Les Nombres Au Choix

2020-2021

Madeleine de Belloy de Saint Liénard et Pierre Quereuil (classe de seconde)

Établissement : Lycée Français de San Francisco

Enseignants : Manuela Mpouané Dikongué, Damien Hériveaux, Nicolas Legatelois

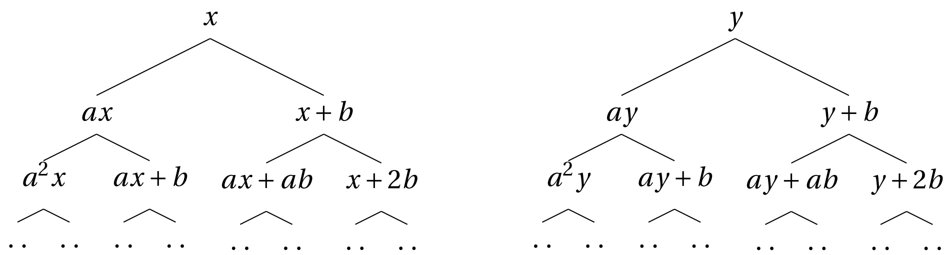
Chercheur : Gilles Bailly-Maitre, Université de la Rochelle

Table des matières

1 Présentation du sujet

On choisit deux entiers positifs comme points de départ : x et y, et deux opérations : une multiplication par a, et une addition par b où $a, b \in \mathbb{N}$. En partant de l'un des points de départ et en appliquant successivement l'une ou l'autre des opérations on obtient les nombres *atteignables*. On appelle le choix de x, y, a et b un *bon choix* s'il existe un entier N tels que tous les entiers plus grands que N sont atteignables.

Graphiquement, on peut représenter les nombres atteignables par des arbres.



2 Recherche de bons choix

Propriété 1. *Le choix de x, y, a, b sera toujours bon si b nombres consécutifs sont atteignables, car ce cycle se répétera grâce à l'addition par b* (1).

2.1 Cas triviaux

Propriété 2. *Si $b = 1$, le choix de x, y, a, b sera toujours un bon choix.*

Si $b = 1$, on aura toujours les éléments de la forme $x + k$ ou $y + k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ce sera donc toujours un bon choix.

Propriété 3. *Si $b = 0$, le choix de x, y, a, b ne sera jamais un bon choix.*

Si $b = 0$, tous les nombres atteignables sont de la forme xa^k ou ya^k avec $k \in \mathbb{N}$.
On a 3 cas :

- **Cas 1 :** $a = 0$
  Alors les seuls nombres atteignables sont 0, x et y : ce n'est donc pas un bon choix.

- **Cas 2 :** $a = 1$
  Alors les seuls nombres atteignables sont x et y : ce n'est donc pas un bon choix.

- **Cas 3 :** $a \geq 2$
  Alors les seuls nombres atteignables sont des multiples de a : ce n'est donc pas un bon choix.

Propriété 4. *Si $a = 0$, le choix ne sera bon que si $b = 1$, ou si $b = 2$ et $x \not\equiv y$ modulo 2, ou si $b = 3$, $x \not\equiv y$ et $x,\ y \not\equiv 0$ modulo 3.*

Si $a = 0$, les nombres atteignables sont de la forme kb, $x + kb$ ou $y + kb$ avec $k \in \mathbb{N}$. Modulo b, les résidus atteignables sont 0, x et y. Puisqu'il faut atteindre tous les résidus modulo b, on a que trois cas possibles :

- **Cas 1 :** $b = 1$
  Tous les choix sont bons.
- **Cas 2 :** $b = 2$
  Le choix le choix est bon si $x \not\equiv y$ modulo 2.
- **Cas 3 :** $b = 3$
  Le choix est bon si $x \not\equiv y$ et $x,\ y \not\equiv 0$ modulo 3.

Dans toute la suite, on supposera désormais que $a \neq 0$ et $b \neq 0, 1$.

2.2 Cas où a et b ne sont pas premiers entre eux

Supposons que a et b ne sont pas premiers entre eux et posons $a = C{\cdot}A$ et $b = C{\cdot}B$ avec $\text{pgcd}(A, B) = 1$, et $C \geq 2$.

Propriété 5. *Pour tout $C > 4$, aucun bon choix n'est possible.*

Les éléments atteignables sont congrus à 0, kb, $x + kb$, ou $y + kb$ modulo a.
Les éléments de la forme kb forment un cycle de longueur au plus A modulo a puisque $A \cdot b \equiv A \cdot B \cdot C \equiv 0$ modulo a. Ils permettent d'atteindre au plus A restes modulo a. Les éléments de la forme $x + kb$ et $y + kb$ forment au plus $2A$ restes de plus.
Or, pour atteindre tous les chiffres au dessus d'un certain seuil, il faut forcément pouvoir atteindre tous les restes modulo a. Donc, en notant que A est strictement positif, on a que

$$3A \geq a$$

$$3A \geq A \cdot C$$

$$3 \geq C.$$

Donc, pour tous les cas où $C \geq 4$, aucune construction ne sera possible. Il nous reste donc deux cas à traiter : $C = 2$ et $C = 3$.

2.2.1 $C = 2$

On a donc $a = 2A$ et $b = 2B$.

Cas 1 : $x \equiv y \equiv 0$ modulo 2

Tous les nombres atteignables seront pairs. Il sera impossible d'atteindre un impair, donc ce n'est pas un bon choix.

Cas 2 : L'un de x, y **est impair**

On peut supposer sans perte de généralité que x est impair. Donc, les seuls nombres atteignables impairs seront de la forme $x + kb$ car tout nombre multiplié par a devient et reste pair car l'addition par b ne change pas la parité. Or, pour pouvoir atteindre tous les nombres au-dessus d'un certain seuil, il faut forcément pouvoir atteindre deux impairs consécutifs. On en déduit que $b = 2$.
Réciproquement, si $b = 2$, puisque x et y n'ont pas la même parité, c'est un bon choix.

Cas 3 : $x \equiv y \equiv 1$ modulo 2

Si x et y sont tous les deux impairs, les nombres impairs atteignables sont les nombres $x + kb$ et $y + kb$. Or, pour pouvoir atteindre tous les nombres au-dessus d'un certain seuil, il faut forcément pouvoir atteindre 3 impairs consécutifs. Il faut donc choisir $b = 2$ ou $b = 4$.

- **Cas 3. 1 :** $b = 2$
  Si $b = 2$, puisqu'on peut atteindre deux nombres avec une parité différente, c'est un bon choix.

- **Cas 3. 2 :** $b = 4$ **et** $x \equiv y$ modulo 4
  On ne pourra pas atteindre $(x + 2)$ modulo 4. Ce n'est donc pas un bon choix.

- **Cas 3. 3 :** $b = 4$ **et** $x \not\equiv y$ modulo 4
  Si $b = 4$ et si $x \not\equiv y$ modulo 4, on peut supposer sans perte de généralité que $x \equiv 1$ modulo 4 et $y \equiv 3$ modulo 4. De plus, $a \equiv 2$ modulo 4 car $4|b$ et $\mathrm{pgcd}(a, b) = 2$.
  Donc, $ax \equiv ay \equiv 2$ et $a^2 x \equiv a^2 y \equiv 0$ modulo 4. Finalement, il s'agit bien d'un bon choix puisqu'on peut atteindre tous les restes modulo 4.

2.2.2 $C = 3$

On a donc $a = 3A$ et $b = 3B$.

Cas 1 : $x \equiv y$ modulo 3 **ou** $x \equiv 0$ modulo 3

Les nombres atteignables sont de la forme 0 ou x modulo 3. On ne pourra donc pas atteindre le dernier reste modulo 3 et ça ne sera pas un bon choix.

Cas 2 : $x \not\equiv y$ **et** $x, y \not\equiv 0$ modulo 3

En multipliant par a, on obtient un multiple de 3, qui restera un multiple de 3 en multipliant par a ou en ajoutant b (car a et b sont multiples de 3).

Les seuls éléments congrus à 1 modulo 3 sont donc de la forme $x + kb$ ($k \in \mathbb{N}$) et les seuls éléments congrus à 2 modulo 3 sont de la forme $y + kb$ ($k \in \mathbb{N}$) (2).

Or, pour avoir un bon choix, on doit obtenir deux éléments congrus à 1 modulo 3 consécutifs (c'est-à-dire de différence 3). Cette contrainte donne nécessairement $b = 3$.

Réciproquement, on vérifie que si $b = 3$, dans le cas considéré, on peut bien atteindre tous les éléments modulo 3 quelle que soit la valeur de a. Il s'agit donc bien d'un bon choix.

2.3 Cas où a et b sont premiers entre eux

Regardons les nombres atteignables modulo b. Puisqu'on peut toujours ajouter b, un choix est bon s'il permet de retrouver tous les restes modulo b.

Propriété 6. *Pour avoir un bon choix, il faut que b divise soit x, soit y, mais non les deux.*

Modulo b, les nombres atteignables sont de la forme $a^n x$ et $a^n y$. Puisque $\text{pgcd}(a,b) = 1$, $b \mid a^n x$ si et seulement si $b \mid x$. On peut donc en déduire, puisqu'il faut atteindre un élément divisible par b, que b divise au moins l'un de x, y. Si $b \mid x$ et $b \mid y$, tous les nombres atteignables seront divisibles par b, ce qui ne produit un bon choix que quand $b = 1$. Sinon, on peut supposer sans perte de généralité que $b \mid y$ mais $b \nmid x$.

Propriété 7. *Pour avoir un bon choix, a doit être une racine primitive modulo b et b doit être premier.*

On dit que a est une racine primitive modulo n si son ordre multiplicatif modulo n vaut $\phi(n)$, c'est-à-dire si le plus petit nombre $k \geq 1$ tel que $a^k \equiv 1$ modulo n est $k = \phi(n)$. Ici, $\phi(n)$ est l'indicatrice d'Euler, soit le nombre d'entiers entre 1 et n qui sont premiers avec n (3).

Pour que les nombres de la forme $a^n x$ puissent atteindre tous les éléments $1, \dots, b-1$ modulo b, les puissances de a doivent pouvoir atteindre tous ces éléments aussi. Soit, l'ordre de a doit être égal à $b-1$. Il faut donc que a soit une racine primitive modulo b et que b soit premier pour que $\phi(b) = b-1$.

Propriété 8. *Si b est premier, la multiplication par $x \not\equiv 0$ est une bijection de $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ sur lui-même.*

Soit $x \not\equiv 0$. Pour tout k, k' :

$$\begin{aligned} xk \equiv xk' \mod b &\iff x(k-k') \equiv 0 \mod b \\ &\iff k - k' \equiv 0 \mod b \\ &\iff k \equiv k' \mod b \end{aligned}$$

On peut donc choisir n'importe lequel $x \not\equiv 0$ modulo b. On aura toujours un bon choix si b est premier, a est une racine primitive modulo b et que parmi x et y, l'un est un multiple de b et l'autre n'est pas divisible par b.

3 Conclusion

On peut reconnaître un bon choix selon les critères suivants :

— Si $b = 1$.

— Si $b = 2$ et $x \not\equiv 0$ modulo 2.

— Si $b = 4$, $\text{pgcd}(a,b) = 2$, $x \equiv y \equiv 1$ modulo 2 et $x \not\equiv y$ modulo 4.

— Si $b = 3$, $a = 3A$, $x \not\equiv y$ et $x, y \not\equiv 0$ modulo 3.

— Si b est premier, a est une racine primitive modulo b et que parmi x et y, l'un est un multiple de b et l'autre ne l'est pas.

Notes d'édition

(1) La propriété utilisée dans la suite est un peu plus forte : si tous les restes modulo b sont atteignables, le choix de x, y, a, b est bon.
(2) Si $x \equiv 1$ et $y \equiv 2$ modulo 3, et inversement dans le cas contraire.
(3) En termes plus simples, a est une racine primitive modulo n si l'ensemble des puissances de a modulo n comprend tous les restes de nombres premiers avec n (ceci est équivalent à la définition donnée ici).