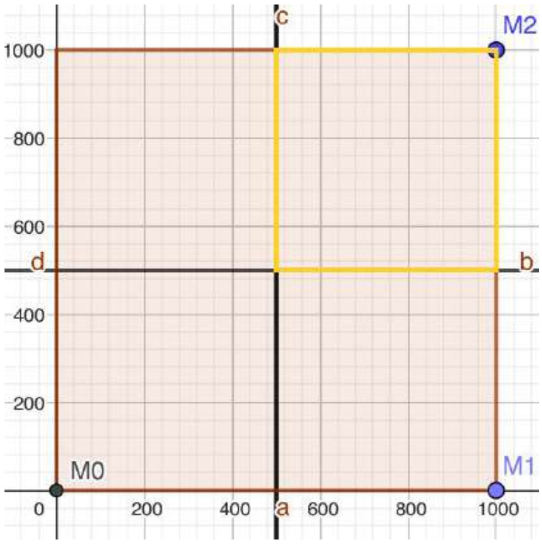
Au début, on commence toujours de la même manière, c'est à dire qu'on se place en (0;1000), soit à l'opposé du point de départ en (0 ; 0) sur la même ligne, ce qui coupe notre planète à la verticale pour faire 2 zones distinctes de 500 000 km^2 chacune. Si le point est bleu, la ville est plus près du point actuel donc elle se trouve dans la moitié à droite. Au contraire, si le point est rouge, la ville est plus près du point d'avant donc, elle se trouve dans la moitié gauche.

On continue ensuite en mettant notre deuxième point en (1000 ; 1000), ce qui permet de couper encore une fois en deux mais cette fois à l'horizontale. Si notre point est bleu, la ville est plus proche du point actuel, la ville est donc dans la moitié en haut et si le point est rouge, alors la ville est plus près du point de téléportation précédent. La ville est donc dans la moitié basse de notre planète.

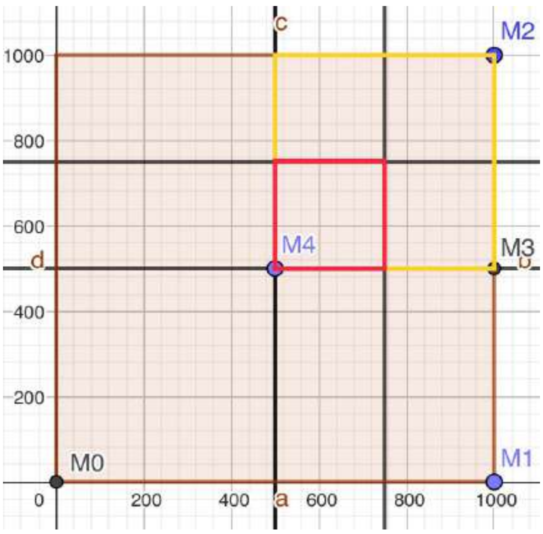
En combinant ces informations, on sait si notre ville se trouve dans le carré en bas à gauche, en bas à droite, en haut à gauche ou en haut à droite. Ainsi, en seulement deux coups on a réussi à réduire notre zone de recherche pour qu'elle atteigne 250 000 km^2. On répète ensuite cela jusqu'à trouver la ville (si on tombe dessus par chance au cœur du processus) ou lorsque la zone est assez petite, c'est à dire quand le carré rentre dans le rayon de recherche de 1 km.



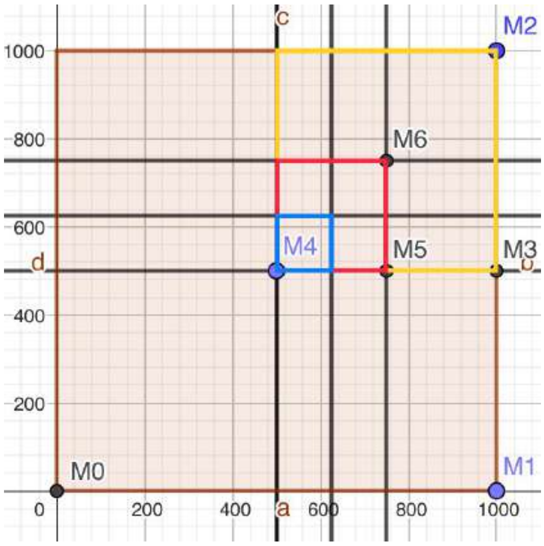
1. Ajout de la médiatrice du segment [M0 ; M1]



2. Ajout de la médiatrice du segment [M1 ; M2] et formation de 4 carrés



3. Ajout des médiatrices des segment [M2 ; M3] et [M3 ; M4], et formation de 4 carrés



4. Ajout des médiatrices des segment [M4 ; M5] et [M5 ; M6], et formation de 4 carrés

Nous avons réussi à déterminer que la technique des carrés permet de trouver la ville en 20 à 30 points de téléportations selon la ville. Dans le pire des cas, la ville se trouve à chaque fois dans le mauvais carré, ce qui nous oblige à utiliser un point inutile, celui où la ville est toujours plus proche des points en (0; 0). (3)

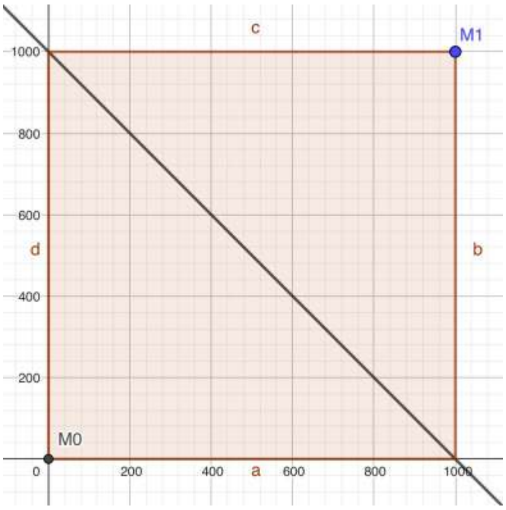
Pour déterminer le pire des cas, nous avons réalisé une méthode pour diviser la surface de la planète par 4 tous les 3 points.
Le pire des cas se trouve lorsque l'on divise la zone par 4, on remet à chaque fois un point en (0; 0) ce qui permet de rééquilibrer l'espace restant même si tous les points qui sont en (0; 0) sont inutiles.
Ensuite, on divise encore la surface restante par 4 en mettant un point sur l'extrémité de la surface de l'axe des abscisses et un point sur l'extrémité de la surface sur l'axe des ordonnées. On refait le même enchaînement jusqu'à ce que la surface restante soit inférieure à 1 km², ce qui nous fait 30 téléportations au total car la surface restante est de 0,9536 soit inférieure à 1. (Le 30ème point est celui où la ville est forcément trouvée).

Démonstration : $\dfrac{1000000}{(4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4)}=\dfrac{1000000}{4^{10}}=0{,}9537$

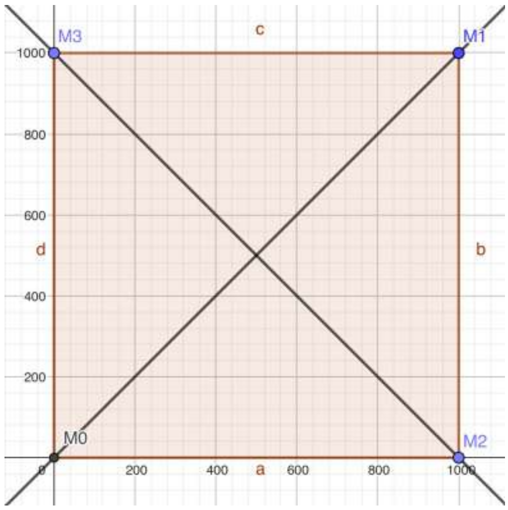
Pour trouver le meilleur des cas, on fait en sorte de toujours diviser par 4 la surface de la planète tous les 2 points en n'utilisant aucun point inutile, ce qui nous permet de déterminer que l'emplacement de la ville est en 20 téléportations. Dans ce cas, la ville se situe aux alentours de (666,01; 666,01).
En résumé, la différence entre le pire des cas et le meilleur des cas est le fait que dans le meilleur des cas on n'utilise aucun point inutilement, ce qui nous permet de trouver la ville en 20 coups (on divise la surface de la planète par 4 tous les 2 points) tandis que dans le pire des cas, la ville se trouve en 30 coups (on divise la surface de la planète par 4 tous les 3 coups car on doit utiliser un point inutile pour rééquilibrer l'espace restant).

2.2. Techniques des triangles

Cette technique consiste à couper à chaque fois l’aire du carré en deux avec l’aide des triangles. Tout d’abord, nous coupons le carré en plaçant notre point en coordonnées M1(1000; 1000). Cela permet de voir deux triangles distincts grâce à la médiatrice du segment [M0;M1]. On sait maintenant dans quel triangle se trouve la ville. Il existe deux cas possibles : soit la ville se trouve plus proche du point M1, soit la ville se trouve plus loin du point M1 par conséquent plus proche du point M0. Pour les deux cas, nous mettrons les deux prochains points au même endroit afin d’avoir quatre triangles de même aire, comme pour les carrés où l’on avait quatre carrés de même aire. Le point M2 aura pour coordonnées (1000;0) et M3(0;1000). Cela permet d’avoir deux médiatrices perpendiculaires donc quatre triangles de même aire.



1. Ajout de la médiatrice du segment [M0 ; M1]

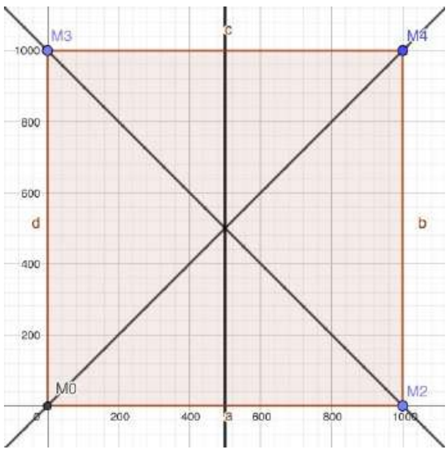


2. Ajout de la médiatrice du segment [M1 ; M2]

Pour la suite, il existe quatre possibilités. En effet, la ville peut se trouver dans chacun des quatre triangles. Nous allons donc voir les quatre :

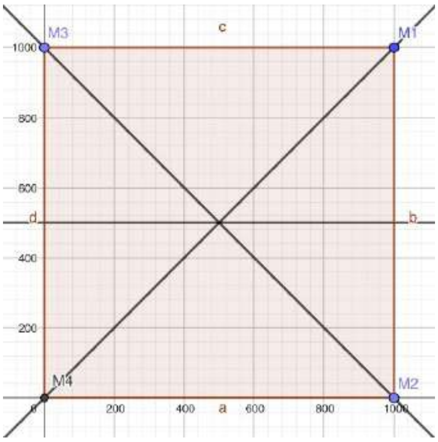
- **Cas n°1 : la ville se trouve dans le triangle en haut.**

Dans ce cas on placera notre point en M4 (1000; 1000) afin d’avoir deux nouveaux triangles grâce à la médiatrice verticale entre le nouveau point et le point d’avant.



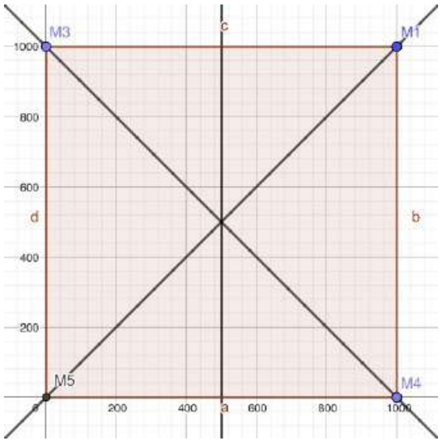
- **Cas n°2 : la ville se trouve dans le triangle de gauche.**

Dans ce cas on placera notre point en M4 (0; 0) afin d'avoir deux nouveaux triangles grâce à la médiatrice horizontale entre le nouveau point et le point d'avant.



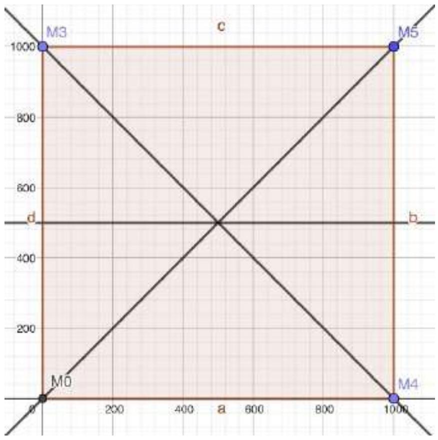
- **Cas n°3 : la ville se trouve dans le triangle de bas.**

Dans ce cas on placera notre point en M4 (1000 ; 0) qui nous servira d'étapes pour ensuite placer notre point M5 en coordonnées M5 (0 ; 0) afin d'avoir deux nouveaux triangles grâce à la médiatrice verticale entre le nouveau point et le point d'avant.



- **Cas n°4 : la ville se trouve dans le triangle de droite.**

Dans ce cas on placera notre point en M4 (1000 ; 0) qui nous servira de transition pour mettre ensuite le point M5 de coordonnées M5 (1000 ; 1000) afin d'avoir deux nouveaux triangles grâce à la médiatrice horizontale entre le nouveau point et le point d'avant.



On répète ainsi l'opération en coupant à chaque fois en deux nouveaux triangles jusqu'à trouver la ville. Pour chaque point placé, cette technique admet 1 chance sur 2 d'utiliser un point inutile. Elle est donc plus efficace que la technique des carrés.

3. Conclusion

L'utilisation de médiatrices s'avère finalement indispensable pour nous afin de déterminer l'emplacement de la ville car cela nous permet de savoir de quel côté de la médiatrice est la ville grâce à la couleur des points. Après avoir testé différentes façons pour arriver à la ville en moins de points possibles, nous avons sélectionné une première méthode qui consistait à découper la surface de la planète en 4 carrés en formant à chaque fois un carré plus petit, ce qui nous a permis d'établir un nombre de téléportations entre 20 et 30. Dans le meilleur cas, la ville se situe vers (666 ; 666) ou si la ville se trouve à l'endroit où l'on se téléporte et/ou dans un rayon d'un kilomètre pour mettre en place nos techniques, et dans le pire cas elle se situe à peu près à (1 ; 1). Il y a au final 1 chance sur 2 de ne pas utiliser de point inutile contre 1 chance sur 4 pour les carrés.

Notes d'édition

(1) Rappelons que la médiatrice d'un segment [AB] partage le plan en deux parties : les points qui sont plus près de A et ceux qui sont plus près de B.

(2) On pourrait ici ajouter un commentaire sur l'utilisation des médiatrices et notamment colorier la partie du plan obtenue figure 4.

(3) Il serait utile de détailler ce qu'on appelle « mauvais carré » et « point inutile »