

La tournée du facteur à Circularville

Année 2025 – 2026

Elèves du lycée Édouard Herriot : Louise Cornefert, Benjamin Davienne, Katelyn Nicolas, Lucie Peysson-Hopfensitz, Nael Ben Brahim, Louis Pouzet

Elèves du lycée Jean Paul Sartre : Justine Grimaud-Baudry

Enseignantes : Marie Desquesne, Sylvie Di Fazio, Magali Favre et Hervé Lootvoet

Chercheur.es : Aline Parreau, Quentin Deschamps, (LIRIS, CNRS et Université Lyon1).

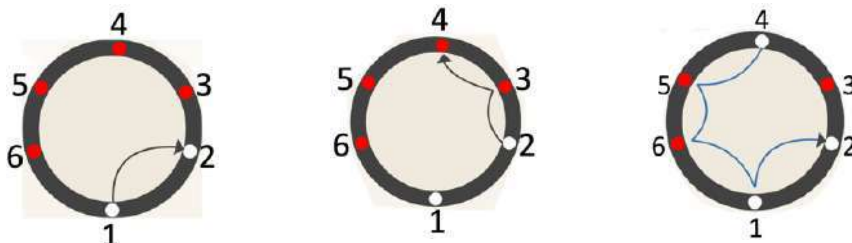
1. Introduction

Au fin fond de l'univers, dans une petite ville paisible nommée Equacity, vivait un facteur du nom de Joe. Un jour, lassé par sa routine, Joe décide de changer sa façon de faire.

Désormais, il commence à la maison numéro 1, puis avance d'un nombre de maisons égal au numéro de celle qu'il vient de visiter.

Ainsi, de la maison 1, il avance de 1 et arrive à la maison 2 ;

puis de la maison 2, il avance de 2 pour atteindre la maison 4 ; et ainsi de suite.



Joe poursuit sa tournée selon cette logique... jusqu'au moment où il passe une deuxième fois par la maison numéro 2.

À cet instant, il considère sa mission terminée et rentre chez lui.

Le problème, c'est qu'une grande partie des habitants ne reçoivent jamais leur courrier. Et à Equacity, les villageois commencent sérieusement à s'impatienter...

Pourriez-vous les aider en changeant les numéros des maisons ?

2. Quelques règles et notations

Voici quelques règles à respecter par notre facteur

- On place un nombre N de maisons sur un cercle.
- On commence toujours par la maison 1.
- On avance de k maisons où k est le numéro de la maison.
- Le facteur doit passer par toutes les maisons.
- Il arrête sa tournée s'il passe 2 fois sur la même maison.



On note :

- k le numéro de la maison
- N le nombre total de maisons.
- $P(k)$ la position de la maison k . On commence à 0 donc $P(1) = 0$

On appelle le pas l'avancement de la position à chaque tour.

3. Premiers résultats.

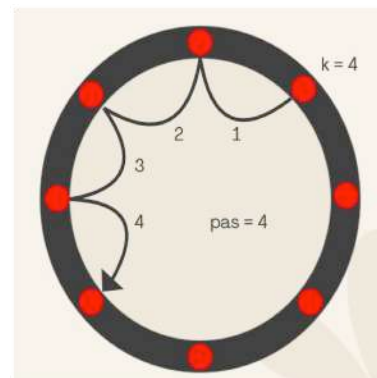
Voici les premiers résultats trouvés au début, sans méthode particulière :

$N = 1$: L'ordre (1) convient.

$N = 2$: L'ordre (1 ; 2) convient.

$N = 3$: Il n'y a pas de solution.

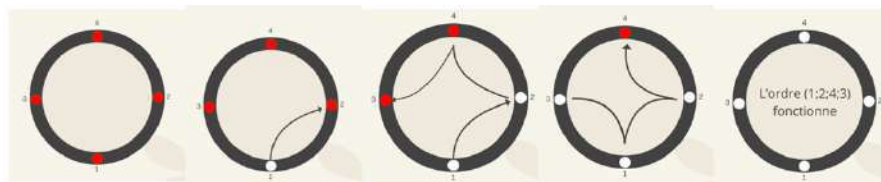
$N = 4$: L'ordre (1 ; 2 ; 4 ; 3) convient mais l'ordre (1 ; 2 ; 3 ; 4) ne convient pas.



Illustrations :

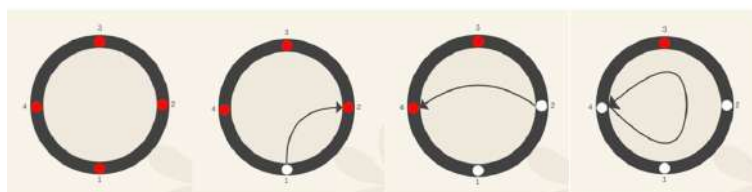
- Ordre (1 ; 2 ; 4 ; 3)

Toutes les maisons sont visitées
L'ordre convient.



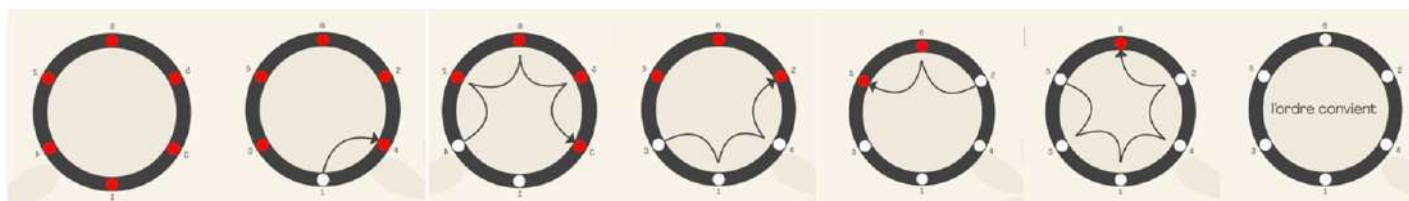
- Ordre (1 ; 2 ; 3 ; 4)

La maison 3 n'est pas visitée.
L'ordre ne convient pas.



$N = 5$: Il n'y a pas de solution

$N = 6$: L'ordre (1 ; 4 ; 2 ; 6 ; 5 ; 3) convient comme le montre l'illustration ci-dessous.



$N = 7$: Il n'y a pas de solution

$N = 8$: Les ordres (1 ; 6 ; 4 ; 2 ; 8 ; 7 ; 5 ; 3) et (1 ; 2 ; 5 ; 3 ; 8 ; 7 ; 4 ; 6) conviennent.

On peut conclure que les nombres impairs différents de 1 ne semblent pas avoir de solutions, et qu'il n'y a pas unicité de la solution comme le montre le cas $N = 8$.

4. Propriétés

Propriété 1 : Le facteur doit terminer par la maison N .

Justification :

Si le facteur doit finir par une maison différente de la maison N alors, comme il doit toutes les visiter, il doit en amont passer par la maison N .

Lorsque le facteur visite la maison N alors il avance de N maisons or il y a N maisons au total donc le facteur fait un tour complet et retombe sur la maison N et cela indéfiniment. Le facteur arrête sa tournée sans avoir visité toutes les maisons.

On en conclut que le facteur doit visiter la maison N en dernier.

Propriété 2 :

- Lorsque le nombre de maisons N est impair alors il n'est pas possible de trouver un ordre qui convient.
- Lorsque le nombre de maisons N est pair alors la place de la maison N est à la position $\frac{N}{2}$

Démonstration :

Soit N le nombre total de maisons numérotées de 1 à N.

On rappelle que le facteur continue toujours à avancer même après avoir fait un « tour » complet et que la maison N se visite en dernier d'après la propriété 1.

Le nombre de déplacements effectués avant d'aller visiter la maison N est la somme de tous les déplacements associés aux maisons 1 à $N - 1$.

On obtient donc :

$$P(N) = 1 + 2 + 3 + \dots + (N - 1) = \sum_{k=1}^{N-1} k = \frac{N(N - 1)}{2}$$

Cas N pair :

$$P(N) = \frac{N(N - 1)}{2} = \frac{N}{2} \times N - \frac{N}{2} \text{ et donc } P(N) \equiv -\frac{N}{2} \equiv \frac{N}{2} [N]$$

On en conclut que la position de la dernière maison est $\frac{N}{2}$.

Cas N impair :

Comme N est impair, il existe un entier naturel k tel que $N = 2k + 1$

On obtient :

$$P(N) = \frac{(2k + 1)2k}{2} = (2k + 1)k \text{ et donc } P(N) \equiv 0[2k + 1] \text{ soit } P(N) \equiv 0[N]$$

On en déduit que la maison N se retrouve à la position 0, la même position que la maison 1. Ce qui n'est pas possible. Il n'existe donc pas d'ordre qui convienne lorsque le nombre de maisons est impair.

5. Méthode de construction

5.1 : Cas où N est une puissance de 2.

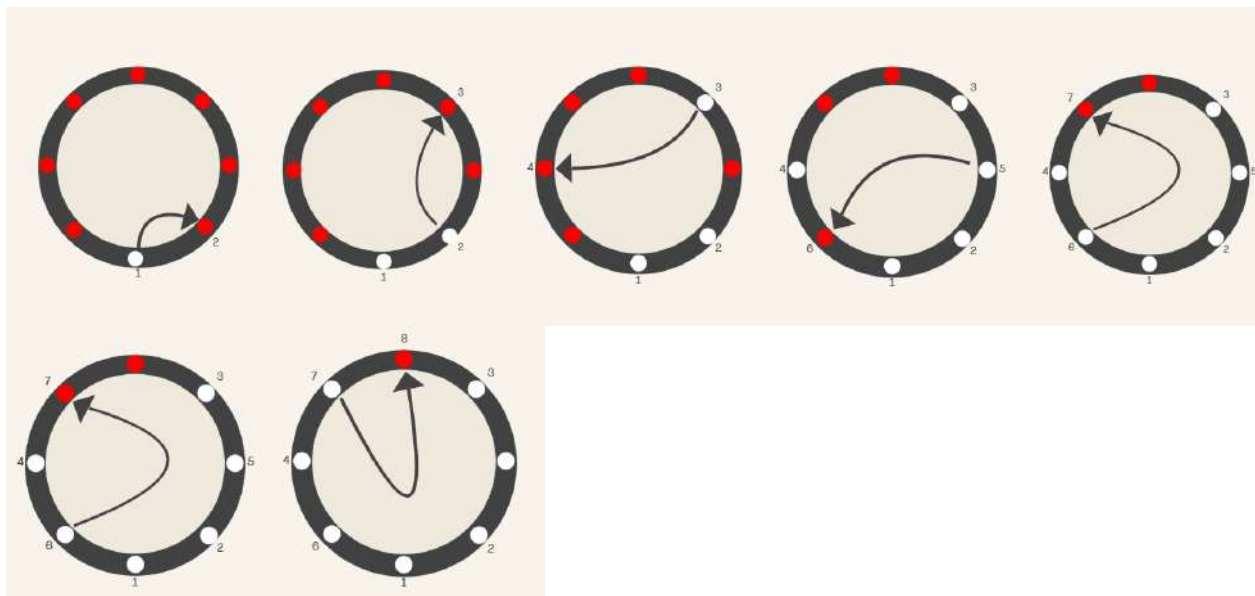
Propriété 3 :

Lorsque N est une puissance de 2, l'ordre ci-dessous convient.

On place les maisons dans leur ordre naturel en avançant d'un nombre de pas égal à leur nombre puis en plaçant la maison suivante : on place 1, on avance de 1 puis on place 2 et on avance de 2 pour placer 3 etc...).

Cela donc respecte bien la règle de déplacement du facteur.

Exemple pour $N = 8 = 2^3$



Démonstration

N est une puissance de 2 donc il existe un entier naturel k tel que $N = 2^k$

On place les maisons dans leur ordre naturel, donc la position de la $i^{\text{ème}}$ maison avec $1 \leq i \leq N$ est

$$P(i) = 1 + 2 + \dots + (i - 1) = \frac{i(i-1)}{2}$$

En effet si l'on veut placer le chiffre 3 (donc la $3^{\text{ème}}$ maison) il nous faudra placer la maison 1 et 2 avant et donc d'avancer de 1 puis de 2.

Il nous faut donc montrer que chaque maison a une position différente.

Preuve par l'absurde :

Supposons qu'il existe 2 maisons distinctes a et b tel que $a < b \leq N$ et que $P(a) \equiv P(b)[N]$

On a donc

$$\frac{a(a-1)}{2} \equiv \frac{b(b-1)}{2} [N]$$

$$a(a-1) \equiv b(b-1) [2N]$$

$$a^2 - b^2 - a + b \equiv 0 [2N]$$

$$(a-b)(a+b) - (a-b) \equiv 0 [2N]$$

$$(a-b)(a+b-1) \equiv 0 [2N]$$

On rappelle que $N = 2^k$

On a trois possibilités :

- soit a est pair et b est pair donc $a-b$ est pair et $a+b-1$ est impair ;
- soit a est impair et b est pair donc $a-b$ est impair et $a+b-1$ est pair ;
- soit a est impair et b est impair donc $a-b$ est pair et $a+b-1$ est impair.

Remarque :

le cas a est impair et b est pair est équivalent à b est impair et à a est pair.

On remarque que dans les 3 cas, le produit $(a - b)(a + b - 1)$ a 2 facteurs de parité différente, pair pour l'un et impair pour l'autre. Le produit est donc pair et on obtient :

$$(a - b)(a + b - 1) \equiv 0[2^{k+1}]$$

Par définition une puissance de 2 est un produit de nombres strictement pairs, il vient donc que soit $(a - b) \equiv 0[2^{k+1}]$ ou que $(a + b - 1) \equiv 0[2^{k+1}]$

Or $a < b \leq 2^k$ donc :

$$a - b < 2^{k+1}$$

Et

$$\begin{aligned} (a + b) &< 2^{k+1} \\ (a + b - 1) &< 2^{k+1} \end{aligned}$$

Donc

$$(a - b) \not\equiv 0[2^{k+1}] \text{ et } (a + b - 1) \not\equiv 0[2^{k+1}]$$

Enfin

$$(a - b)(a + b - 1) \not\equiv 0[2^{k+1}]$$

Il n'existe donc pas 2 maisons distinctes a et b qui possèdent une même position dans le cycle donc l'ordre permet au facteur de visiter toutes les maisons.

5.2 : Méthode générale pour un nombre de maisons N pair

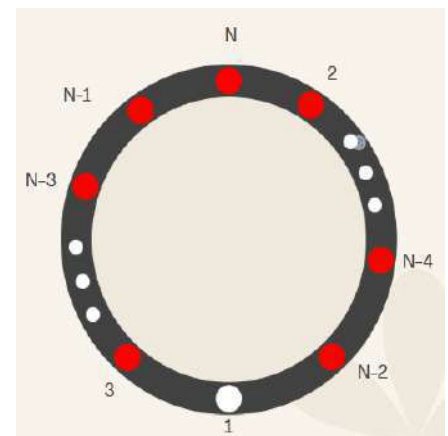
Propriété : On trouve au moins une solution pour chaque nombre de maisons N pair.

Une solution pour un nombre de maisons N pair est représentée par le schéma ci-contre.

Chaque maison est placée en fonction du nombre maximum N.

On remarque que les nombres sont placés dans l'ordre :

- Départ (le nombre 1)
- Nombres pairs décroissants de $N - 2$ à 2
- Nombre maximum N (pair)
- Nombres impairs décroissants de $N - 1$ à 3



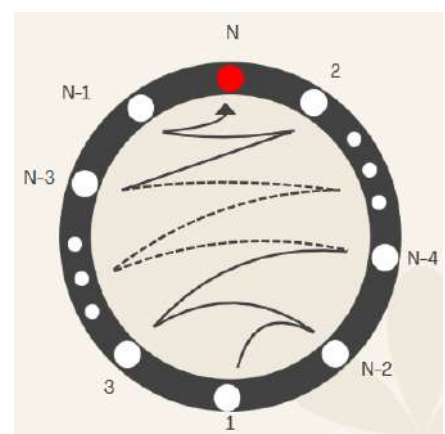
Cet ordre permet de visiter toutes les maisons.

En effet,

On tourne dans le sens antihoraire en partant de la maison 1.

- 1 pas $\longrightarrow$ arrivée maison $N - 2$;
- $N - 2$ pas soit -2 pas $\longrightarrow$ arrivée maison 3 ;
- 3 pas $\longrightarrow$ arrivée maison $N - 4$

On répète ce schéma en formant un motif de va-et-vient jusqu'à arriver à la dernière maison N.



6. Conclusion

Nos recherches ont permis de trouver plusieurs propriétés. Lorsque le nombre de maisons est pair, nous connaissons la place de la dernière maison et nous avons trouvé une méthode générale pour les placer afin que le facteur les visite toutes.

Nous avons démontré qu'en gardant les mêmes règles, aucun ordre ne convient lorsque le nombre total de maisons est un nombre impair différent de 1. Pour permettre au facteur de distribuer le courrier dans toutes les maisons lorsque le nombre total de maisons est un nombre impair différent de 1, nous devons modifier les règles.

Si on impose au facteur, après chaque distribution de changer de sens dans sa tournée alors la méthode générale donnée en 5.2 convient également lorsque N est un nombre impair.

On place donc les maisons dans leur ordre naturel en alternant les déplacements dans le sens horaire et anti-horaire.

Cet ordre fonctionne car lorsqu'on fait 2 déplacements de suite le déplacement total est de 1 dans le sens anti-horaire en effet on avance de 1 puis on recule de 2 c'est-à-dire qu'on recule de 1.

En répétant ce schéma on peut placer toutes les maisons voulues car on ne risque pas de retomber sur une maison déjà visitée.

Remarque : On peut choisir l'ordre dans lequel on alterne les déplacements horaires et anti-horaires. Sur le schéma, on a choisi d'abord d'avancer de 1 puis de reculer de 2, mais on aurait pu faire l'inverse.

