L'Hôtelier

Année 2023 – 2024

Matthias PETIT, Hélio PARQUIER, Doriane COISLIER, élèves de classe Terminale

Établissement(s) : Lycée Léonce VIELJEUX
Enseignant·e(s) : Rachel BITON, Pierre VEDERINE
Chercheur·Chercheuse(s) : Cyrille OSPEL, Université de La Rochelle

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

A la fin d'un séjour, 4 vacanciers quittent un hôtel chacun en ligne droite vers un point cardinal. Ils partent respectivement à 3 ; 5 ; 9 et 18 km/h.
Au bout de 1 heure, l'hôtelier réalise que les 4 clients n'ont pas payé leurs séjours. Il doit donc les rattraper un par un en repassant à chaque fois par l'hôtel. Il utilise pour cela son quad et se déplace à 45km/h.

Question : Quelle stratégie doit-il employer pour être le plus rapidement possible de retour ?

1.2. Résultats

En ayant tout calculé, nous avons trouvé que peut importe l'ordre dans lequel l'hôtelier irait chercher les clients, il mettrait exactement le même temps, soit 4 heures.

2. Le raisonnement

Pour commencer nos recherches, nous avons tout d'abord calculer les permutations possibles et avons trouvé 4!= 24 possibilités différentes.
Les voici :

(a,b,c,d)=4h	(a,b,d,c)=4h	(a,c,d,b)=4h	(a,c,b,d)=4h	(a,d,b,c)=4h	(a,d,c,d)=4h
(b,a,c,d)=4h	(b,a,d,c)=4h	(b,c,d,a)=4h	(b,c,a;d)=4h	(b,d,c,a)=4h	(b,d,a,c)=4h
(c,d,a,b)=4h	(c,d,b,a)=4h	(c,a,d,b)=4h	(c,a,b,d)=4h	(c,b,d,a)=4h	(c,b,a,d)=4h
(d,c,a,b)=4h	(d,c,b,a)=4h	(d,a,b,c)=4h	(d,a,c,b)=4h	(d,b,c,a)=4h	(d,b,a,c)=4h

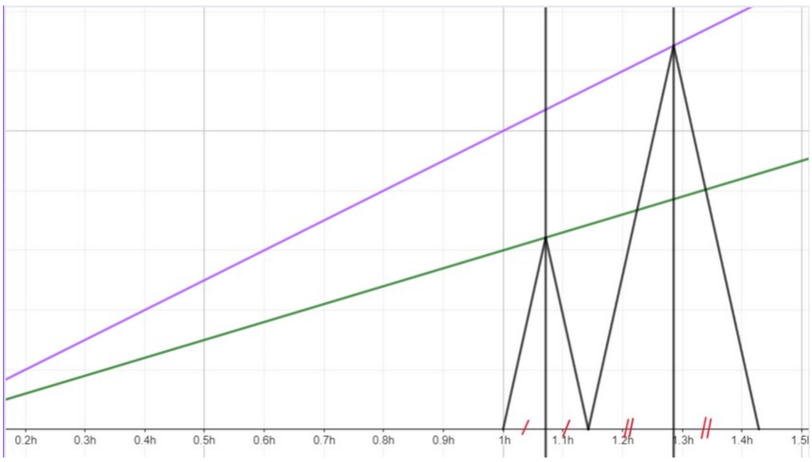
3. Le programme

Pour calculer l'ensemble des 24 durées possibles, nous avons conçu un programme en python (**fig1** ci-dessous).

```
from math import *

def temps(a,b,c,d,h):

    t = 3600
    temp = 3600

    vas = (a*5)/18
    vbs = (b*5)/18
    vcs = (c*5)/18
    vds = (d*5)/18
    vhs = (h*5)/18

    t = -(t*vhs)/(vas-vhs)
    t = t+(t-temp)
    temp = t
    print(t)

    t = -(t*vhs)/(vbs-vhs)
    t = t+(t-temp)
    temp = t
    print(t)

    t = -(t*vhs)/(vcs-vhs)
    t = t+(t-temp)
    temp = t
    print(t)

    t = -(t*vhs)/(vds-vhs)
    t = t+(t-temp)
    temp = t
    print(t)

    t -= 3600
    print(t,"s")
    print(t/3600,"h")

print("utiliser temp(a,b,c,d,h)")
```

4. Le graphique

L'idée derrière les calculs était que derrière chaque vitesse se cache une fonction affine. En observant le problème de cette manière, on peut facilement trouver à quels moments l'hôtelier rattrape les clients, ainsi que ceux où il les ramène à l'hôtel. Cela peut se modéliser par le repère (**fig2** ci-dessous), avec le temps en abscisse, et la distance en ordonnée. Les droites passant par l'origine représentent les déplacements des clients, alors que les autres modélisent le trajet de l'hôtelier, entre l'hôtel (axe des abscisses) et les clients.



5. Résolution et nouvelles hypothèses

5.1. Résolution du problème de départ

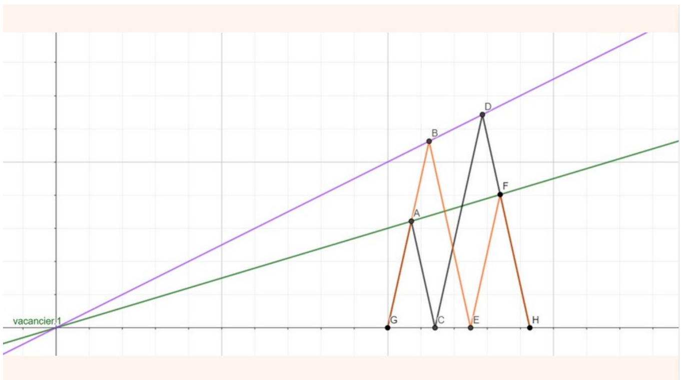
Grâce à cette représentation du problème, et aux calculs effectués, nous avons donc pu déterminer (CF 1.2) qu'il n'existe aucune stratégie à employer pour être de retour le plus rapidement possible, puisque l'ensemble des ordres choisis pour récupérer les clients donnent au final un temps égal de 4h.

5.2.1. Hypothèse

A partir de ce résultats, nous avons émis l'hypothèse suivante : quelles que soient les vitesses a et b de 2 vacanciers partant sans payer, et la vitesse H de l'hôtelier telle que H > a, et H > b, et pour tout temps T d'avance qu'ont les clients, il n'existe pas de stratégie optimale en terme de durée pour aller chercher chaque client en repassant à l'hôtel, les différentes possibilités se ramenant à des temps égaux.

5.2.2. Démonstration graphique et dernière conjecture

Il est assez simple de démontrer cette hypothèse dans un repère (voir **fig 3** ci-dessous). En traçant 2 droites passant par l'origine (elles représentent les vitesses a et b des 2 vacanciers), puis les différents trajets possibles de l'hôtelier (droites noire et orange) partant du temps T, on remarque que ceux-ci s'achèvent en un temps t égal (point H).



Ainsi, l'hypothèse est vraie pour 2 vacanciers. On peut également étendre la conjecture à n vacancier, mais celle-ci demeure une conjecture.

6. Conclusion

Notre problème a donc été résolu de manière assez brute, tous les temps de trajet possibles ayant été calculés. Le résultat obtenu est qu'il n'existe pas de stratégie optimale dans le contexte de l'énoncé, puisque chaque version du trajet de l'hôtelier a une durée de 4h.

De plus, nous avons pu démontrer que les données de l'énoncé, soit les vitesses des vacanciers et celle de l'hôtelier, le temps écoulé avant que ce dernier ne parte, ne modifient pas la conclusion précédente (celle-ci étant l'absence de stratégie optimale) pour 2 vacanciers, tant que les vitesses des clients n'atteignent ou ne dépassent pas celle de l'hôtelier.

Enfin, nous avons conjecturé qu'il en allait de même pour n vacanciers, mais cette conjecture n'est pas démontrée.