Triangles harmonieux

Année 2021 – 2022

Clara TIZZANO, Anastasia POIRIER, élèves de classe de Seconde

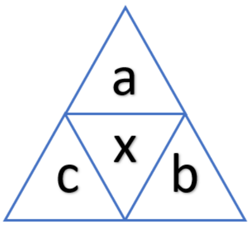
Encadrés par Yohann MOREAU

Établissement :Lycée Pierre-Gilles de Gennes ENCPB

Chercheuses : Catherine GILLE et Marie-Claude ARNAUD, Université Paris Cité et Institut de Mathématiques de Jussieu–Paris Rive Gauche.

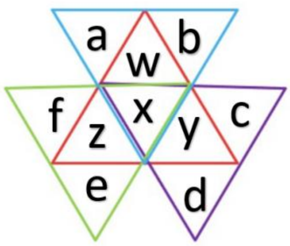
1. Présentation du sujet

On considère un triangle, formé de quatre triangles équilatéraux. Chaque triangle contient un nombre (réel) :



Définition : On appelle triangle harmonieux, un triangle dont la moyenne des nombres des triangles externes est égale au nombre du triangle central. C'est-à-dire $\frac{a+b+c}{3} = x.$

Maintenant si l'on cherche à imbriquer ces triangles, on trouve la forme ci-dessous, que l'on nommera étoile imbriquée.



Définition : On dit qu'une étoile imbriquée est harmonieuse si les quatre triangles qui la composent sont harmonieux. C'est-à-dire :

$\frac{w+y+z}{3}=x;$ $\frac{a+b+x}{3}=w\ ;$ $\frac{c+d+x}{3}=y;$ $\frac{f+e+x}{3}=z.$

Dans l'étoile imbriquée : a, b, c, d, e, f sont appelés les extrémités ; w, y, z, x sont appelés les centraux ; x est appelé le centre.

(1)

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

Nous avons essayé de compléter le triangle avec différentes valeurs numériques pour constater que de telles étoiles imbriquées harmonieuses sont nombreuses.

Connaissant les extrémités, nous avons toujours réussi à compléter les centraux pour rendre harmonieuse l'étoile imbriquée. Nous conjecturons qu'il n'existe qu'une façon de le faire.

Inversement, connaissant les centraux, il semble exister une infinité de façons de choisir les extrémités pour rendre l'étoile imbriquée harmonieuse.

Notre travail nous a amenées à imaginer des opérations entre étoiles imbriquées et aussi à considérer des structures similaires plus grandes.

3. Texte de l'article

A. En connaissant les extrémités, on se demande combien de solutions il existe pour remplir les centraux.

On considère une étoile imbriquée harmonieuse, par définition on a les égalités suivantes :

$$\frac{w+y+z}{3}=x; \qquad \frac{a+b+x}{3}=w\ ; \qquad \frac{c+d+x}{3}=y; \qquad \frac{f+e+x}{3}=z.$$

Alors, en substituant : $$\frac{\left(\frac{a+b+x}{3}\right)+\left(\frac{c+d+x}{3}\right)+\left(\frac{e+f+x}{3}\right)}{3}=x$$

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{9}+\frac{x}{3}=x$$
$$\frac{a+b+c+d+e+f}{9}=\frac{2}{3}x$$
$$\frac{a+b+c+d+e+f}{6}=x$$

On trouve donc qu'il n'existe qu'une seule valeur possible pour le centre qui rend l'étoile imbriquée harmonieuse. Il n'existe donc qu'une seule valeur possible pour les centraux afin qu'elle reste harmonieuse :

$$w=\frac{a+b+x}{3}\ ; \qquad y=\frac{c+d+x}{3}; \qquad z=\frac{e+f+x}{3}$$

Propriété : Si une étoile imbriquée est harmonieuse et que les extrémités sont données alors il n'existe qu'une seule valeur possible pour les centraux.

(2)
(3)

B. En connaissant les centraux, on se demande combien de solutions il existe pour remplir les extrémités.

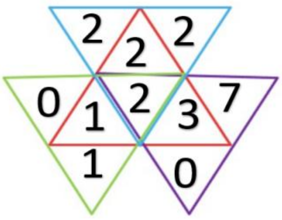
Si l'étoile imbriquée est harmonieuse, on a $\frac{a+b+x}{3} = w$, donc $\frac{a+b}{3} = w - \frac{x}{3}$ et ainsi :

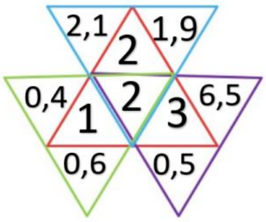
$$a + b = 3w - x$$

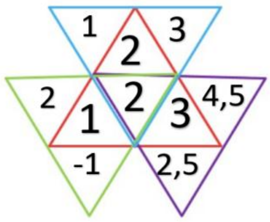
a et b ont donc une infinité de valeurs possibles tant que leur somme est égale à $3w - x$.

On peut démontrer qu'il en va de même pour c d e, f : $c + d = 3y - x$
et que $e + f = 3z - x$

Voici par exemple trois étoiles imbriquées ayant les mêmes centraux mais pas les mêmes extrémités :

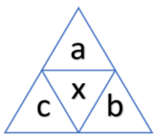




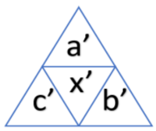


C. On se demande s'il est possible d'additionner des triangles harmonieux et par conséquent les étoiles imbriquées.
(4) (4)

Considérons deux triangles harmonieux :



et



$\frac{a+b+c}{3} = x$ et $\frac{a'+b'+c'}{3} = x'$

Si on les additionne on obtient

$$\frac{(a+a')+(b+b')+(c+c')}{3} = \frac{a+b+c}{3} + \frac{a'+b'+c'}{3} = x + x'$$

On remarque donc que le triangle obtenu reste harmonieux.

Si l'on procède au même calcul avec deux étoiles imbriquées harmonieuses, on obtient :

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{6} = x \quad \text{(L1)} \qquad\qquad \frac{a'+b'+c'+d'+e'+f'}{6} = x' \quad \text{(L2)}$$

$$\frac{(a+a'+b+b'+c+c'+d+d'+e+e'+f+f')}{6} = x + x' \qquad \text{(L1) + (L2)}$$

Propriété : la somme de deux étoiles imbriquées harmonieuses est une étoile imbriquée harmonieuse.

On peut aussi chercher à multiplier les étoiles imbriquées par un nombre n.

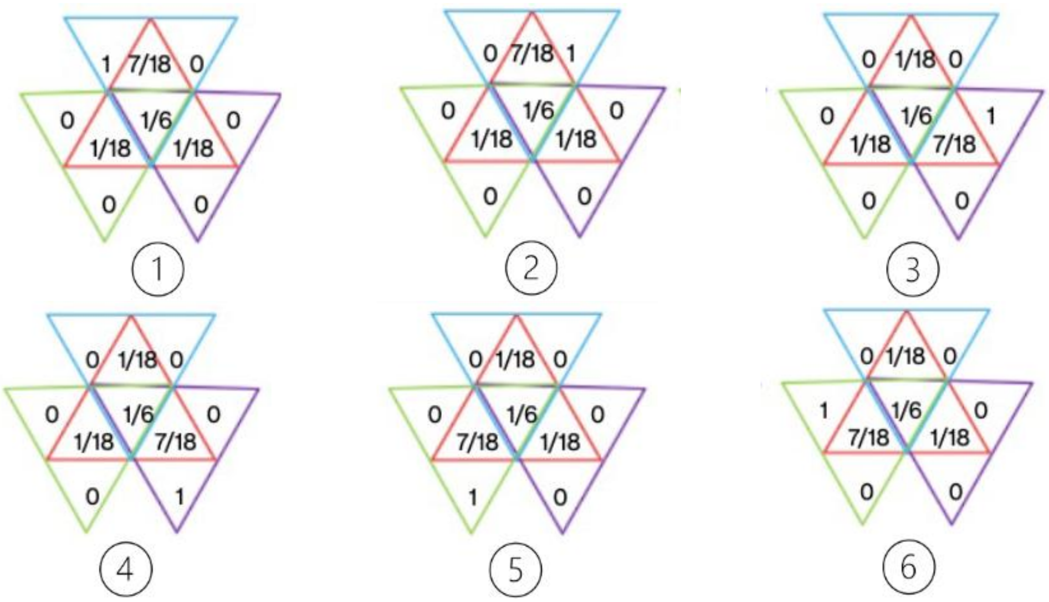
Soit une étoile imbriquée harmonieuse et un nombre n réel : $x = \frac{a+b+c+d+e+f}{6}$

Lorsqu'on multiplie cette étoile par n, on trouve : $nx = \frac{na+nb+nc+nd+ne+nf}{6}$

Propriété : le produit d'une étoile imbriquée harmonieuse par un nombre réel est une étoile imbriquée harmonieuse.

(5)

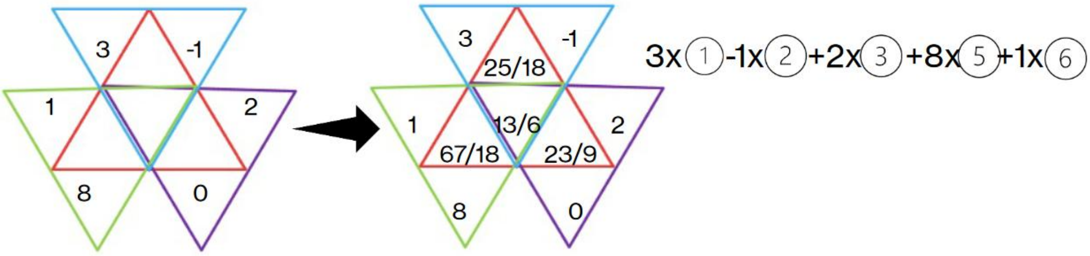
On peut alors décomposer chaque étoile imbriquée en utilisant les 6 étoiles imbriquées de base :



Chaque étoile peut alors s'écrire :

$$a \times ① + b \times ② + c \times ③ + d \times ④ + e \times ⑤ + f \times ⑥$$

Cela donne par exemple :



(6)

D. On se demande s'il était possible de multiplier les triangles harmonieux entre eux.

Soient deux triangles harmonieux : $x = \frac{a+b+c}{3}$ et $z = \frac{d+e+f}{3}$

Alors la multiplication donne : $\frac{ad+be+cf}{3} \neq xz$

Il n'est pas possible de multiplier des triangles harmonieux entre eux de cette manière et donc pas non plus les étoiles imbriquées.

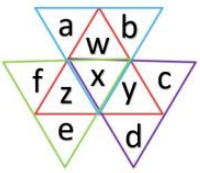
(7)

E. Pourquoi maximum et minimum se trouvent sur les extrémités ?

Observation : Dans tous les triangles et étoiles imbriquées que nous avons regardés les extremums étaient toujours sur les extrémités. Nous nous sommes alors demandé si c'était une propriété générale.

Conjecture : Dans un triangle harmonieux les extremums se trouvent sur les extrémités, c'est la même chose dans une étoiles imbriquée.

Démonstration : Le centre *x* est la moyenne des extrémités. Or la moyenne est toujours comprise entre la plus grande et la plus petite valeur. Le centre est donc compris entre les valeurs des extrémités. Autrement dit les extrémités sont les extremums.

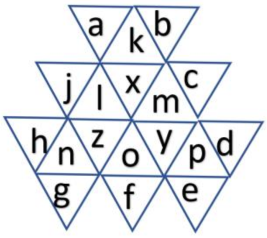


Le cas est semblable dans une étoile imbriquée :
Dans le triangle rouge, *x* étant la moyenne il ne peut être le maximum. Dans le triangle bleu, *w* étant la moyenne, il ne peut être le maximum.
De la même manière, dans les triangles violet et vert, *y* et *z* ne peuvent pas être le maximum.
Ainsi, ni *x*, ni *z*, ni *y*, ni *w* ne sont le maximum. Cela veut dire que le maximum est soit *a*, soit *b*, soit *c*, soit *d*, soit *e*, soit *f*. Le maximum est bien une extrémité.
Le raisonnement est le même pour le minimum.

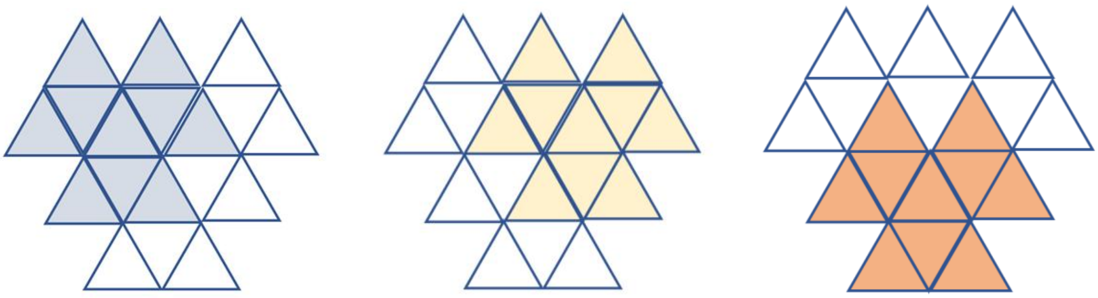
Propriété : Dans une étoile imbriquée harmonieuse, les extrémums se situent sur les extrémités.

F. Est-il possible d'agrandir la taille des étoiles ?

Définition : Une étoile agrandie est la structure suivante, composée de trois étoiles imbriquées :



Voici les 3 étoiles imbriquées qui composent l'étoile agrandie :

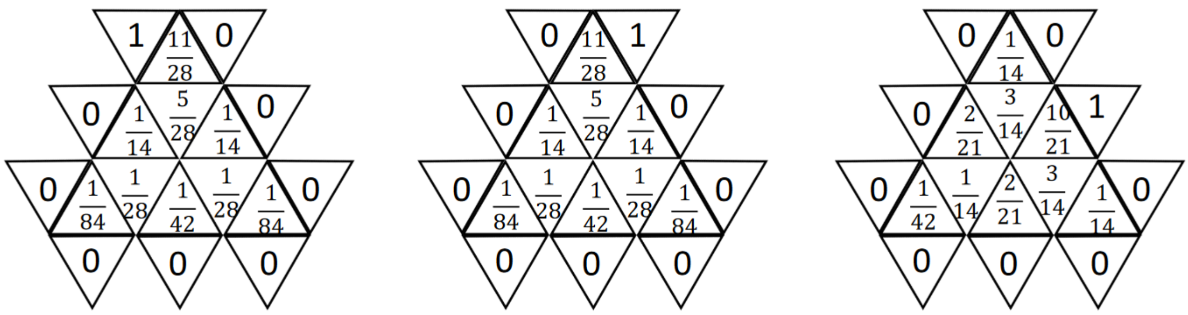


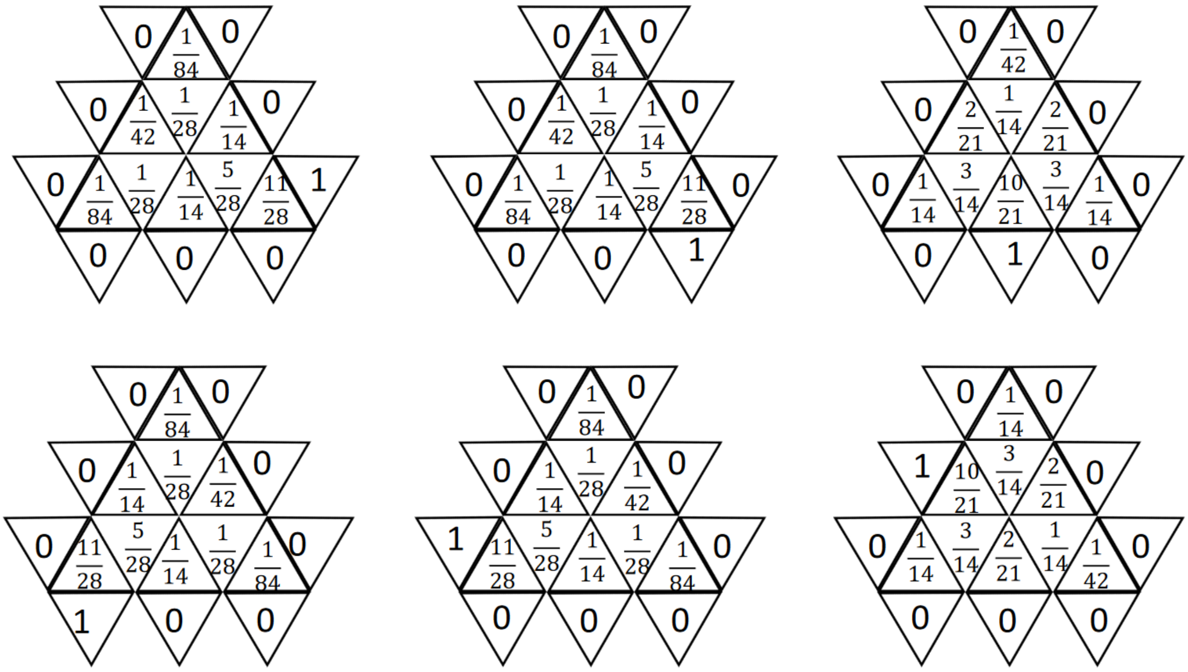
On définit neuf extrémités (*a ; b ; c; d; e; f; g; h; j*) et neuf centraux (*k; l; m; n; o; p*) dont trois centres (*x; y; z*).
Comme précédemment, une étoile agrandie est dite harmonieuse lorsque les trois étoiles imbriquées qui la composent sont harmonieuses ; c'est-à-dire :

$$x = \frac{a+b+c+y+z+j}{6};\ y = \frac{d+e+f+z+x+c}{6};\ z = \frac{g+h+j+x+y+f}{6}$$

Les étoiles agrandies étant un composé de trois étoiles imbriquées, on peut les additionner et elles resteront harmonieuses.
(8)

On peut alors décomposer chaque étoile agrandie en utilisant neuf étoiles de base selon le même processus que pour les étoiles imbriquées :





(9)

Notes d'édition

1 (1) Il faudrait énoncer complètement le sujet. Par exemple, on cherche s'il existe des étoiles imbriquées, comment les fabriquer. Comment généraliser en construisant d'autres figures ?

2 (2) On aurait pu donner quelques exemples d'étoiles imbriquées.

3 (3) Attention, on a montré une condition nécessaire pour l'existence de telles étoiles : (w=..., y=..., z=...) il faut maintenant montrer que cette condition est aussi suffisante en étudiant la réciproque : soit « Si on a ces trois égalités, l'étoile imbriquée est bien harmonieuse ».

4 (4) faudrait auparavant définir l'addition des triangles harmonieux. (Par exemple, on additionne terme à terme chacun des 4 nombres qui composent le triangle harmonieux)

5 (5) Il manque d'une part, une introduction à ce qu'on cherche à faire et d'autre part, la définition d'une étoile imbriquée de base.
On appelle étoile imbriquée de base une étoile dont toutes les extrémités valent 0 sauf une qui vaut 1 . Ce qui suit montre alors que l'on peut construire n'importe quelle étoile imbriquée à partir de ces six étoiles imbriquées de base.

6 (6) Erreur de calcul : le coefficient y de la dernière étoile imbriquée n'est pas 23/9 mais 5/18

7 (7) Il faudrait ici donner un contre exemple. C'est-à-dire trouver deux triangles harmonieux dont le produit n'est pas harmonieux.

8 (8) Il faut aussi écrire (comme les étoiles imbriquées sont harmonieuses), que chacun des 9 triangles apparaissant dans la figure est lui aussi harmonieux.
On aurait pu, là aussi donner un exemple.

9 (9) Il faudrait expliquer, en détaillant un exemple, comment on fait pour remplir une étoile agrandie, connaissant ses extrémités. (cela revient à résoudre un système de trois équations à trois inconnues pour trouver x, y et z).