

Construction d'une voûte nubienne

Julien DELIGNON, Mathis MAONY, Iana PHILIP-L'HENAFF,
Sterenn RIOUAL et Quentin SOLIMAN

Élèves en classe de Première

Année 2023-2024

Établissement : Lycée de l'Harteloire, Brest

Enseignant : Jean-Marie GOURMELON

Chercheur : Stéphane RIOUAL, Université de Bretagne Occidentale (Lab - STICC)

1 Présentation du sujet

La voûte nubienne est une technique ancestrale de construction de voûte sans utilisation d'échafaudage ni structure en bois (« cintre ») lors de sa construction.

Plusieurs variantes existent mais le principe fondamental consiste à empiler des éléments de construction (à l'origine dans la haute antiquité égyptienne, des briques en terre crue), en réalisant un porte-à-faux qui reste dans la limite de l'équilibre, jusqu'à ce que se rejoignent les deux arches de la voûte.



source : chenelet.org

On souhaite construire une voûte dont la hauteur n'excède pas 2,50 m avec des briques carrées de côté 40 cm et de hauteur 10 cm.

Quelle largeur maximale peut-on se permettre entre les bases des deux arches ?

2 Modélisation d'une suite

Dès le début nous avons choisi de modéliser les briques par des kaplas de 12 cm de long. Nous avons commencé par empiler une dizaine de kaplas en les espaçant chacun d'un même écart (FIG. 1) mais nous nous sommes vite rendu compte que ce n'était pas le plus rentable et que le porte-à-faux n'était pas maximal.

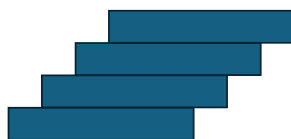


FIGURE 1 –

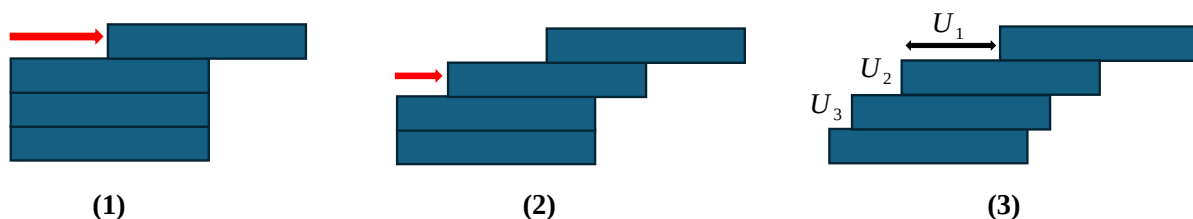


FIGURE 2 –

Dans un second temps, nous avons empilé les kaplas sans les espacer puis poussé le kapla du haut jusqu'à son point d'équilibre (1), nous avons ensuite poussé le 2^e kapla (en partant du haut) jusqu'au point de bascule (2). Après avoir répété l'opération sur le troisième kapla nous obtenons l'empilement de la (FIG. 2).

Grâce à cette technique, nous étions certains d'avoir obtenu le porte-à-faux maximal. Nous avons donc mesuré les 4 premiers écarts entre les kaplas mais les autres écarts commençaient à devenir trop petits pour être mesurés précisément. Nous avons obtenu :

$$U_1 \approx 5,8 \text{ cm}$$

$$U_2 \approx 2,9 \text{ cm}$$

$$U_3 \approx 1,9 \text{ cm}$$

$$U_4 \approx 1,2 \text{ cm}$$

$$U_5 \approx 1,1 \text{ cm}$$

Après quelques réflexions nous avons conjecturé une expression pour cette suite en admettant que l'on peut considérer que chaque kapla mesure 12 cm au lieu de 11,7 cm (cela facilitera les calculs ultérieurs) :

$$\text{Pour tout entier } n \text{ non nul, } U_n = \frac{12}{2n}.$$

Cette suite semble donner les écarts entre les kaplas pour obtenir un porte-à-faux maximal, U_1 correspondant à l'écart entre l'extrémité du kapla du haut et celle du kapla du dessous. La question que nous nous posions était alors : comment prouver mathématiquement que cette suite donne effectivement tous les écarts suivants, que nous ne pouvons pas mesurer précisément ?

Un empilement de kaplas reste stable si son centre de masse se trouve à la verticale d'un point qui est en appui avec la surface sur laquelle il est posé. Sinon il bascule. Nous avons donc cherché les positions successives des centres de masses des empilements pour nous assurer du bon équilibre à chaque étape. Le but est, rappelons-le, de vérifier que la suite que nous avons conjecturée s'applique encore à chaque fois que l'on rajoute un nouveau kapla.

3 Le fractionnement des kaplas

Le principe du fractionnement des kaplas est de diviser un kapla en parts égales. Nous considérons que la longueur d'un kapla est 12 unités et sa hauteur 2 unités, le carreau étant l'unité sur les figures suivantes. Le fractionnement se fait de manière à ce que le même nombre de parts se trouve de chaque côté d'une ligne imaginaire qui contiendrait le centre de masse. Nous pensions connaître ainsi la position du centre de masse de la structure et pouvoir alors disposer le kapla suivant.

1ère division :

Avec 1 seul kapla le fractionnement est simple puisque il faut « couper » le kapla en 2, on se retrouve donc avec des parts de $\frac{1}{2}$. Le deuxième kapla va donc venir se positionner sur l'extrémité du premier au niveau de l'axe en pointillé (FIG. 3) qui est situé à 6 unités de chaque extrémité, et $6 = U_1$.

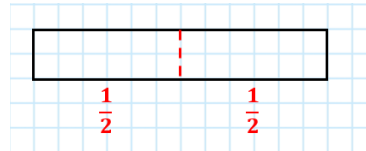


FIGURE 3 –

2ème division :

On va cette fois ci couper les kaplas en 4 pour avoir de chaque côté de la ligne centrale 4 parts de $\frac{1}{4}$ soit $\frac{4}{4}$ de kaplas. Le troisième kapla va donc venir se positionner tel que son extrémité du soit situé sous la ligne centrale (FIG. 4), qui est située à 9 unités de chaque extrémité, et $9 = U_1 + U_2$.

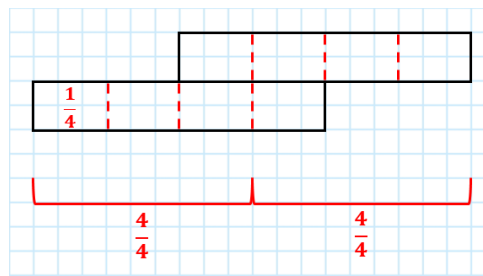


FIGURE 4 –

Par la suite, nous avons « renversé » les figures (l'empilement se fera du bas vers le haut) ; cela nous facilitait le placement des nouveaux kaplas de la gauche vers la droite.

3ème division :

Le fractionnement se complique puisque les divisions vont être de plus en plus petites, nous avons essayé 2 techniques :

- 1) en coupant le kapla en parts de $\frac{1}{6}$;

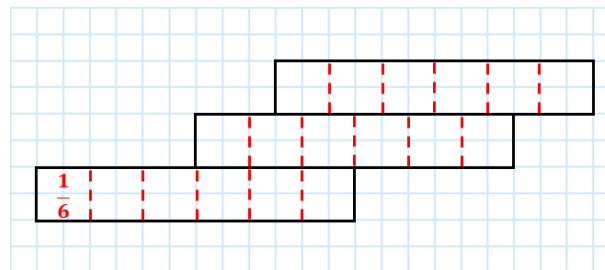


FIGURE 5 –

On se retrouve dans cette situation plutôt complexe avec au total 18 parts de $\frac{1}{6}$, il en faudrait donc

logiquement 9 de chaque côté et donc on se retrouverait avec $\frac{9}{6}$ de chaque côté de la ligne centrale. Mais cela semble ici compliqué à cause du décalage entre le 2^e et le 3^e kapla (FIG. 5).

2) Nous divisons donc les kaplas en parts de $\frac{1}{12}$.

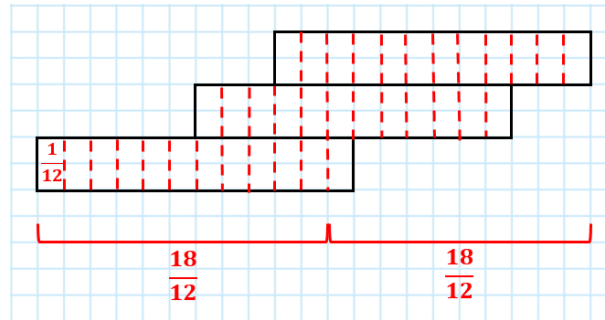


FIGURE 6 –

Ceci est plus simple : on retrouve $\frac{18}{12}$ de chaque côté de la ligne centrale, et on constate effectivement que $\frac{18}{12} = \frac{9}{6}$. Encore une fois, on constate que la ligne centrale (FIG. 6), est située à 11 unités de chaque extrémité, et $11 = U_1 + U_2 + U_3$.

Les fractions devenant de plus en plus petites, nous avons décidé de modifier notre stratégie en comptant seulement le nombre de carreaux. En effet, les sixièmes de kaplas représentent sur le schéma 4 carreaux, les douzièmes deux carreaux, etc. En comptant uniquement du nombre de carreaux on retrouve bien la même ligne centrale.

Nous avons ainsi positionné les kaplas en suivant les écarts donnés par la suite (U_n) dont le début avait été validé par la technique du fractionnement.

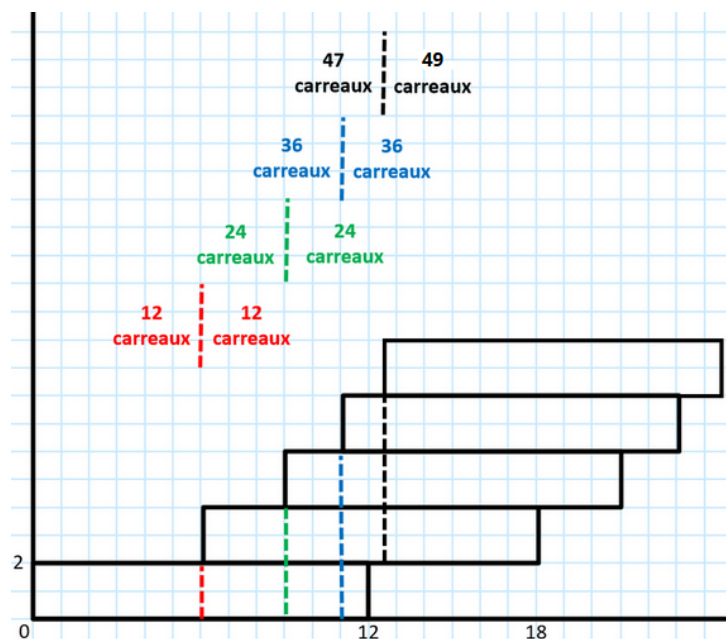


FIGURE 7 –

On remarque en comptant les carreaux que la suite fonctionne pour les 3 premiers kaplas mais qu'elle semble être fautive dès le quatrième puisque il y a une différence du nombre de carreaux : d'un côté 47 et de l'autre 49 (FIG. 7).

Cependant nous nous sommes rendus compte qu'avec cette méthode nous avons pris en compte seulement les masses et non les distances alors que ces dernières sont essentielles : en effet si vous accrochez un poids de 1kg à chaque extrémité d'une barre (que l'on considère de masse nulle) puis que vous tenez cette barre en son centre, la barre tiendra en équilibre; mais si vous ne la tenez pas exactement par son milieu alors elle basculera.

Ce n'était donc probablement pas la suite qui était fautive mais plutôt la technique de fractionnement. De plus, même avec cette méthode, il aurait été compliqué d'aller très loin car les carreaux se retrouvent très vite divisés ce qui complique le calcul. Nous avons alors été contraints de changer d'approche.

4 Approche par les barycentres

Le barycentre va nous permettre de trouver le centre de gravité de l'ensemble des kaplas composant une demi-voûte. Précisons la notion de barycentre, qui nous a été introduite par notre chercheur en Physique, M. Rioual.

Soient A et B sont deux points de l'espace, a et b deux nombres réels tels que $a + b \neq 0$.

Le barycentre des points pondérés $(A ; a)$ et $(B ; b)$ est l'unique point G défini par l'égalité vectorielle :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

On a alors pour tout point M :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}.$$

En particulier si on travaille dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, cette dernière relation donne, en posant $O = M$:

$$(a + b)\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}.$$

Ceci permet d'en déduire les formules que nous utiliserons par la suite :

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a + b} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{ay_A + by_B}{a + b}.$$

Les barycentres sont ainsi en fait une sorte de moyenne pondérée de deux points; pour calculer l'abscisse du barycentre de 2 structures, il faut d'abord multiplier les abscisses des barycentres des 2 structures par leurs masses respectives, puis additionner les différents résultats obtenus qu'on divise enfin par la somme des masses. L'intérêt de cette notion est qu'elle prend en compte la répartition des masses de part et d'autre du « centre de la structure » ainsi que leurs distances à ce centre.

Pour l'utilisation des barycentres il nous a semblé plus simple de placer nos kaplas « à l'envers », comme pour la technique du fractionnement, dans un repère orthonormé d'origine O . Nous plaçons notre premier kapla collé à droite de l'axe des ordonnées et au-dessus de l'axe des abscisses.

Notre but est de déterminer à chaque niveau de la demi-voûte l'abscisse centre de gravité de l'ensemble de la structure pour pouvoir positionner le kapla suivant. Nos calculs des barycentres vont uniquement porter sur les abscisses puisque les ordonnées augmentent toujours d'une demi-hauteur de kapla et n'ont pas d'incidence sur l'équilibre de la structure.

Définissons certains éléments nécessaires aux calculs, on notera :

- G_n le barycentre de la structure formée par les n premiers kaplas empilés;
- x_n l'abscisse de G_n ;
- A, B, C, D les barycentres de chacun des quatre premiers kaplas empilés.

Exemples : on cherche x_2 , soit le barycentre des 2 premiers kaplas :

- les points utiles sont A et B;
- l'abscisse de A : $x_A = 6$;
- l'abscisse de B : $x_B = 12$;
- A et B ont chacun un poids de 1.

On peut alors calculer $x_2 = \frac{1 \times 6 + 1 \times 12}{1+1} = 9$.

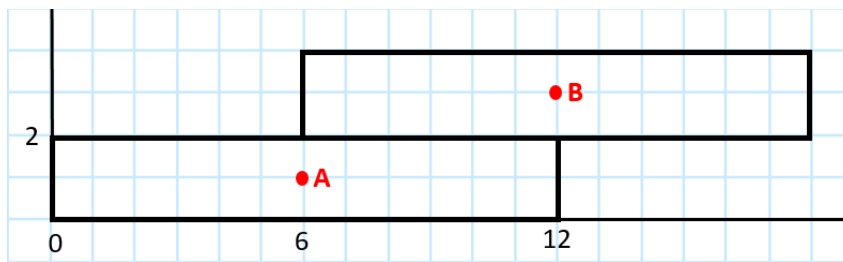


FIGURE 8 –

On peut donc positionner G_2 sur le repère et grâce à sa position placer le kapla 3 par dessus, on se retrouve dans la situation suivante (FIG. 9) :

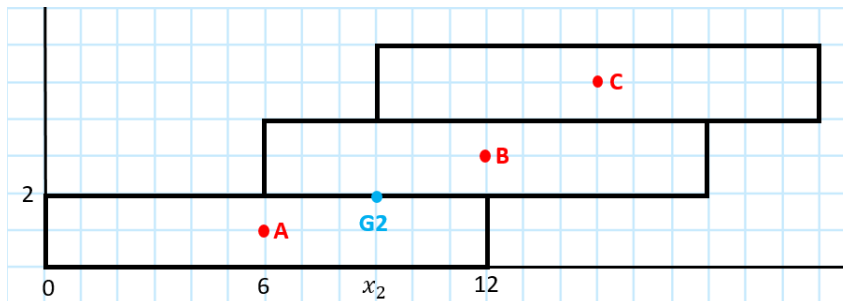


FIGURE 9 –

On refait de même que précédemment pour calculer l'abscisse de G_3 : on cherche x_3 , soit le barycentre des 3 premiers kaplas.

Les points utiles sont G_2 et C; l'abscisse de G_2 : $x_2 = 9$; l'abscisse de C : $x_C = 15$; G_2 a un poids de 2 et C a un poids de 1. On calcule alors : $x_3 = \frac{2 \times 9 + 1 \times 15}{1+2} = 11$;

De même on peut calculer x_4 (FIG. 10) et cette fois on trouve $x_4 = \frac{3 \times 11 + 1 \times 17}{1+3} = 12,5$.

On se retrouve dans cette situation où l'on remarque que contrairement à la technique où l'on comptait les carreaux, les barycentres semblent valider les valeurs des écarts que nous avons trouvés avec la suite (U_n) : 6; 3; 2; 1,5.

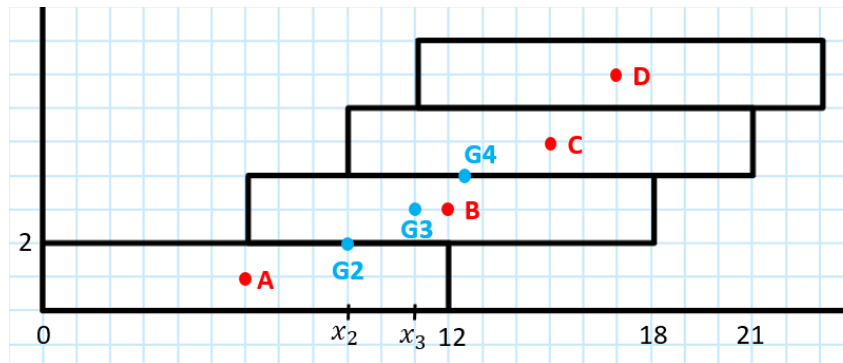


FIGURE 10 –

5 Généralisation du calcul de barycentres

Une fois familiarisés avec les barycentres, nous avons cherché une formule qui pourrait nous donner tous les barycentres possibles. Plus précisément nous avons cherché une relation permettant de calculer l'abscisse x_n d'une structure de n kaplas quand on connaît déjà l'abscisse x_{n-1} d'une structure de $n - 1$ kaplas.

On commence par multiplier l'abscisse x_{n-1} de la structure précédente par sa masse $n - 1$, qui correspond au nombre de kaplas composant la structure précédente, puis on doit ajouter l'abscisse du centre du kapla que l'on veut rajouter multipliée par sa masse. Sa masse étant de 1 kapla, on n'a pas besoin de s'en soucier et pour obtenir l'abscisse du kapla à rajouter on ajoute 6 à l'abscisse du kapla précédent car, étant donné qu'on place l'extrémité du kapla au niveau de l'abscisse du barycentre précédent et qu'un kapla mesure 12 unités, alors le centre du kapla à rajouter se trouve 6 unités plus loin (dans le sens croissant des abscisses) que le barycentre précédent. Enfin on divise par le « numéro » du kapla qu'on souhaite ajouter car celui-ci correspond à la masse totale de tous les kaplas. Ceci donne donc la relation :

$$x_n = \frac{(n-1)x_{n-1} + (x_{n-1} + 6)}{n}$$

Cette suite permet de calculer toutes les abscisses des barycentres sur le repère. On sait donc maintenant exactement comment placer chaque kapla pour avoir le meilleur porte-à-faux.

Rappelons que nous cherchons les écarts, il faut donc maintenant définir les écarts grâce aux barycentres. On remarque que les écarts se retrouvent en soustrayant les abscisses des barycentres, par exemple le troisième écart se calcule par $x_3 - x_2$. (FIG. 11) Plus généralement les écarts se calculent par $x_n - x_{n-1}$ (en considérant $x_0 = 0$).

Calculons donc :

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= \frac{(n-1)x_{n-1} + (x_{n-1} + 6)}{n} - x_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)x_{n-1} + (x_{n-1} + 6) - nx_{n-1}}{n} \\ &= \frac{nx_{n-1} - x_{n-1} + x_{n-1} + 6 - nx_{n-1}}{n} \\ &= \frac{6}{n} \\ &= \frac{12}{2n} \end{aligned}$$

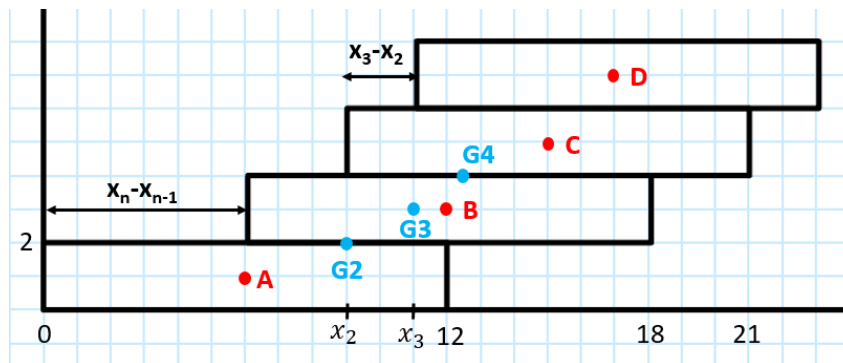
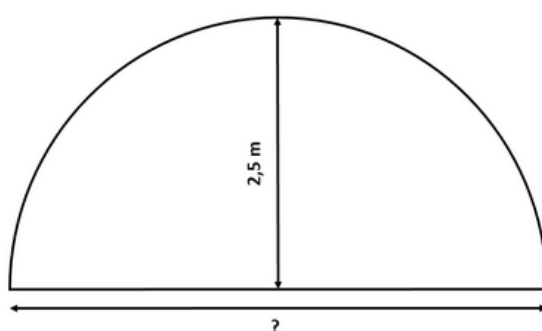


FIGURE 11 –

Après réduction on se rend compte que les barycentres donnent exactement les même écarts que la suite (U_n) car $x_n - x_{n-1} = \frac{12}{2n} = U_n$. On vient ainsi de prouver mathématiquement que la suite (U_n) que nous avons conjecturée expérimentalement donne les bons écarts.

6 Conclusion

Sachant que la hauteur d'une brique est de 10 cm et que notre but était d'avoir une voûte de 2,5 m nous en avons déduit qu'il faudrait 25 briques au total.



	A	B
1	n	$U_n = 40/2n$
2	1	20
3	2	10
4	3	6.666666667
5	4	5
6	5	4
7	6	3.333333333
8	7	2.857142857
9	8	2.5
10	9	2.222222222
11	10	2
12	11	1.818181818
13	12	1.666666667
14	13	1.538461538
15	14	1.428571429
16	15	1.333333333
17	16	1.25
18	17	1.176470588
19	18	1.111111111
20	19	1.052631579
21	20	1
22	21	0.952380952
23	22	0.909090909
24	23	0.869565217
25	24	0.833333333
26		
27		
28	somme d'un seul coté	75.51916356
29	somme des deux cotés	151.0383271

FIGURE 12 –

Comme nous n'avons travaillé que sur la moitié de la voûte l'écart obtenu à la fin devra être multiplié par 2. Grâce à une feuille de calculs (FIG. 12), nous avons pu additionner les 24 écarts puis

multiplier le résultat par 2 afin d'avoir la largeur totale entre les bases de la voûte.

Nous avons donc obtenu le résultat suivant : l'écart maximum possible pour une voûte de 2,5m de haut serait donc d'environ 151,04 cm soit 1,51 m.

7 Propositions pour la suite des recherches

Après le congrès MATH.en.JEANS à Nantes, des professeurs, des chercheurs mais aussi des élèves nous ont posé des questions auxquelles nous ne savions pas répondre. Nous proposons ci-dessous l'état de nos réflexions.

A. *En théorie, la base de la voûte peut-elle atteindre une largeur infinie ?*

Il nous semble que la base de la voûte pourrait atteindre une largeur infinie si la hauteur de celle-ci n'est pas limitée. Nous avons en effet pris connaissance des travaux d'un groupe de nos camarades sur le problème de la construction d'une tour la plus haute possible : ils ont travaillé sur une somme analogue à la nôtre et ils ont montré qu'elle pouvait prendre des valeurs aussi grandes qu'on veut.

Cependant à partir d'un certain point (dès 5 briques de haut) la hauteur de la voûte augmente beaucoup plus vite que la largeur de sa base.

B. *Existe-t-il une suite qui donne directement la largeur maximale possible de la voûte en rentrant la hauteur maximale souhaitée ?*

Cette suite serait définie par :

$$V_n = 40 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

avec n correspondant à la hauteur souhaitée en décimètres. Mais on ne peut pas calculer directement la somme des termes de la suite de terme général $\frac{1}{n}$ car elle n'est ni arithmétique ni géométrique, ou alors ce n'est pas du niveau de 1^{ère}.

(1)

Notes d'édition

(1) La somme $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est le n -ième nombre harmonique, il est pour des grandes valeurs de n proche à $\ln(n)$, le logarithme naturel de n . Précisément, $H_n - \ln(n)$ tend vers la constante d'Euler $\gamma = 0,577215\dots$, l'une des constantes les plus mystérieuses en mathématiques.