Le jeu de Marienbad

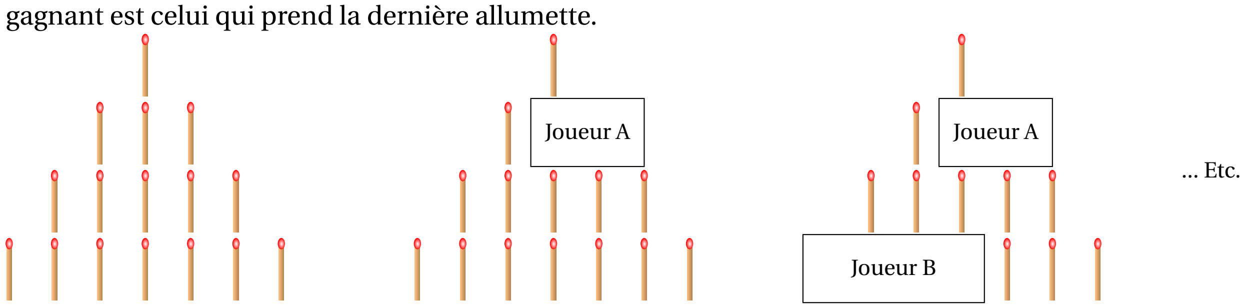
Année 2022-2023

Arthur, Filippo, Tamaz et Titouan, classe de $1^{ère}$

Établissement : Lycée de l'Harteloire, Brest
Enseignant : Jean Marie Gourmelon
Chercheur : Rachid Regbaoui, Université de Bretagne Occidentale

1. Présentation du sujet

Le jeu de Marienbad se joue à deux : des allumettes sont disposées en quatre rangs de 1, 3, 5 et 7. Chaque joueur prend alors à son tour le nombre d'alumettes qu'il souhaite dans une seule rangée. Le gagnant est celui qui prend la dernière allumette.



L'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ? Et si on modifie les règles ?

I
I I I
I I I I I
I I I I I I I

FIGURE 1 – Situation de départ du jeu

2. Démarche

Tout d'abord nous avons commencé par des exemples qui représentent des situations de jeux possibles pour essayer de trouver des points communs entre des situations différentes. Nous avons donc analysé les situations et trouvé que, dans une configuration d'égalité entre plusieurs rangées (dites « miroirs »), le deuxième joueur pouvait facilement gagner en recopiant la façon de jouer du premier joueur ; par exemple, dans une situation de 4 et 4, si le premier joueur enlève 2 allumettes de la première rangée le deuxième doit faire la même chose pour pouvoir gagner la partie.

Afin d'avoir une réponse plus claire (et de tenter de résoudre le problème à l'envers, en partant de la réponse), nous avons résolu le problème d'abord par force brute : écrire un programme, qui va bêtement essayer tous les coups possibles, et envisager toutes les réponses possibles afin d'avoir une réponse certaine. Heureusement, le jeu de Marienbad offre un espace de recherche relativement restreint qui rend cette approche viable (avec quelques optimisations de déduplication et mémorisation), ce qui n'est pas le cas de tous les jeux (*e.g.* Le jeu d'échec qui possède plus de situations possibles qu'il n'y a d'atomes dans l'univers observable). Le programme produit une simple table qui donne le coup gagnant pour chaque situation (si tant est qu'il y en a un). Une démonstration de ce programme est disponible en ligne. Ceci nous a permis de nous diriger vers l'idée que le joueur gagnant serait le deuxième et non le premier comme on le pensait initialement.

Pour ce qui est du reste de la stratégie, nous avons essayé beaucoup de choses différentes, mais aucune n'a eu de vrai résultat (à l'exception des certaine situations spéciales comme celles miroirs). Nous avons finalement été mis sur la voie des paquets de deux par notre chercheur M. REGBAOUI.

3. Une stratégie gagnante pour le deuxième joueur

3.1. Principes généraux

La stratégie gagnante repose sur deux concepts cœurs : La *décomposition des rangées en paquets de puissances de deux* (uniques), et le *principe de parité des paquets.*

La décomposition en paquets est le fait qu'il possible de décomposer les allumettes de n'importe quelle rangée en paquets de puissances de deux au sein de la rangée. Par exemple, la situation de départ se décompose ainsi (on remarquera la présence de 4 paquets de 1, 2 paquets de 2 et 2 paquets de 4, des nombres *pairs*) :

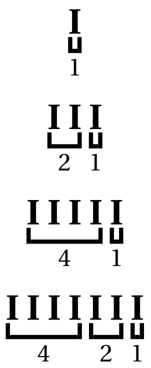


FIGURE 2 – Décomposition de la situation de départ

Le principe de parité classe les situations (de jeu) en deux catégories : les situation « paires » et celles qui ne le sont pas. Est paire une situation dont le nombre de paquets de même taille est pair (c'est le cas de la situation initiale). La parité est importante car elle détermine quelle joueur pourra gagner avec certitude : une situation paire peut être gagnée à tous les coups par le deuxième joueur, tandis qu'une situation non paire peut l'être par le premier.

$$\begin{array}{c} \underbrace{\mathrm{I\,I}}_{2} \\ \underbrace{\mathrm{I\,I}}_{2} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{I\,I} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{I} \end{array} \longrightarrow \mathrm{I}$$

FIGURE 3 – Situation 2 ;2, paire, gagnée par le deuxième joueur

Les situations paires garantissent la victoire au deuxième joueur car il est toujours possible de ramener une situation (d'origine paire), devenue impaire après un coup, à une autre situation paire (qui a moins de bâtons) en un seul coup. Et ceci jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux rangées, car une situation paire ne peut pas n'en avoir qu'une (la décomposition en paquets ne permet pas deux fois le même paquet dans la même rangée, ce qui rend impaires les situations à une rangée). Une fois à deux rangées, les seules situations paires sont les situation dites « miroirs » (car pour que le nombre de paquets soit pair il en faut un dans chacune des deux rangées, car il ne peut y en avoir deux dans une).

3.2. Unicité de la décomposition en paquets de puissances de 2

Le premier prérequis à la stratégie gagnante est l'unicité de la décomposition en paquets de puissances de 2 : on peut décomposer n'importe quel nombre entier positif (*e.g.* le nombre de bâtons dans une rangée) de manière unique en une somme de puissances de deux toutes différentes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ (1). Alors il existe forcément un p pour lequel $n \geq 2^p > \frac{n}{2}$, car s'il existait un n et un p avec :

$$2^{p+1} > n > \frac{n}{2} \geq 2^p \tag{1}$$

on aurait

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} &\geq 2^p \\ n &\geq 2^{p+1} \end{aligned}$$

Or, on sait de l'inéquation (**??**) que $2^{p+1} > n$, donc :

$$\begin{aligned} 2^{p+1} &> n \geq 2^{p+1} \\ 2^{p+1} &> 2^{p+1} \end{aligned}$$

Ce qui crée une contradiction.

On a donc $n \geq 2^p$ et $2^p > \frac{n}{2}$, alors $n - 2^p < \frac{n}{2}$ (enlever plus de la moitié de n à n donne moins de la moitié de n).

Pour décomposer un nombre n entier strictement positif en une somme de puissances de 2 uniques on peut donc prendre $n_0 = n$, trouver le p_0 correspondant ($n_0 \geq 2^{p_0} > \frac{n_0}{2}$), et obtenir $n_1 = n_0 - 2^{p_0}$ (ou plus généralement : $n_{k+1} = n_k - 2^{p_k}$).

Si $n_1 > 0$ alors la décomposition continue, et un peut obtenir n_2, n_3, ... n_k.

Si $n_k = 0$ alors la décomposition est terminée et on a donc $n = 2^{p_0} + 2^{p_1} + \ldots + 2^{p_{k-1}} + 2^{p_k}$.

On peut être sûr que la décomposition est unique car :

$$\begin{aligned} n_{k+1} &= n_k - 2^{p_k} \\ n_k - 2^{p_k} &< \frac{n_k}{2} \\ 2^{p_{k+1}} \leq n_{k+1} &< \frac{n_k}{2} < 2^{p_k} \\ 2^{p_{k+1}} &< 2^{p_k} \\ p_{k+1} &< p_k \end{aligned}$$

Et donc $p_0 > p_1 > \ldots > p_{k-1} > p_k$, et aucune des puissances ne se répète. □

Exemple. Pour 7 (le plus grand nombre dans notre cas) :

$$\begin{aligned} n &= 7 \\ n_0 &= 7 \\ p_0 &= 2 \\ n_1 &= n_0 - 2^{p_0} \\ n_1 &= 7 - 4 \\ n_1 &= 3 \\ n_1 &= 1 \\ n_2 &= n_1 - 2^{p_1} \\ n_2 &= 1 \\ p_2 &= 0 \\ n_3 &= 0 \\ n &= 2^{p_0} + 2^{p_1} + 2^{p_2} \\ 7 &= 4 + 2 + 1 \end{aligned}$$

3.3. Rétablissement de la parité

Pour que la stratégie fonctionne il faut que le deuxième joueur puisse maintenir la parité tout au long de la partie, ceci est possible car il est toujours possible de rétablir la parité d'une situation en un seul coup, et que le premier joueur est forcé de la casser à chaque tour (il doit enlever au moins un bâton d'une rangée, or car les paquets pairs ne partagent pas de rangée, il est impossible de jouer sur une situation paire, sans la rendre impaire).

Quand un joueur casse la parité, on peut imaginer qu'il crée et supprime des paquets (2) :

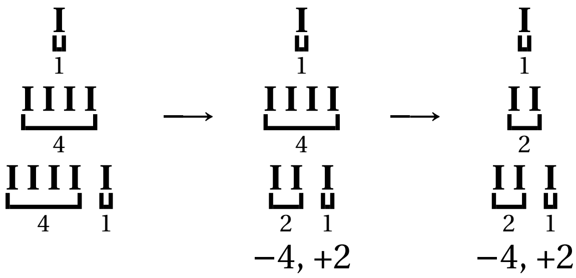


FIGURE 4 – Le joueur 1 supprime un paquet de 4, et crée un paquet de 2.

Pour rétablir la parité, il faut que les valeurs absolues des bilans soient les mêmes : si un paquet de 2 est cassé (−2), alors il faut soit en casser un autre (−2) ou en créer un nouveau (+2) pour maintenir la parité de 2. Le plus gros paquets cassé par le coup du joueur 1 sera aussi cassé par le joueur deux (car il est impossible de créer un paquet sans en casser un plus gros, qui dans ce cas casserait la parité de celui-ci, car il n'a pas été touché par le joueur 1). Dans le cas ou le joueur 1 casse plusieurs paquets d'un coup, il est aussi possible de rétablir, car on peut, en cassant le plus gros paquet créer autant de plus petits paquets que nécessaire, par exemple, on peut casser le paquets de 4 de 4 manières différentes (-4 ; $-4+1$; $-4+2$; $-4+1+2$) il faut donc s'adapter au paquet touché par le coup du joueur 1, ainsi que les potentiels autres paquets présents sur la rangée du paquet qu'on vise à briser.

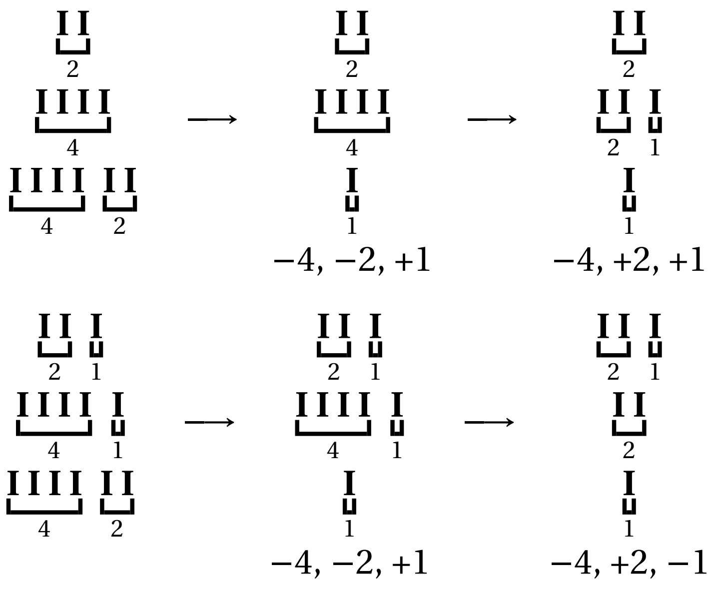


FIGURE 5 – Même bilan, mais réponse adaptée à la rangée où se trouve le paquet de 4

4. Conclusion

La stratégie gagnante pour le deuxième joueur repose sur la décomposition des rangées, et le maintien de la parité au travers de la partie. Si ces conditions sont remplies, et que le joueur ne fait pas d'erreur, la victoire lui est assurée.

Notes d'édition

(??) L'entier p n'est pas fixé indépendamment de n : il faut choisir le plus grand entier tel que $2^p \leqslant n$, de sorte que $2^p \leqslant n < 2^{p+1}$.

(??) Il aurait été intéressant de considérer en détail le cas où le joueur 1 prend 5, 6 ou 7 allumettes.