

Noir, c'est noir

Année 2021 – 2022

Élèves : Célia Lamoureux, élève de 2nde et Louise Rey, élève de 1^{ère}.

Encadrés par : Caroline Rougerie et Marie-Agnès Binois

Établissement : Lycée Maurice Genevoix, à Ingré

Chercheur : Philippe Grillot, enseignant chercheur à l'université Denis Poisson

1. Présentation du sujet

Il est donné un damier avec n cases de côté et quelques cases initialement noircies à l'intérieur.

La condition pour colorier une case est qu'elle possède au minimum deux cases voisines noircies, c'est-à-dire que cette case est reliée à ses voisines par un côté commun.

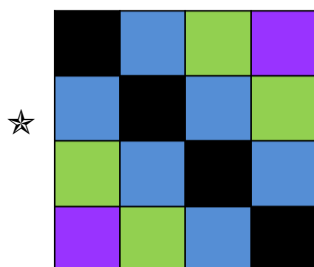
Nous cherchons à savoir comment nous pouvons trouver le nombre minimal de cases pour pouvoir colorier tout le damier.

2. Annnonce des conjectures et résultats obtenus

Nous avons établi qu'il faut n cases initialement noircies au minimum pour colorier l'entièreté du damier et que cela suffit si elles sont disposées correctement..

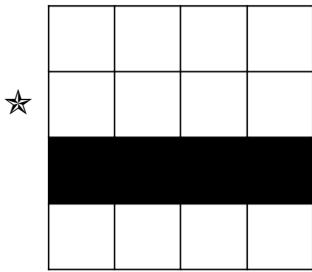
3. Notre article

a) Observations



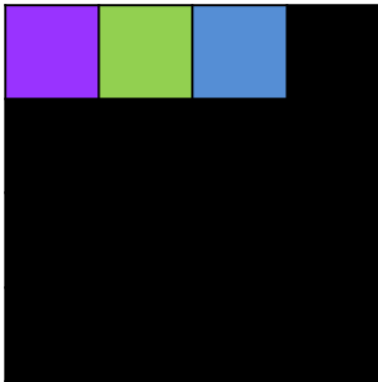
Avec une diagonale entièrement noircie au départ, il sera toujours possible de colorier tout le damier. [\(1\)](#)

Résultat : Bien disposées, n cases suffisent !



☆

Lorsqu'uniquement une ligne ou une colonne est coloriée, il est impossible de colorier d'autres cases.

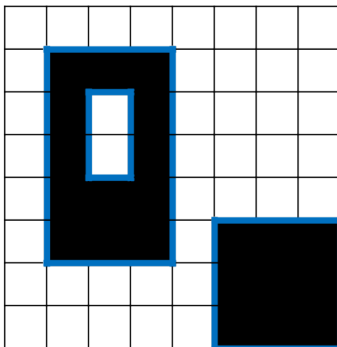


★ Pour être assuré de colorier tout le damier, peu importe la disposition des cases noircies si, initialement, $n^2 - (n - 1)$ cases sont coloriées. [\(2\)](#)

b) Le périmètre

On appelle **périmètre** le nombre de « côtés unités » du contour de la forme coloriée.

Exemple :



Ainsi en additionnant les deux contours on obtient :

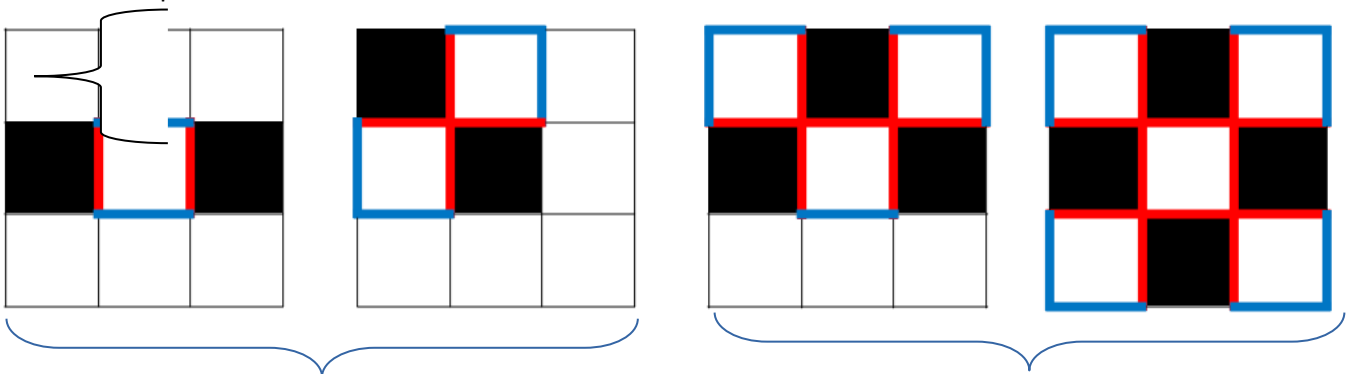
$$22 + 12 = 34$$

Le périmètre vaut alors 34

Propriété : Étape après étape, le périmètre n'augmente jamais : il reste constant ou diminue.

Démonstration :

Il n'existe que 4 manières de colorier une case :



Dans ces deux cas le périmètre stagne puisque, pour colorier une case, il lui faut 2 voisins coloriés donc on aura autant de cotés qui ne font pas partie du nouveau périmètre (en rouge) que de nouveaux côtés (en bleu) avec le coloriage de la nouvelle case.

Dans ces deux cas le périmètre diminue car une des cases possède plus de deux voisins coloriés donc on aura plus de côtés qui ne font pas partie du nouveau périmètre (en rouge) que de nouveaux côtés (en bleu) avec le coloriage des nouvelles cases.

c) Comment évolue le périmètre ?

Avec un damier de n cases de côté, le périmètre total vaudra $4n$. (3)

Étant donné que le périmètre ne peut pas augmenter, il doit stagner pour permettre de colorier l'entièreté du damier.

Étudions tous les cas possibles :

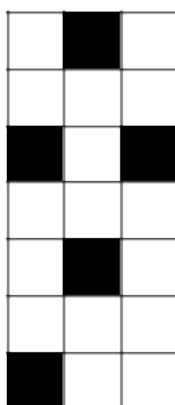
Avec un nombre de cases initialement coloriées strictement inférieur à n :

- ★ Le périmètre initial est strictement inférieur à $4n$.
- ★ Il est donc impossible de colorier tout le damier (puisque le périmètre stagne ou diminue et ne pourra donc pas atteindre $4n$).

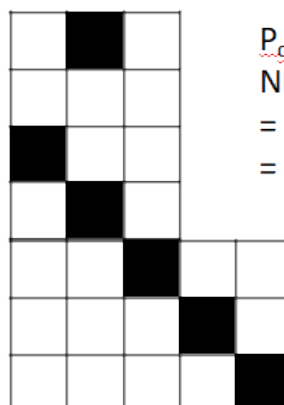
Avec un nombre de cases initialement coloriées supérieur ou égal à n :

- ★ Le périmètre initial est supérieur ou égal à $4n$.
- ★ Il sera alors possible (4) de colorier tout le damier (nous avons vu une disposition à n cases noircies qui convient).

$$\begin{aligned} P_{\text{contour}} &= 20 \\ \text{Nb cases} &= P_c/4 \\ &= 20/4 \\ &= 5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P_{\text{contour}} &= 24 \\ \text{Nb cases} &= P_c/4 \\ &= 24/4 \\ &= 6 \end{aligned}$$



Et si notre damier n'était pas carré ?

Nous nous sommes intéressées au nombre de cases minimales qu'il faudrait si notre damier n'était pas un carré.

Étant donné qu'une case possède 4 cotés et que le périmètre ne peut pas diminuer, nous avons déduit que le périmètre total des cases doit au minimum être égal au périmètre du damier.

Ainsi pour trouver le nombre de cases minimal, nous pouvons utiliser la formule : $P_{\text{contour}}/4$. (5)

e) Et si nos cases n'étaient pas carrées ?

La formule pour calculer le nombre de cases initiales ne peut pas s'appliquer ici.

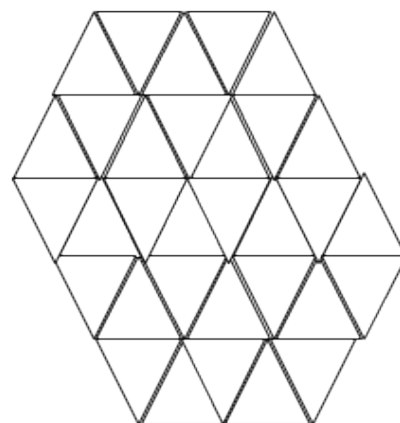
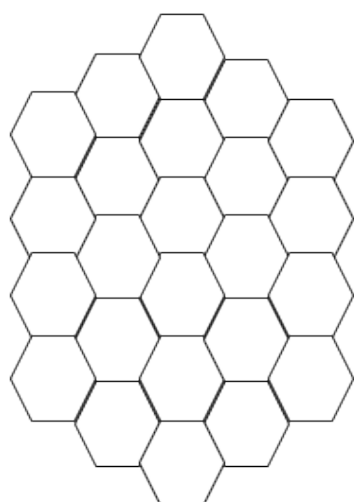
Dans le premier cas où les cases sont des hexagones, on a remarqué que deux cases suffisent pour colorier l'ensemble du damier. Le périmètre augmente donc.

Dans le deuxième, il diminuera.

Nous avons constaté que lorsque le nombre de cotés d'une case est supérieur à 4, le périmètre augmentera. Il faut par conséquent moins de n cases coloriées.

De la même manière si le nombre de cotés d'une case est inférieur à 4, le périmètre diminuera. Il faut plus de n cases coloriées . (6)

1. Conclusion



Ainsi nous pouvons dire qu'il faut au minimum n cases pour pouvoir colorier un damier de côté n . Néanmoins lorsque la forme du damier change (7) nous devons utiliser la formule : $\text{Nb cases} = P_c/4$ pour trouver le nombre de cases minimal. Si les cases ne sont plus carrées, deux cas se présentent. Si le périmètre est supérieur à 4, alors il faudra moins de n cases (le périmètre augmente). À l'inverse si le périmètre est inférieur à 4, il faudra plus de n cases (le périmètre diminue).

Notes d'édition

(1) L'ordre du coloriage est donné par les différentes couleurs : noir au départ puis bleu puis vert puis violet.

(2) on peut remarquer que n^2-n cases ne suffisent pas

(3) n cases de côté

(4) Attention à la formulation : il sera possible **dans certains cas** mais pas toujours comme le prouve le deuxième exemple de la page 1

(5) Cette formule ne donne évidemment pas le nombre de cases minimal comme le montrent les deux exemples. Il aurait peut-être fallu détailler un peu ces exemples, possible à droite, impossible à gauche.

(6) Si les cases ne sont plus carrées, le damier non plus n'est plus carré et la forme de ce damier n'est pas forcément simple à définir.

Il aurait peut-être fallu détailler les deux exemples cités, donner des cas où on peut colorier, des cas où on ne peut pas.

(7) Ligne 2 dans la conclusion : Attention coquille :: On **ne** peut **plus** utiliser la formule comme c'est indiqué en ligne 2 de la page 4.