L'Héritage

Année 2023-2024

Réalisé par les élèves de terminale :

Corentin Bonnet

Colin Charpentié

Niels Hallouin

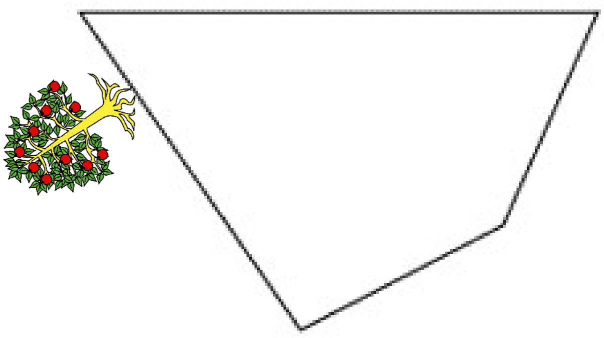
Lény Martin--Baudry

Ariane Rumen

Établissements : Lycée Vieljeux et Lycée Valin de La Rochelle

Enseignants : Rachel Biton, Pierre Vederine

Chercheur : Cyrille Ospel, LaSie, Université de La Rochelle



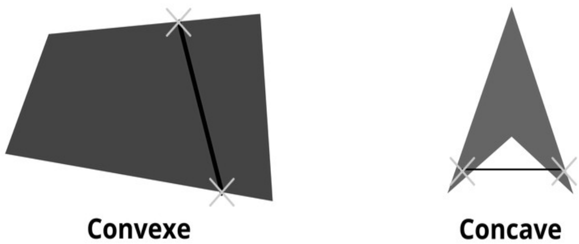
1- Introduction

1.1- Présentation du sujet

Dans le problème que nous avons étudié cette année dans le cadre de cet atelier, un terrain modélisé par un quadrilatère convexe doit être légué à un frère et une sœur lors d'un héritage. Sur un des côtés de ce terrain se trouve un pommier.
Dans un souci d'équité, le terrain doit être partagé en deux terrains de même aire et chacun doit posséder la moitié du pommier.
Ainsi, nous nous sommes demandé s'il existait un segment qui passait par ce pommier en partageant équitablement ce quadrilatère.

1.2- Définition

Un quadrilatère est convexe si lorsqu'on relie deux points quelconques de ce quadrilatère par un segment, ce dernier ne coupe jamais un côté.

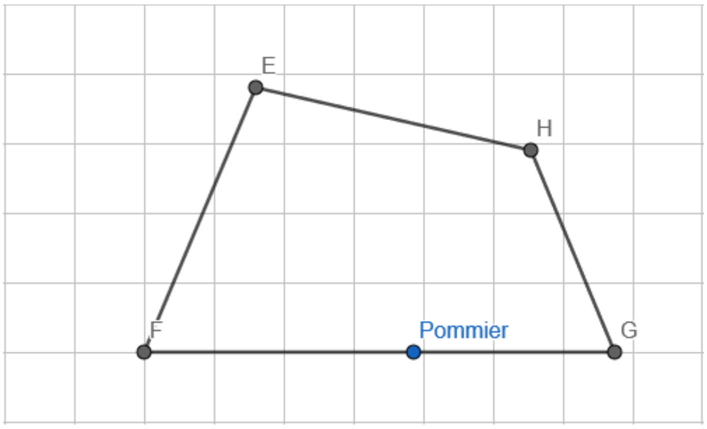


1.3-Certitude de l'existence d'une solution

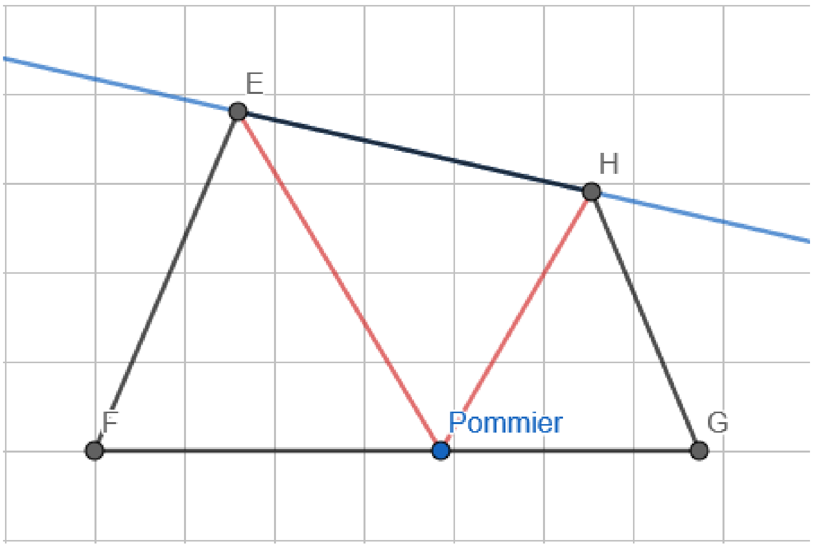
Afin de prouver qu'il existe une solution, nous allons séparer le quadrilatère en deux parties à l'aide d'une droite et associer l'aire d'un des deux côtés de la droite à une fonction. En faisant varier de manière croissante l'angle entre la droite et le côté du quadrilatère, l'aire augmente.
On obtient alors une fonction croissante. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, indique que pour une fonction définie, continue et monotone sur un intervalle [a;b] alors pour tout nombre réel k compris entre f(a) et f(b) il existe une solution unique de l'équation f(x)=k. On a donc la certitude qu'il existe un segment coupant le quadrilatère en deux parts égales pour tout point placé sur un des côtés de la figure.

2- Solutions

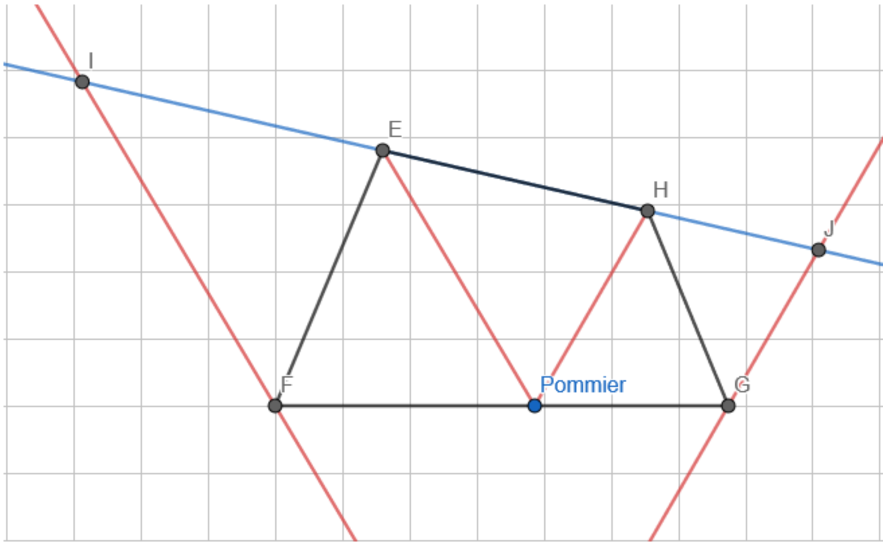
2.1- Solution du Lycée Vieljeux



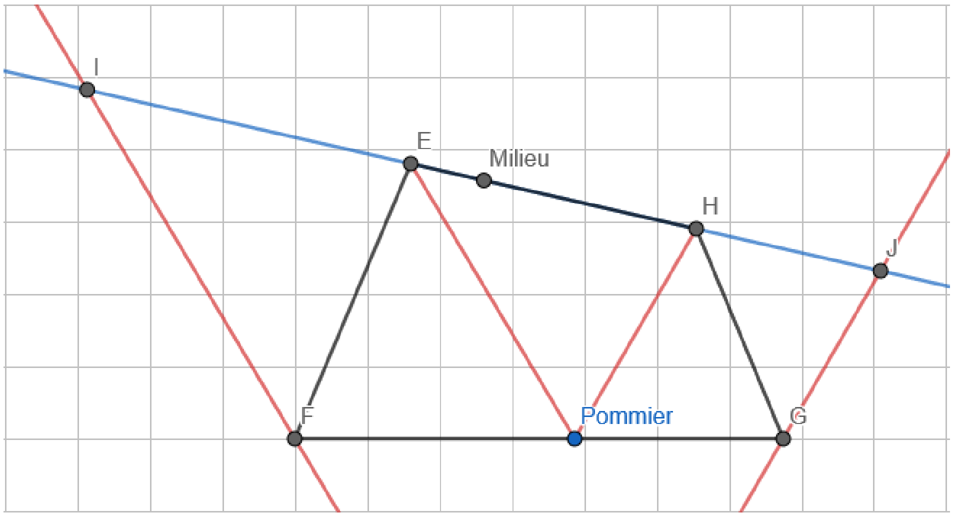
Soit un quadrilatère convexe EFGH avec le “pommier” qu’on nommera P par la suite situé sur le segment [FG].



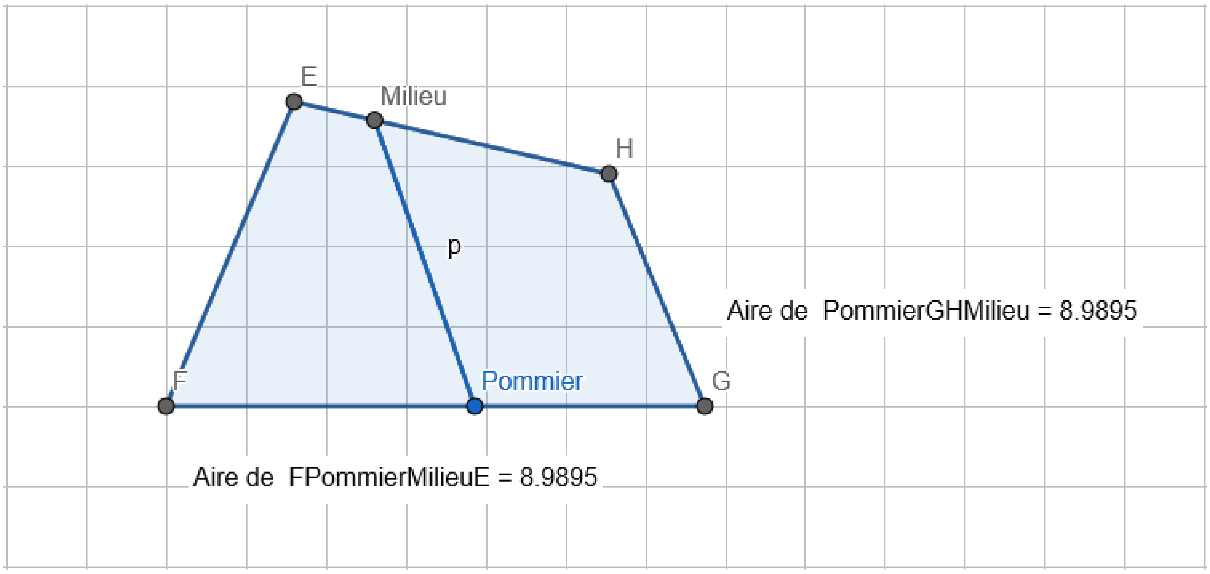
La première étape consiste à relier P aux sommets opposés (ici E et H) par deux segments, puis de tracer la droite (EH).



Ensuite, on trace la parallèle à (EP) passant par F et la parallèle à (HP) passant par G.
On nomme I et J les points d’intersections entre ces deux droites et la droite (EH).



On place alors le Milieu de [IJ].

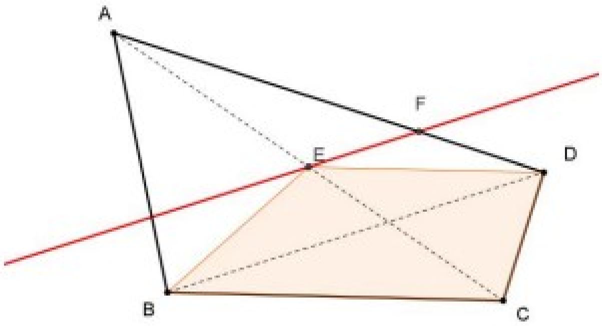


On relie le pommier au milieu de [IJ].
Ce segment [PM] est celui qui partage équitablement l’aire de notre quadrilatère.

2.2- Solution du Lycée Valin

On trace les diagonales [AC] et [BD]. Soit E le milieu de [AC], et Δ la parallèle à (BD). Δ coupe [AD] en F. La droite (BF) découpe (ABCD) en deux polygones de même aire. Il s'agit de montrer que l'aire de BFDC est égale à la moitié de l'aire de ABCD notée a.

E étant le milieu de [AC] , on a Aire (AEB) = Aire (EBC) et Aire (AED) = Aire (EDC) par suite a_1 = Aire (AEB) + Aire (AED) = Aire (EBC) + Aire (EDC) = a_2. Ou encore a_1 = Aire (ABED) = Aire (BEDC) = a_2. on en déduit que : $a_1 = a_2 = \frac{a}{2}$ car a_1+a_2 = a.



Prouvons donc que Aire (BFDC)= Aire (BEDC) = a_1. Il suffit donc de montrer que Aire(BFD) = Aire(BED) puisqu'ils ont le triangle BDC en commun.
Et ceci est évident car ces deux triangles ont même base ([BD]) et même hauteur car (BD) parallèle à (EF).

3- Conclusion

Ainsi, il est bel et bien possible de partager ce quadrilatère convexe en deux terrains de même aire, grâce à un segment passant par un point précis situé sur un des côtés.
Grâce aux deux méthodes que nous avons trouvées, nous savons que tous les cas peuvent être traités lorsque le pommier se trouve sur un côté.
Cependant, on pourrait se demander comment traiter ce même problème si le pommier se trouvait cette fois-ci dans le quadrilatère .