

Maths en Jeans

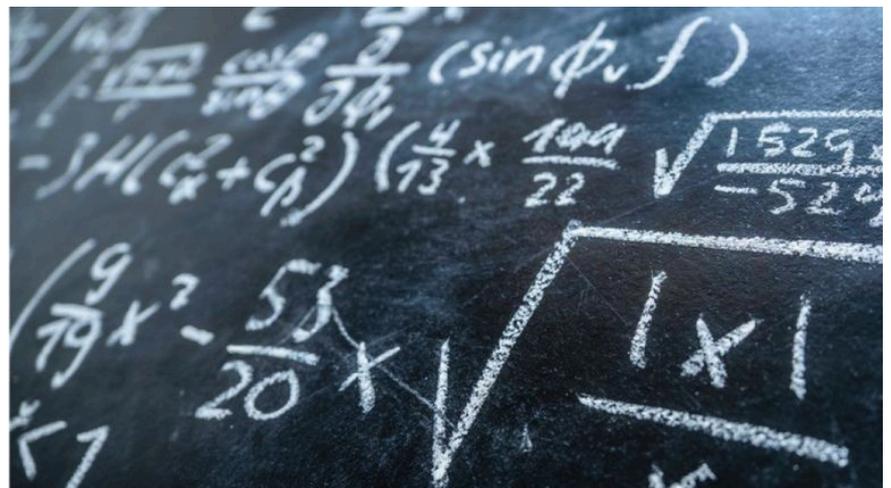
En route vers le Chaos

By Evaéna MAILLARD, Katia DUFFIS, Neyla CHKIR (Terminale)

Établissement : Lycée Caroline Aigle

Chercheur: Damien Gobin (Université de Nantes)

Enseignant : David Greau



Sommaire

Le Sujet	3
Observations	4
I. Nos outils d'observations	4
II. Comportement de la suite	5
III. Comportement des fonctions	5
Démonstrations	6
❖ La suite reste dans l'intervalle $[0;1]$	6
❖ Étude de la fonction $h(x)$	7
❖ Etude de la suite pour $a < 0,75$	8
➤ Etude d'un cas particulier	8
➤ Dans le cas général	12
➤ Conclusion	16
❖ Etude de la suite pour $a > 0,75$	17
➤ Etude d'un cas particulier	17
➤ Dans le cas général	19
➤ Conclusion	24
Conclusion	25

Le Sujet

On considère un nombre réel $a > 0$, et on fixe un réel x_0 . On construit alors une suite de nombres en calculant, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 1 - a \times (x_n)^2$. Pour des valeurs de a proches de zéro, on peut voir assez facilement que la suite de nombres se comporte très simplement. Plus la valeur de a augmente, plus ça se complique, pour arriver à une situation chaotique. On se propose d'essayer de tester ce phénomène numériquement, grâce à un calcul sur ordinateur, et de justifier ensuite certains phénomènes observés.

Pour cela nous allons voir que :

- ★ La suite est définie par récurrence à l'aide d'une fonction continue qui laisse stable l'intervalle $[0,1]$.
- ★ La monotonie de la suite va dépendre de la monotonie de f (et donc potentiellement de la valeur de a) et du terme initial de la suite.
- ★ Si la suite converge ce sera vers un point fixe de f et si les sous-suites d'indices pairs et impairs convergent ce sera vers un point fixe de $f \circ f$.
- ★ On cherche donc à résoudre, dans le cas de l'étude des sous-suites, l'équation $f \circ f(x) = x$ ce qui mène à une équation polynomiale de degré 4 dont les racines, et donc la convergence de ces sous-suites et ainsi la nature de la suite (u_n) , dépendent de la valeur de a .

Observations

I. Nos outils d'observations

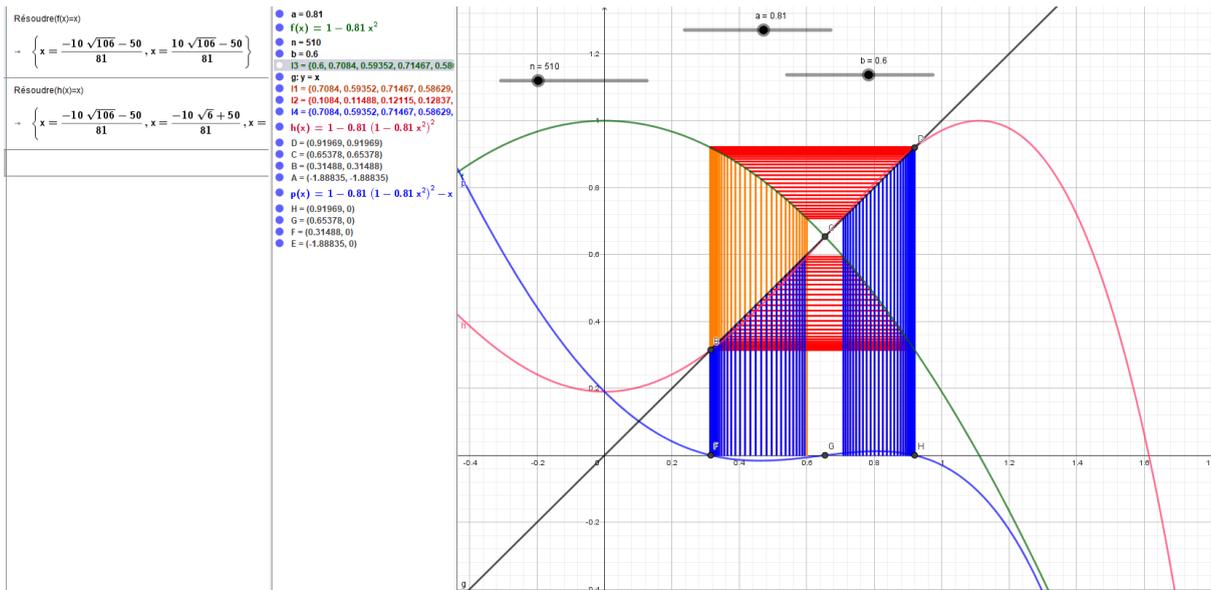
f_n	G	f			
	A	B	C	D	E
1					
2	0	0.6	0.7084		
3	1	0.59352	0.71467		
4	2	0.58629	0.72157		
5	3	0.57826	0.72915		
6	4	0.56936	0.73742		
7	5	0.55953	0.74641		
8	6	0.54872	0.75611		
9	7	0.53692	0.76649		
10	8	0.52412	0.77749		
11	9	0.51036	0.78902		
12	10	0.49573	0.80094		
13	11	0.48038	0.81308		
14	12	0.46451	0.82523		
15	13	0.44839	0.83715		
16	14	0.43234	0.8486		
17	15	0.4167	0.85935		
18	16	0.40183	0.86921		
19	17	0.38802	0.87805		
20	18	0.37552	0.88578		
21	19	0.36447	0.8924		
22	20	0.35493	0.89796		
23	21	0.34687	0.90254		
24	22	0.34019	0.90626		
25	23	0.33474	0.90924		
26	24	0.33036	0.9116		
27	25	0.32688	0.91345		
28	26	0.32414	0.91489		
29	27	0.32201	0.91601		
30	28	0.32035	0.91688		
31	29	0.31906	0.91754		
32	30	0.31808	0.91805		
33	31	0.31732	0.91844		
34	32	0.31674	0.91874		
35	33	0.3163	0.91897		
36	34	0.31606	0.91914		

Nous avons pu observer le comportement de cette suite grâce à plusieurs outils :

- ★ La modélisation de suite sur calculatrice
- ★ Une feuille de tableur. Il était alors compliqué de voir les limites de la suite car les valeurs étaient très proches sans être égales.

NOTRE OUTILS PRINCIPAL :

- ★ Graphique Geogebra modélisant la courbe $f(x)=1-ax^2$ et la courbe $g(x)=x$ afin d'obtenir la valeur des termes de la suite en fonction du premier terme x_0 , ici noté b.



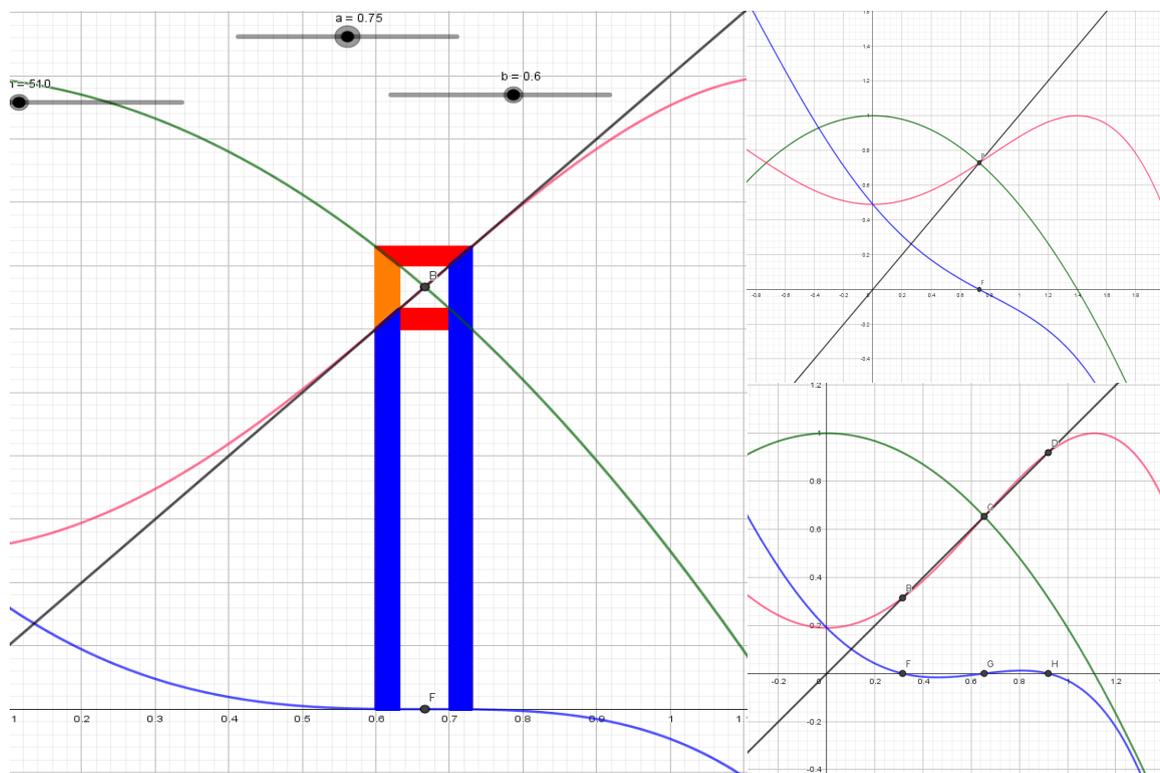
II. Comportement de la suite

Pour toutes nos observations, $b=x_0=0,6$

- ★ Pour $0 < a \leq 1$ et $0 \leq x_0 \leq 1$ tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[0; 1]$.
- ★ La suite converge pour une valeur de $a \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$ (au départ, nous pensions que c'était 0,748)
- ★ Pour $a > \frac{3}{4}$, la suite n'est plus convergente. L'ensemble des termes d'indices pairs converge vers un nombre réel et l'ensemble des termes d'indices impairs vers un autre nombre réel.

III. Comportement des fonctions

On pose h la fonction telle que pour $x \in [0; 1]$ $h(x)=f(f(x))$. La courbe représentative de cette fonction admet un seul point d'intersection avec la courbe $y=x$ dans l'intervalle $[0; 1]$ pour $0 < a \leq 0,75$. Pour de plus grandes valeurs de a , elle admet 3 points d'intersection.



Démonstrations

❖ La Suite reste dans l'intervalle [0; 1]

Nous aimerions démontrer que la suite ne sort pas de l'intervalle [0; 1] pour un $a \in [0; 1]$. Pour ceci, nous utilisons un raisonnement par récurrence:

Posons $x_0 \in [0; 1]$ et $0 \leq a \leq 1$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété: " $0 \leq x_n \leq 1$ "

Initialisation

Pour $n=0$, on pose $0 \leq x_0 \leq 1$. La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité

Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un certain entier n .

On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$0 \leq x_n \leq 1.$$

Or la fonction $f: x \rightarrow 1 - ax^2$ est une fonction décroissante sur [0; 1]. D'où

$$f(0) \geq f(x_n) \geq f(1)$$

$$1 \geq x_{n+1} \geq 1 - a$$

or $0 \leq a \leq 1$ donc $1 - a \geq 0$ soit:

$$0 \leq 1 - a \leq x_{n+1} \leq 1$$

La propriété $P(n + 1)$ est alors vraie.

Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❖ Étude de la fonction h

Pour la suite de nos démonstrations, nous aurons besoin des variations de la fonction h définie tel pour $x \in [0; 1]$ par $h(x)=f(f(x))$ soit $h(x) = 1 - a(1 - ax^2)^2$

Pour cela, étudions la fonction f :

Soit f' la dérivée de f : $f'(x) = -2ax$. Or $x_0 \in [0, 1]$ et $0 \leq a \leq 1$ donc $f'(x) \leq 0$

Ainsi, f est décroissante sur $[0, 1]$.

Sachant que la fonction h est la composée de la fonction f par elle-même, elle est la composée de deux fonctions strictement décroissantes donc elle est strictement croissante sur $[0, 1]$

❖ Etude de la suite pour $a < 0,75$

➤ Etude d'un cas particulier

Posons $a = \frac{1}{4}$ et $x_0 = 0,6$

Pour tout réel x ,

$$h(x) = f(f(x))$$

$$\text{Ainsi } h(x) = 1 - a(1 - ax^2)$$

$$\text{Et donc } h(x) = \frac{-1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note (u_n) la suite des termes d'indice pair de la suite (x_n) .
 (u_n) est définie par $u_{n+1} = h(u_n)$ et $u_0 = x_0 = 0,6$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note (v_n) la suite des termes d'indice impair de la suite (x_n) .
 (v_n) est définie par $v_{n+1} = h(v_n)$ et $v_0 = x_1 = 0,9$

Observons la suite (u_n) :

D'après les premiers termes, la suite (u_n) semble croissante: $u_0 = 0,6$, $u_1 = 0,79$, $u_2 = 0,82\dots$

D'après la partie précédente, la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a . Ainsi, (u_n) est majorée par 1.

Prouvons le par un raisonnement par récurrence: :

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$, la propriété: " $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ "

Initialisation

Pour $n=0$, $u_0 = 0,6$ et $u_1 = h(u_0) = 0,79$ soit $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$.

La propriété est donc vraie au rang 0.

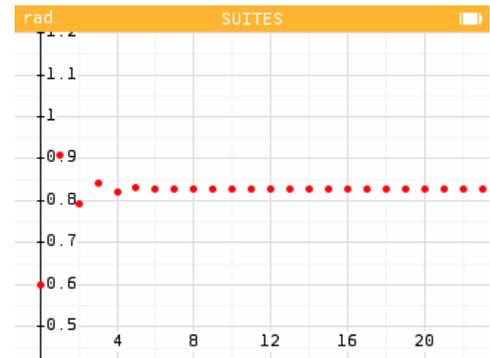
Hérédité

Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un certain entier n .

On a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ D'après l'hypothèse de récurrence
 $h(0) \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(1)$ Car la fonction h est croissante sur $[0;1]$

Donc $0 \leq \frac{3}{4} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{55}{64} \leq 1$

La propriété $P(n + 1)$ est alors vraie.



Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vient alors de démontrer que la suite (u_n) est donc croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite converge ainsi vers une limite $0 \leq l_0 \leq 1$.

En conclusion :

- La suite (u_n) converge vers une limite $0 \leq l_0 \leq 1$.
- Elle est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$.
- La fonction h est une fonction polynôme de degré 4, c'est donc une fonction continue.

Ainsi, d'après le théorème de point fixe, la limite l_0 est un point fixe de la fonction h soit l_0 est solution de l'équation $h(x) = x$.

Observons la suite (v_n)

D'après les premiers termes de la suite (v_n) la suite semble décroissante : $v_0 = 0,91$, $v_1 = 0,84$, $v_2 = 0,83\dots$

D'après la partie précédente, la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a . Ainsi, (v_n) est minorée par 0.

Prouvons le par un raisonnement par récurrence :

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$, la propriété : " $0 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1$ "

Initialisation

Pour $n=0$, $v_0 = 0,91$ et $v_1 = h(v_0) = 0,84$ soit $0 \leq v_1 \leq v_0 \leq 1$.

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité

Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un certain entier n .

On a : $0 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1$ D'après l'hypothèse de récurrence

$h(0) \leq h(v_{n+1}) \leq h(v_n) \leq h(1)$ Car la fonction h est croissante sur $[0;1]$

Donc $0 \leq \frac{3}{4} \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq \frac{55}{64} \leq 1$

La propriété $P(n + 1)$ est alors vraie.

Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vient alors de démontrer que la suite (v_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite converge ainsi vers une limite $0 \leq M_0 \leq 1$.

En conclusion :

- La suite (v_n) converge vers une limite $0 \leq M_0 \leq 1$.
- Elle est définie par récurrence par $v_{n+1} = h(v_n)$.
- La fonction h est une fonction polynôme de degré 4, c'est donc une fonction continue.

Ainsi, d'après le théorème de point fixe, la limite M_0 est un point fixe de la fonction h , M_0 vérifie $h(M_0) = M_0$.

Trouvons les limite L_0 et M_0 :

$$h(x) = x \Leftrightarrow 1 - a(1 - ax^2) = x \Leftrightarrow \frac{-1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4} = x \Leftrightarrow \frac{-1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{3}{4} = 0$$

Pour résoudre cette équation,, étudions la fonction d définie tel que :

$$d(x) = \frac{-1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{3}{4}$$

d est dérivable sur \mathbb{R} et sa fonction dérivée est donnée par $d'(x) = \frac{-x^3 + 4x - 16}{16}$.

Nous avons besoin du signe de cette dérivée $[0;1]$. Pour cela, nous cherchons ses variations sur $[0;1]$. Introduisons alors la dérivée seconde de d :

$$d''(x) = \frac{-3x^2 + 4}{16}$$

Pour $x \in [0; 1]$, $-3x^2 + 4 > 0$ donc $d''(x) > 0$. Dans ce cas, d' est croissante sur $[0;1]$

donc les images de x dans cet intervalle par la fonction dérivée sont inférieures à l'image de 1

: $d'(x) < d'(1)$. Or $d'(1) = \frac{-13}{16}$. D'où $d'(x) < \frac{-13}{16} < 0$ donc d' est négative sur $[0;1]$ et la

fonction d est décroissante.

On obtient alors le tableau :

x	0	1
Signe de d'(x)	-	
Variations de d(x)	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{64}$

- La fonction d est une fonction continue comme fonction polynôme.
- La fonction d est strictement décroissante sur $[0;1]$.
- $f(0) = \frac{3}{4}$, $f(1) = \frac{-9}{64}$ et $0 \in \left[\frac{-9}{64}; \frac{3}{4} \right]$

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $d(x)=0$ et donc $h(x)=x$ admet une seule solution sur $[0;1]$. La fonction $h(x)$ n'admet alors qu'un seul point fixe dans l'intervalle. En conclusion, $L_0=M_0$ donc les sous-suite (u_n) et (v_n) convergent vers une seule et même limite. La suite (x_n) converge donc.

Cherchons la valeur de M_0 et L_0 , les solutions à $h(x)=x$, ou bien $d(x)=0$.

$$d(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{3}{4} = 0$$

On se retrouve face à un polynôme de degré 4. Or si on trouve les solutions à $f(x)=x$ alors, on aura déjà 2 racines du polynômes d. Car si $f(x)=x$ on a également $f(f(x))=f(x)=x$.

On résout alors :

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4}x^2 = x \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow -((x+2)^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow -((x+2)^2 - (2\sqrt{2})^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow -(x - 2\sqrt{2} + 2)(x + 2\sqrt{2} + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2\sqrt{2} - 2; -2\sqrt{2} - 2\}. \end{aligned}$$

Or, $-2\sqrt{2} - 2 < 0$ donc n'appartient pas à l'intervalle $[0;1]$

La seule solution pour $M_0=L_0$ est $-2 + 2\sqrt{2} \approx 0.83$. Elle appartient bien à l'intervalle $[0;1]$.

On trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = L_0 = M_0 = -2 + 2\sqrt{2}$

➤ Dans le cas général

Jusqu'ici nous avons fixé le $a = \frac{1}{4}$ et le premier terme $x_0 = 0,6$. Maintenant, nous cherchons à démontrer que la suite (x_n) converge pour tout $a \leq 0,75$ et pour tout x_0 de l'intervalle $[0;1]$.

Nous voulons pour cela déterminer le sens de variations et la convergence des sous-suites (u_n) et (v_n) selon le premier terme de la suite principale x_0 .

Pour cela nous allons utiliser le théorème de points fixes et la fonction d définie sur $[0;1]$ par $d(x) = h(x) - x$.

Le tableau de signe de la fonction d

Pour cela cherchons les racines de ce polynôme :

$$d(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - a(1 - ax^2)^2 - x = 0 \Leftrightarrow 1 - a + 2a^2x^2 - a^3x^4 - x = 0.$$

On se retrouve face à un polynôme de degré 4... Or si on trouve les solutions à $f(x)=x$ alors, on aura déjà 2 racines du polynôme d .

$$\text{Soit : } f(x) = x \Leftrightarrow 1 - ax^2 = x \Leftrightarrow -ax^2 - x + 1 = 0$$

Celui-ci est un polynôme de degré 2 avec $\alpha = -a$, $\beta = -1$ et $\gamma = 1$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = 1 + 4a$$

Pour un $a \neq 0$ dans l'intervalle $]0;1]$ on a $\Delta > 0$ et le polynôme admet donc 2 racines:

$$\varphi_0 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{-2a}$$

$$\varphi_{0'} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{-2a} < 0$$

La fonction d étant un polynôme de degré 4 avec pour racines x_0 et x_0 . Elle peut s'écrire sous la forme $d(x) = -a^3(x - \varphi_0)(x - \varphi_0)(x - \varphi_1)(x - \varphi_2)$ avec x_1 et x_2 à déterminer.

Or on sait déjà que $-ax^2 - x + 1 = -a(x - \varphi_0)(x - \varphi_0)$

$$\text{Soit } d(x) = a^2(-ax^2 - x + 1)(cx^2 + bx + e)$$

$$\Leftrightarrow d(x) = (-a^3x^2 - a^2x + a^2)(cx^2 + bx + e)$$

$$\Leftrightarrow d(x) = -a^3x^4c - ba^3x^3 - a^3x^2e - ca^2x^3 - ba^2x^2 - ea^2x + ca^2x^2 + ba^2x + ea^2$$

$$\Leftrightarrow d(x) = (-a^3c)x^4 + (-ba^3 - ca^2)x^3 + (-a^3e - ba^2 + ca^2)x^2 + (-ea^2 + ba^2)x + ea^2$$

Par identification avec notre première expression de la fonction, on se retrouve à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} -a^3c = -a^3 \\ -ba^3 - ca^2 = 0 \\ -a^3e - ba^2 + ca^2 = 2a^2 \\ -ea^2 + ba^2 = -1 \\ ea^2 = 1 - a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = 1 \\ b = \frac{-1}{a} \\ e = \frac{1-a}{a^2} \end{array} \right. \quad \text{car } a \neq 0$$

$$\text{Donc on a } d(x) = -a^3(x - x_0)(x - x_0)\left(x^2 + \left(\frac{-1}{a}\right)x + \frac{1-a}{a^2}\right)$$

Ainsi, pour trouver les dernières racines du polynôme on doit trouver celles de $x^2 - \frac{1}{a}x + \frac{1-a}{a^2}$.

Celui-ci est un polynôme du second degré avec $\alpha = 1$, $\beta = \frac{-1}{a}$ et $\gamma = \frac{1-a}{a^2}$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left(\frac{-1}{a}\right)^2 - \frac{1-a}{a^2} * 4 = \frac{-3+4a}{a^2}$$

Ici, nous sommes dans le cas où $a < 0,75$ donc on a $\Delta < 0$ donc le polynôme n'admet pas de racines réelles

La fonction d admet alors une seule racine dans notre intervalle d'étude : φ_0 .

$$\text{Et dans l'expression de la fonction d : } d(x) = -a^3(x - x_0)(x - x_0)\left(x^2 + \left(\frac{-1}{a}\right)x + \frac{1-a}{a^2}\right)$$

le coefficient dominant $-a^3$ est négatif car $a > 0$. Donc la fonction d étant un polynôme de degré 4 avec un coefficient dominant négatif est donc positive s'annule et devient négative. De plus, on sait que f est une fonction décroissante. On peut alors construire le tableau :

x	0	φ_0	1
Signe de d(x)	+	0	-
Variations de f(x)			

Etude des sous-suites :

Nous allons maintenant étudier les sous-suites (u_n) et (v_n) .

Rappelons que (u_n) est la suite des termes pairs de la suite (x_n) définie par récurrence par $u_{n+1}=h(u_n)$ et (v_n) est la suite des termes impairs de la suite (x_n) définie par récurrence par $v_{n+1}=h(v_n)$

→ Pour $x_0 \in [0, \varphi_0[$

On observe que si $x_0 = u_0 \in [0, \varphi_0[$ alors,

$$d(u_0) > 0 \Leftrightarrow h(u_0) - u_0 > 0 \Leftrightarrow h(u_0) > u_0 \Leftrightarrow u_1 > u_0$$

Dès lors, la suite (u_n) apparaît comme croissante. Or on démontré que la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a . Alors, la suite (u_n) semble également majorée par 1.

Prouvons le par récurrence :

Pour tous $n \in N$, notons P(n), la propriété : " $1 \geq u_{n+1} \geq u_n \geq 0$ "

Initialisation

$$1 \geq u_1 \geq u_0 \geq 0.$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité

Supposons que la propriété P(n) soit vraie pour un certain entier n.

On a : $1 \geq u_{n+1} \geq u_n \geq 0$ d'après l'hypothèse de récurrence

$$h(1) \geq h(u_{n+1}) \geq h(u_n) \geq h(0) \quad \text{Car la fonction } h \text{ est croissante sur } [0;1[$$

$$\text{Donc} \quad 1 \geq 1 - a(1 - a)^2 \geq u_{n+2} \geq u_{n+1} \geq 1 - a \geq 0$$

car $1 > a$ donc $1 - a > 0$ d'où $a(1 - a)^2 > 0$ et ainsi $1 - a(1 - a)^2 < 1$.

La propriété est donc vraie pour tout n+1.

Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in N$.

On vient alors de démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite $L > 1$.

Ainsi,

- La suite (u_n) converge vers une limite $0 < L < 1$
- Elle est définie par récurrence par $u_{n+1} = h(u_n)$
- La fonction h est une fonction polynôme de degré 4, c'est donc une fonction continue.

Donc, d'après le théorème de point fixe, la limite L est un point fixe de la fonction h, L vérifie $h(L) = L$

Or d'après notre étude de la fonction d, dans notre situation, la fonction h n'admet pour seul point fixe le point x_0 . Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \varphi_0$

Pour la suite (v_n) , si $x_0 \in [0, \varphi_0[$ alors $v_0 = f(x_0) \in [\varphi_0; 1]$

Or d'après le tableau de signe de d, dans cet intervalle,

$$d(v_0) < 0 \text{ donc } h(v_0) - v_0 < 0 \text{ et ainsi } h(v_0) < v_0 \text{ d'où } v_1 < v_0$$

Dès lors, la suite (v_n) apparaît comme décroissante. Or on a démontré que la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quel que soit la valeur de x_0 et de a. Alors, la suite (v_n) semble également minorée par 0.

Nous pouvons prouver tout cela par récurrence comme précédemment et on en arrive à la conclusion que (v_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \varphi_0$.

Ainsi, les deux sous-suites admettent les mêmes limites donc la suite (x_n) est convergente en

$$\varphi_0 = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{-2a} \text{ c'est à dire que } \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \varphi_0 = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{-2a}$$

→ Pour $x_0 \in [\varphi_0; 1]$

En raisonnant de la même façon, on trouve ici que (u_n) est décroissante et minorée donc converge vers un point fixe de h. Or, avec un $a \in [0; \frac{3}{4}]$, la fonction h n'a qu'un seul point fixe φ_0 dans $[0; 1]$. Donc la suite (u_n) converge en φ_0 .

On trouve également que la sous suite (v_n) est croissante et majorée donc converge vers un point fixe de h, φ_0 .

Ainsi, la suite (x_n) est convergente et tend vers $\varphi_0 = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{-2a}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \varphi_0 = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{-2a}.$$

➤ Conclusion

Nous avons ici démontré que quelque soit la valeur de a dans l'intervalle $[0; \frac{3}{4}]$, les deux sous

suites (u_n) et (v_n) admettent la même limite : $\varphi_0 = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{-2a}$. Ainsi, la suite (x_n) est

convergente lorsque $0 \leq a \leq \frac{3}{4}$.

❖ Etude de la suite pour $a > 0,75$

➤ Etude d'un cas particulier

Posons $a = 0,8$, $x_0 = 0,6$ et

$$h(x) = 1 - a(1 - ax^2)^2 = 1 - 0,8(1 - 0,8x^2)^2.$$

On a (u_n) la suite des termes pairs de la suite (x_n) définie par $u_{n+1} = h(u_n)$ et $u_0 = x_0 = 0,6$

On a (v_n) la suite des termes impairs de la suite (x_n) définie par $v_{n+1} = h(v_n)$ et $v_0 = x_1 = 0,712$.

Observons la suite (u_n) :

D'après les premiers termes, la suite (u_n) semble décroissante: $u_0 = 0,6$, $u_1 = 0,594$, $u_2 = 0,588...$

D'après la partie précédente, la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a . Ainsi, (u_n) apparaît aussi comme minorée par 0.

Prouvons-le par une récurrence:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$, la propriété : " $1 \geq u_n \geq u_{n+1} \geq 0$ ".

Initialisation

Pour $n=0$, $u_0 = 0,6$ et $u_1 = 0,594$ soit $1 \geq u_0 \geq u_1 \geq 0$. La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité

Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un certain entier n . On a :

$$1 \geq u_n \geq u_{n+1} \geq 0 \quad \text{D'après l'hypothèse de récurrence}$$

Soit $h(1) \geq h(u_n) \geq h(u_{n+1}) \geq h(0)$ car la fonction h est croissante sur $[0,1]$

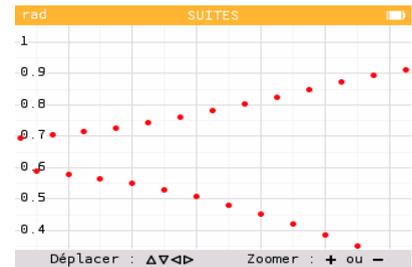
D'où $1 \geq 0,968 \geq u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq 0,2 \geq 0$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vient alors de démontrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite converge ainsi vers une limite $0 \leq L \leq 1$.



En résumé,

- La suite (u_n) est décroissante et converge vers une limite $0 \leq L \leq 1$.
- Elle est définie par récurrence par $u_{n+1} = h(u_n)$.
- La fonction h est une fonction polynôme de degré 4, c'est donc une fonction continue.

Donc, d'après le théorème de point fixe, la limite L de la suite (u_n) est un point fixe de la fonction h , L vérifie $h(L) = L$.

Trouvons L :

$$h(x) = x \Leftrightarrow h(x) - x = 0 \Leftrightarrow d(x) = 0$$

Or on sait que $d(x) = a^2(-ax^2 - x + 1)\left(x^2 - \frac{1}{a}x + \frac{1-a}{a^2}\right)$ donc avec $a=0,8$:

$$h(x) = x \Leftrightarrow d(x) = 0,64(-0,8x^2 - x + 1)\left(x^2 - 1,25x + \frac{5}{16}\right) = 0$$

$$\text{On a } -0,8x^2 - x + 1 = 0 \text{ ou } x^2 - 1,25x + \frac{5}{16} = 0$$

$-0,8x^2 - x + 1$ est un polynôme de degré 2 avec un déterminant

$$\Delta_1 = (-1)^2 + 4 * 0,8 = 4,2 > 0 \text{ Donc ce polynôme admet 2 racines réelles :}$$

$$x_0 = \frac{1 + \sqrt{4,2}}{-1,6} = \frac{-5 - \sqrt{105}}{8} \simeq -1,91$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{4,2}}{-1,6} = \frac{-5 + \sqrt{105}}{8} \simeq 0,66$$

De plus, $x^2 - 1,25x + \frac{5}{16}$ est un second polynôme du second degré avec pour déterminant :

$$\Delta_2 = (-1,25)^2 - 4 * \frac{5}{16} = \frac{5}{16} > 0 \text{ donc ce polynôme admet 2 racines réelles :}$$

$$x_2 = \frac{1,25 + \sqrt{\frac{5}{16}}}{2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \simeq 0,90$$

$$x_3 = \frac{1,25 - \sqrt{\frac{5}{16}}}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \simeq 0,35$$

$$\text{Donc } S = \left\{ x_0 = \frac{-5 - \sqrt{105}}{8}; x_3 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}; x_1 = \frac{-5 + \sqrt{105}}{8}; x_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \right\}$$

Or $u_0 = 0,6$, la suite est décroissante et minorée par 0. Donc $L = x_3$ d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = x_3 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}.$$

Observons la suite (v_n)

D'après les premiers termes, (v_n) semble croissante: $v_0=0,712$, $v_1=0,717$, $v_2=0,723\dots$

D'après la partie précédente, la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a . Ainsi, (v_n) apparaît comme majorée par 1.

Prouvons le par récurrence :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$, la propriété : " $1 \geq v_{n+1} \geq v_n \geq 0$ "

Initialisation

Pour $n=0$, $v_0=0,712$ et $v_1=0,717$ soit $1 \geq v_1 \geq v_0 \geq 0$. La propriété est donc vraie au rang 0

Hérédité

Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un certain entier n . On a:

$$1 \geq v_{n+1} \geq v_n \geq 0 \quad \text{D'après l'hypothèse de récurrence}$$

Soit $h(1) \geq h(v_{n+1}) \geq h(v_n) \geq h(0)$ car la fonction h est croissante sur $[0,1]$

$$\text{D'où} \quad 1 \geq 0,968 \geq v_{n+2} \geq v_{n+1} \geq 0,2 \geq 0$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vient alors de démontrer que la suite (v_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite converge ainsi vers une limite $0 \leq M \leq 1$.

En résumé,

- La suite (v_n) est croissante et converge vers une limite $0 \leq M \leq 1$.
- Elle est définie par récurrence par $v_{n+1}=h(v_n)$.
- La fonction h est une fonction polynôme de degré 4, c'est donc une fonction continue.

Donc, d'après le théorème de point fixe, la limite M de la suite (v_n) est un point fixe de la fonction h , M vérifie $h(M)=M$.

Trouvons M :

De même que précédemment, trouver les points fixes de h revient à trouver les racines de d avec $a=0,8$ donc ici nous avons pour solutions :

$$S = \left\{ x_0 = \frac{-5-\sqrt{105}}{8}; x_3 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}; x_1 = \frac{-5+\sqrt{105}}{8}; x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \right\}$$

Or $v_0=0,712$ et la suite est croissante. Donc $M=x_2$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (M_n) = x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$.

Conclusion:

Les deux sous suites de la suite principale (x_n) convergent toutes deux. Or elles n'admettent pas la même limite : $L \neq M$. Il n'y a donc pas convergence de la suite (x_n) .

➤ Dans le cas général

Jusqu'ici nous avons fixé le a et le premier terme x_0 . Maintenant, nous cherchons à démontrer que la suite (x_n) ne converge plus pour tout $a > 0,75$ et pour tout x_0 de l'intervalle $[0;1]$.

Nous voulons ainsi déterminer le sens de variations et la convergence des sous-suites (u_n) et (v_n) selon le premier terme de la suite principale x_0 .

Pour cela nous allons utiliser le théorème de points fixes et la fonction d définie tel que $d(x) = h(x) - x$.

Le tableau de signe de la fonction $d(x)$

Pour cela cherchons les racines de ce polynôme, nous savons déjà qu'il en admet 2 :

$$\varphi_0 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{-2a}$$

$$\varphi_{0'} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{-2a} < 0.$$

Et nous savons également que d s'écrit de la forme:

$$d(x) = -a^3 \left(x - \varphi_{0'}\right) \left(x - \varphi_0\right) \left(x^2 + \frac{-1}{a}x + \frac{1-a}{a^2}\right).$$

Ainsi, pour trouver les dernières racines du polynôme on doit trouver celle de $x^2 - \frac{1}{a}x + \frac{1-a}{a^2}$.

Celui-ci est un polynôme du second degré avec $\alpha = 1$, $\beta = \frac{-1}{a}$ et $\gamma = \frac{1-a}{a^2}$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = \left(\frac{-1}{a}\right)^2 - \frac{1-a}{a^2} * 4 \Leftrightarrow \Delta = \frac{-3+4a}{a^2}$$

Ici, nous étudions le cas où a est supérieur à $\frac{3}{4}$ donc notre déterminant Δ est positif et le polynôme admet 2 racines réelles :

$$\varphi_1 = \frac{1 - \sqrt{-3+4a}}{2a}$$

$$\varphi_2 = \frac{1 + \sqrt{-3+4a}}{2a}$$

Pour construire le tableau de signe de d , nous avons besoin maintenant de connaître l'ordre de ses racines.

On a :

$$\frac{3}{4} \leq a \leq 1 \text{ donc } 2 \leq \sqrt{1+4a} \leq \sqrt{5} \text{ et } 0 \leq \sqrt{4a-3} \leq 1$$

D'où

$$2 \leq \sqrt{1+4a} + \sqrt{4a-3} \text{ donc } 1 - \sqrt{4a-3} \leq -1 + \sqrt{4a+1} \text{ et } \frac{1-\sqrt{4a-3}}{2a} \leq \frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2a}$$

Alors $\varphi_1 \leq \varphi_0$

On sait que $4\sqrt{4a-3} \geq 0$ car une racine est toujours positive.

$$\text{Soit : } 4\sqrt{4a-3} + 1 + 4a \geq 1 + 4a \text{ donc } 4 + 4\sqrt{4a-3} - 3 + 4a \geq 1 + 4a$$

$$\text{et ainsi } (2 + \sqrt{4a-3})^2 \geq 1 + 4a \text{ on obtient donc } 2 + \sqrt{4a-3} \geq \sqrt{1+4a}$$

$$\text{puis } 1 + \sqrt{4a-3} \geq -1 + \sqrt{1+4a}$$

$$\text{et finalement } \frac{1+\sqrt{4a-3}}{2a} \geq \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a} \text{ et donc } \varphi_2 \geq \varphi_0.$$

Tableau de variations de f

f est une fonction décroissante. On a alors le tableau :

x	0	φ_1	φ_0	φ_2	1
Signe de d(x)	+	0	-	0	-
Variations de f(x)					

Etude des sous-suites :

Nous allons maintenant étudier les sous-suites (u_n) et (v_n) .

Rappelons que (u_n) est la suite des termes pairs de la suite (x_n) définie par récurrence par $u_{n+1}=h(u_n)$ et (v_n) est la suite des termes impairs de la suite (x_n) définie par récurrence par $v_{n+1}=h(v_n)$

→ Pour $x_0 \in [0, \varphi_1[$;

On observe que si $x_0 = u_0 \in [0, \varphi_1[$ alors,

$$d(u_0) > 0 \Leftrightarrow h(u_0) - u_0 > 0 \Leftrightarrow h(u_0) > u_0 \Leftrightarrow u_1 > u_0$$

Dès lors, la suite (u_n) apparaît comme croissante. Or on démontré que la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a . Alors, la suite (u_n) semble également majorée par 1.

Prouvons le par récurrence :

Pour tout $n \in N$, notons $P(n)$, la propriété : " $1 \geq u_{n+1} \geq u_n \geq 0$ "

Initialisation

$$1 \geq u_1 \geq u_0 \geq 0.$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité

Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un certain entier n .

On a : $1 \geq u_{n+1} \geq u_n \geq 0$ D'après l'hypothèse de récurrence

$$h(1) \geq h(u_{n+1}) \geq h(u_n) \geq h(0) \quad \text{Car la fonction } h \text{ est croissante sur } [0;1[$$

Donc $1 \geq 1 - a(1 - a)^2 \geq u_{n+2} \geq u_{n+1} \geq 1 - a \geq 0$

Car $1 > a \Leftrightarrow 1 - a > 0 \Leftrightarrow a(1 - a)^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - a(1 - a)^2 < 1$

La propriété est donc vraie pour tout $n+1$.

Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in N$.

On vient alors de démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la sous suite (u_n) converge vers une limite $L \leq 1$.

Ainsi,

- La suite (u_n) converge vers une limite $0 \leq L \leq 1$.
- Elle est définie par récurrence tel que $u_{n+1} = h(u_n)$.
- La fonction h est une fonction polynôme de degré 4, c'est donc une fonction continue.

Donc, d'après le théorème de point fixe, la limite L est un point fixe de la fonction h , L vérifie $h(L) = L$.

Par analyse, on sait que (u_n) est croissante et converge vers un point fixe de h . Donc on peut en conclure qu'elle va converger vers le premier point fixe, ici φ_1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \varphi_1$

Pour la suite (v_n) , si $x_0 \in [0, \varphi_1[$ alors $v_0 = f(x_0) \in [\varphi_2; 1]$.

Or d'après le tableau de d , dans cette intervalle,

$$d(v_0) < 0 \Leftrightarrow h(v_0) - v_0 < 0 \Leftrightarrow h(v_0) < v_0 \Leftrightarrow v_1 < v_0.$$

Dès lors, la suite (v_n) apparaît comme décroissante. Or on démontré que la suite reste dans l'intervalle $[0; 1]$ quelque soit la valeur de x_0 et de a . Alors, la suite (v_n) semble également minorée par 0.

Nous pouvons prouver tout cela par récurrence comme précédemment et on en arrive à la conclusion que (v_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \varphi_2$.

Ainsi, les deux sous-suites n'admettent pas la même limite donc la suite (x_n) n'est plus

convergente en : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \varphi_1 = \frac{1 - \sqrt{-3+4a}}{2a} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \varphi_2 = \frac{1 + \sqrt{-3+4a}}{2a}$.

En procédant de même, on en déduit que

★ Pour $x_0 \in]\varphi_1, \varphi_0[$:

La sous-suite (u_n) est décroissante et converge en φ_1 et la sous-suite (v_n) est croissante et converge en φ_2 .

★ Pour $x_0 \in]\varphi_0, \varphi_2[$:

La sous-suite (u_n) est croissante et converge en φ_2 et la sous-suite (v_n) est décroissante et converge en φ_1 .

★ Pour $x_0 \in]\varphi_2, 1]$:

La sous-suite (u_n) est décroissante et converge en φ_2 et la sous-suite (v_n) est croissante et converge en φ_1 .

➤ Conclusion

Ainsi, qu'importe le premier terme, pour un $a \geq \frac{3}{4}$, les deux sous-suites sont convergentes chacune vers un point fixe différent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$. Alors la suite globale (x_n)

n'est pas convergente.

Conclusion

Le sujet de Maths en Jean “ en route vers le chaos” modélise une suite chaotique. La suite chaotique appartient au groupe des suites logistiques, type de suites popularisées par le biologiste Robert May et créé par le mathématicien Pierre François Verhulst. Une application de la suite logistique peut résider dans la modélisation de la taille d'une population biologique au fil des générations.

Nous avons dans un premier temps modélisé notre suite sur Geogebra et nous avons remarqué que son comportement était chaotique. En effet, avec des calculs, nous avons observé que la suite converge vers un unique réel pour une valeur de a entre 0 et 0,75. Au-dessus de 0,75, la suite n'est plus convergente, les deux sous-suite converge vers des valeurs différentes. L'ensemble des termes d'indices pairs converge vers un nombre réel et l'ensemble des termes d'indices impairs vers un autre nombre réel. Les deux sous-suites convergent vers deux points distincts, donc la suite (x_n) ne converge plus.

Notre suite peut, en apparence, sembler simple à étudier au vu de sa relation de récurrence basée sur une fonction polynôme du second degré. Mais dès lors que l'on change un simple paramètre, son comportement peut devenir complexe, voire chaotique. En effet, cette suite est une ouverture vers la théorie du chaos dans le sens où elle est très sensible au paramètre a .