Feu rouge

Mohan DEL GIUDICE, Esteban SCHEER,
Pierre-Alexandre PAQUET et Massil ZIANE-KHODJA, élèves de Terminale

Année 2021-2022

Établissement : Lycée Carnot, Paris

Professeur : Ariane MARTIN, Doctorante, ENS Paris-Saclay

Chercheur : Lucas GERRETSEN, Ingénieur Recherche et Développement, Nintendo

Présentation du sujet

Un cycliste pressé roule à sa vitesse maximale de 9 $m.s^{-1}$ et peut décélérer ou accélérer de 1 $m.s^{-2}$. À l'instant initial, on peut noter que sa vitesse est de 9 $m.s^{-1}$. Depuis une certaine distance, il observe un feu changeant régulièrement de couleur, toutes les 20 secondes. L'objectif du cycliste est d'arriver au feu vert le plus rapidement possible. On part du postulat que le cycliste connaît la distance qui le sépare du feu. Dans ce sujet, nous étudierons les meilleures façons pour le cycliste de passer au feu vert le plus rapidement possible, en fonction des paramètres donnés par l'énoncé.

1 Introduction

1.1 Explication du sujet

Un cycliste pressé roule à vitesse maximale (9 $m.s^{-1}$). Il cherche à atteindre un feu devenu vert en un laps de temps minimum, en y allant le plus rapidement possible. Il peut ajuster sa vitesse en ralentissant ou accélérant de 1 $m.s^{-1}$ toutes les secondes. On peut donc noter que son accélération a vaut 1 $m.s^{-2}$. De plus, depuis une certaine distance D, il observe un feu dont la période de changement de couleur est de 20 secondes. Nous allons donc considérer que le début de son parcours se fait depuis cette distance D, et que sa vitesse initiale est $v_{\max}$.

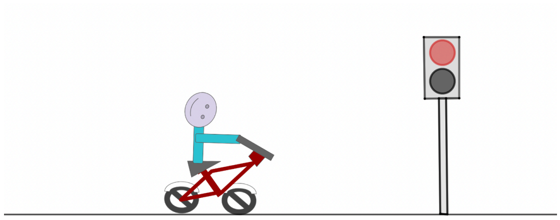
Nous allons étudier les meilleures façons de passer au feu vert, tout en essayant de conserver $v_{\max}$. Nous nous sommes interrogés sur plusieurs situations :

- Quelles sont les conditions pour que le cycliste puisse conserver sa vitesse maximale tout au long du parcours ?
- S'il ralentit, quel est le profil de son freinage ?
- Comment minimise-t-il son freinage ?
- Que se passe-t-il s'il s'arrête ?

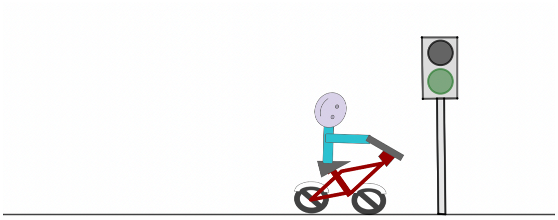
1.2 Exemple

Prenons pour exemple un cas où le cycliste roule à vitesse maximale constante (9 m.s^{-1}) sur une distance D de 500 m. Désignons par T la durée totale du parcours du cycliste.

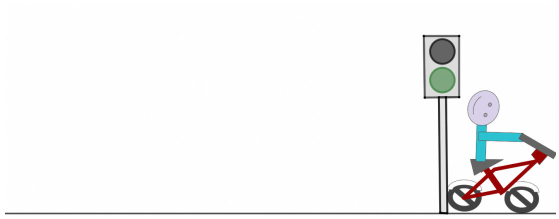
(a) Situation d'origine (T = 0 s)



(b) Étape 1 : Le feu devient rouge (T = 20 s)



(c) Étape 2 : Le feu devient vert (T = 40 s)



(d) Fin du parcours ($T = 55,6$ s)

FIGURE 1 – Cas où le cycliste parcourt 500 mètres en conservant v_i et le feu est initialement vert (Représentation non à l'échelle)

Le feu est initialement vert (Figure 1a). Au bout de 20 secondes, le cycliste aura parcouru 180 mètres. Le feu devient rouge (Figure 1b). Tout en conservant sa vitesse maximale, 20 secondes plus tard, le feu deviendra vert. Il aura parcouru une distance totale de 360 mètres (Figure 1c). Enfin, au bout d'une durée de 15,6 secondes, l'état du feu est conservé. La distance parcourue par le cycliste est de 500 mètres. Ce dernier réussit donc à passer le feu vert (Figure 1d). Nous aurons compté **2 changements** de couleur du feu.

2 Notations et visualisation du problème

2.1 Notations et états du feu

Un **état du feu** désigne le nombre de secondes écoulées depuis le passage du feu vert au feu rouge. On note E_i l'état initial du feu lorsque le cycliste voit le feu. La période de changement de couleur du feu est de 20 secondes. Par conséquent :

— Le feu est initialement rouge lorsque $E_i \in [0;20[$

— Le feu est initialement vert lorsque $E_i \in [20;40[$

Nous indiquerons une même définition pour l'état final du feu, noté E_f.

Enfin, nous désignons par T le temps de parcours. Il s'agit du temps écoulé depuis que le cycliste a aperçu le feu. Par conséquent, E_f correspond au reste de la division euclidienne de $E_i + T$ par 40.

2.2 Cercle des états

Nous introduisons un cercle représentant l'évolution de l'état du feu au cours du temps, dans le sens trigonométrique (Figure 2). De plus, nous définissons un point E appartenant au cercle, désignant le nombre de secondes écoulées depuis le passage du feu vert au feu rouge. Un tour complet mesure 40 secondes : le point E retrouve donc sa position initiale au bout de 40 secondes. Plus généralement, un état du feu devient de nouveau le même toutes les 40 secondes.

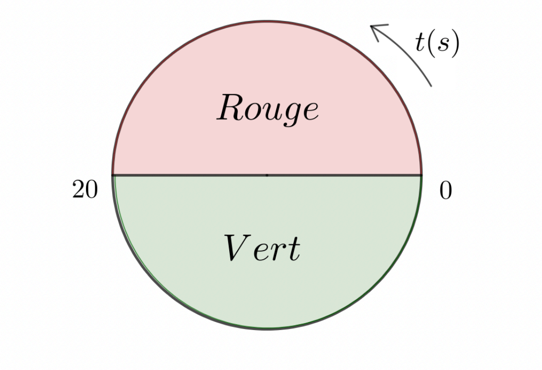


FIGURE 2 – Cercle des états

Le feu est rouge lorsque le point E appartient à $[0;20[$. Il est vert lorsque le point appartient à l'intervalle $[20;40[$.

2.3 Conditions d'optimisation

Nous devons préciser des conditions pour lesquelles le cycliste a la possibilité d'ajuster sa vitesse de manière à atteindre le feu lorsqu'il est vert.

Dans un premier cas, si celui-ci est trop proche du feu, il manquera de temps pour réguler sa vitesse. Notons $v(\tau)$ la vitesse du cycliste au cours du freinage, a l'accélération et τ le temps de freinage. On a donc

$$v(\tau) = v_{\max} - a\tau$$

Puisque la distance au cours du temps de freinage d(τ) est une primitive de la vitesse, on obtient

$$\boxed{d(\tau) = v_{\max} \times \tau - a\,\frac{\tau^2}{2}} \tag{1}$$

Le cycliste doit réaliser un temps de freinage minimal, durée nécessaire pour s'immobiliser. Elle est solution de l'équation $v(\tau) = 0$, soit :

$$v_{\max} - a\tau = 0, \qquad \tau = v_{\max}/a$$

À partir de l'expression (1), nous pouvons déterminer la distance minimale pour pouvoir s'immobiliser afin d'arriver au feu vert :

$$d(\tau) = d\left(\frac{v_{\max}}{a}\right) = v_{\max} \times \frac{v_{\max}}{a} - a\,\frac{v_{\max}^2}{2a^2} = \frac{v_{\max}^2}{2a}$$

Pour $v_{\max} = 9\ m.s^{-1}$ et $a = 1 m.s^{-2}$ on a

$$d(\tau) = 40{,}5\ \mathrm{m}$$

Dans ce cas il lui faut donc une distance d'au moins 40,5 mètres pour pouvoir s'immobiliser.

Nous allons maintenant déterminer un encadrement de E_i tel que le cycliste puisse passer au feu vert lorsque $D < \frac{v_{\max}^2}{2a}$. D'après l'expression (1), on introduit la fonction polynomiale de deuxième degré définie sur $\left[0\,;\,\frac{v_{\max}}{a}\right]$ par $\mathscr{C}(\tau) = -\frac{1}{2}a\tau^2 + v_{\max}\tau - D$ avec D la distance exprimée en mètres et dont le discriminant a pour expression

$$\Delta = v_{\max}^2 - 4\times(-\frac{1}{2}a)\times(-D) = v_{\max}^2 - 2aD$$

Pour tout $D \in \left[0; \frac{v_{\max}^2}{2a}\right]$ on a donc $\Delta > 0$ et il existe deux solutions réelles pour le temps d'arrivée à D :

$$\tau_1 = \frac{-v_{\max} - \sqrt{v_{\max}^2 - 2aD}}{2\times(-\frac{1}{2})a} = \frac{v_{\max} + \sqrt{v_{\max}^2 - 2aD}}{a}$$

$$\tau_2 = \frac{-v_{\max} + \sqrt{v_{\max}^2 - 2aD}}{2\times-(\frac{1}{2})a} = \frac{v_{\max} - \sqrt{v_{\max}^2 - 2aD}}{a}$$

Or τ est inférieur au temps de freinage $\frac{v_{\max}}{a}$ nécessaire pour s'immobiliser dans ce contexte ; nous avons donc une unique solution :

$$\tau = \frac{v_{\max} - \sqrt{v_{\max}^2 - 2aD}}{a}$$

Le feu est vert à l'état final lorsque $\mathrm{E}_f \in [20;40[$. Ainsi, le cycliste atteint le feu à une distance inférieure à $\frac{v_{\max}^2}{2a}$ en freinant sur tout le parcours de cette distance lorsque

$$20 - \tau_r \leqslant \mathrm{E}_i < 40 - \tau_r \qquad (1)$$

avec τ_r le reste dans la division euclidienne de $\tau = \frac{v_{\max} - \sqrt{v_{\max}^2 - 2aD}}{a}$ par 40.

Or le cycliste peut aussi ne pas freiner et le temps qu'il met dans ce cas pour atteindre le feu est $\frac{D}{v_{\max}}$. Ainsi le temps de parcours pour arriver au feu est compris dans l'intervalle $\left[\frac{D}{v_{\max}}\,;\,\tau\right]$. On peut en déduire finalement que le cycliste aura la possibilité d'ajuster sa vitesse de manière à atteindre le feu lorsqu'il est vert si

$$20 - \tau_r \leqslant \mathrm{E}_i < 40 - \frac{d_r}{v_{\max}} \qquad (2)$$

avec d_r le reste dans la division euclidienne de D par $40 \times v_{\max}$.

Or on veut définir E_i sur $[0;40[$ et on a $\frac{d_r}{v_{\max}} \in [0;\,40[$ donc $40 - D_r \in]0;\,40]$. Cependant on a aussi $\tau_r \in [0;40[$ et on peut donc avoir $20 - \tau_r < 0$.

Ainsi on a finalement :
si $\tau_r \in [0;\,20]$:

$$\boxed{20 - \tau_r \leqslant \mathrm{E}_i < 40 - \frac{d_r}{v_{\max}}}$$

et si $\tau_r \in]20;\,40[$:

$$\boxed{\mathrm{E}_i \in \left[0;\,40 - \frac{d_r}{v_{\max}}\right[\cup \left[60 - \tau_r\,;\,40\right[}$$

Enfin on peut remarquer que si

$$60 - \tau_r \leqslant 40 - \frac{d_r}{v_{\max}}$$

$$\Leftrightarrow \tau_r \geqslant 20 + \frac{d_r}{v_{\max}}$$

alors il faut que $\mathrm{E}_i \in [0\,;\,40[$ c'est-à-dire donc que pour cette distance D séparant initialement le cycliste du feu dans tous les cas le cycliste aura la possibilité d'ajuster sa vitesse de manière à atteindre le feu lorsqu'il est vert.

En particulier pour $v_{\max} = 9\ m.s^{-1}$ et $a = 1\ m.s^{-2}$ on a une distance minimale pour s'immobiliser de 40,5 mètres (3). Et donc lorsque la distance est inférieure à 40,5 mètres pour que le cycliste puisse ajuster sa vitesse de sorte à atteindre le feu lorsqu'il est vert il faut :

$$11 + \sqrt{81 - 2D} \leqslant \mathrm{E}_i < 40 - \frac{D}{9}$$

3 Cas où le cycliste n'a pas besoin de freiner

3.1 Lien entre la distance parcourue et l'état du feu

Lorsque le cycliste ne freine pas, il conserve une vitesse constante au cours du temps égale à $v_{\max}$. Ainsi, toutes les 40 secondes, ce dernier parcourt une distance $40\,v_{\max}$. Or, on sait que l'état du feu devient de nouveau le même toutes les 40 secondes. Dans le cas où le cycliste conserve sa vitesse maximale, l'état du feu est donc périodique par rapport à la distance parcourue par le cycliste.

3.2 Décomposition de la distance parcourue

Ainsi, dans le cas où la vitesse maximale est conservée, nous pouvons décomposer la distance séparant initialement le cycliste du feu en deux distances :

— La première est le plus grand multiple de $40v_{\max}$ inférieur ou égal à la distance totale. Prenons l'exemple où $D = 1620$ mètres et $v_{\max} = 9\,\mathrm{m.s}^{-1}$. Alors $40\,v_{\max} = 360$ mètres. Étant donné que $4 \times 360 \leqslant 1620 < 5 \times 360$, on en déduit que cette distance aura pour valeur 4×360, soit 1440 mètres (Figure 3).

— La seconde désigne la distance restante à parcourir une fois que le cycliste a parcouru la première distance évoquée précédemment. Nous noterons cette distance d_r. Une expression de la distance totale à parcourir est donc : $D = 40k \times v_{\max} + d_r$, avec $k \in \mathbb{N}$.

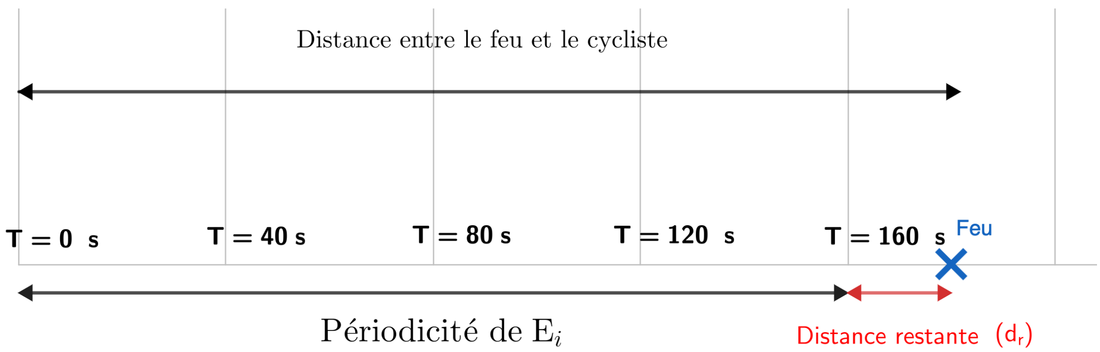


FIGURE 3 – Décomposition de la distance

3.3 Lien entre l'état final et l'état initial

Lorsque le cycliste est à vitesse constante, on a

$$T = \frac{D}{v_{\max}} = \frac{40k\, v_{\max} + d_r}{v_{\max}} = 40k + \frac{d_r}{v_{\max}}$$

Ainsi,

$$\mathrm{E}_i + T = \mathrm{E}_i + 40k + \frac{d_r}{v_{\max}}$$

Or E_f est le reste de la division euclidienne de $\mathrm{E}_i + T$ par 40, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_i + T &\equiv \mathrm{E}_f \mod 40 \\ \mathrm{E}_i + 40k + \frac{d_r}{v_{\max}} &\equiv \mathrm{E}_f \mod 40 \\ \mathrm{E}_i &\equiv \mathrm{E}_f - \frac{d_r}{v_{\max}} \mod 40 \end{aligned}$$

Si le cycliste roulait à vitesse constante $v_{\max}$, alors

$$\boxed{\mathrm{E}_i \equiv \mathrm{E}_f - \frac{d_r}{v_{\max}} \mod 40}$$

3.4 Situation optimale

3.4.1 Encadrement de E_i

L'objectif du cycliste est d'arriver au feu lorsque celui-ci est vert, le plus vite possible, soit $\mathrm{E}_f \in [20; 40[$. Dans ce contexte, une situation où le cycliste conserve sa vitesse maximale serait optimale. Par conséquent, le cycliste atteindra le feu vert à vitesse maximale si $\mathrm{E}_i \equiv n - \frac{d_r}{v_{\max}} \mod 40$ avec $n \in [20; 40[$. On a donc l'expression suivante :

$$40k + 20 - \frac{d_r}{v_{\max}} \leqslant \mathrm{E}_i < 40k + 40 - \frac{d_r}{v_{\max}} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Or on veut définir E_i dans $[0\,;40[$ et, d_r étant le reste dans la division euclidienne de D par $40v_{\max}$, on a $d_r \in [0\,;40v_{\max}[$ et $\frac{d_r}{v_{\max}} \in [0\,;40[$. Ainsi si $\frac{d_r}{v_{\max}} \in [0\,;20]$, il faut prendre $k = 0$ pour que E_i soit dans $[0\,;40[$, et (2) revient à

$$\boxed{20 - \frac{d_r}{v_{\max}} \leqslant \mathrm{E}_i < 40 - \frac{d_r}{v_{\max}}}$$

et si $\frac{d_r}{v_{\max}} \in]20\,;40[$, en prenant $k = 0$ d'une part et $k = 1$ de l'autre pour que E_i soit dans $[0\,;40[$, (2) revient à

$$\boxed{\mathrm{E}_i \in \left[0; 40 - \frac{d_r}{v_{\max}}\right[\cup \left[60 - \frac{d_r}{v_{\max}}\,; 40\right[}$$

De cette manière, en attendant le premier changement de couleur du feu, le cycliste pourra savoir s'il a besoin de freiner ou non. En effet, lorsqu'il débute son parcours, celui-ci ne connaît pas E_i (4).

3.4.2 Illustration et exemple

On peut d'abord représenter sur le cercle des états un arc de cercle vert définissant la zone où doit se situer E_i pour que le feu à l'état final soit vert. Nous introduisons ensuite un arc de cercle rouge, zone où se situe E_i pour que le feu soit rouge à l'état final. Les zones vertes correspondent donc au cas où le cycliste n'a pas besoin de freiner.

Par exemple, si l'on prend $D = 495$ mètres et $v_{\max} = 9$ m.s^{-1}, alors $d_r = 135$ mètres. Ainsi, $\frac{d_r}{v_{\max}} = 15$ s. Si l'on reprend l'encadrement (2), on a donc la représentation suivante (Figure 4).

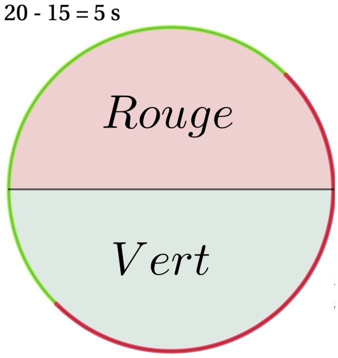


FIGURE 4 – Représentation des situations où il est nécessaire ou non de freiner

4 Cas où le cycliste doit freiner

4.1 Mouvement ralenti et accéléré

Il existe des situations où le cycliste doit freiner. Ce dernier a la possibilité d'accélérer ou de ralentir durant un temps τ.

4.1.1 Décomposition du temps de parcours

L'objectif du cycliste est d'arriver au feu vert en un laps de temps minimum. Par conséquent, il cherchera à réaliser un unique temps de freinage τ. Enfin, le temps de freinage doit être égal au temps d'accélération. En effet, après freinage, le cycliste souhaite retrouver sa vitesse maximale le plus rapidement possible.

Soit T la durée totale du parcours du cycliste : $T = t_1 + 2\tau + t_2$.
t_1 correspond au temps où le cycliste conserve sa vitesse maximale. À l'instant où le feu changera de couleur, celui-ci connaîtra l'état du feu. Il débutera donc son temps de freinage, égal à son temps d'accélération. Enfin, le cycliste parcourt la distance restante en conservant sa vitesse maximale durant un temps t_2 (Figure 5).

4.1.2 Détermination du temps de freinage τ

Nous cherchons τ tel que $E_f \in [20\,;40[$ (5). Nous allons simplifier l'expression de T.

On note D la distance totale à parcourir, $d(\tau)$ la distance parcourue au cours du temps de freinage et d'accélération, $d(t_1)$ et $d(t_2)$ les distances parcourues respectivement aux temps t_1 et t_2. Ainsi,

$$D = d(t_1) + d(2\tau) + d(t_2)$$
$$d(t_2) = D - t_1 \times v_{\max} - 2d(\tau)$$

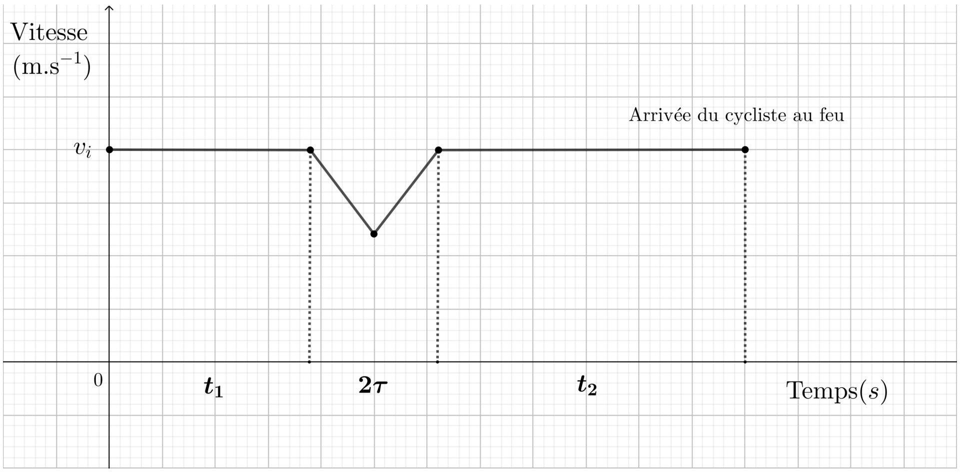


FIGURE 5 – La vitesse dépend également du temps de freinage

On peut donc développer l'expression de $t_2 = \frac{d(t_2)}{v_{\max}}$:

$$\boxed{t_2 = \frac{D - t_1 \times v_{\max} - 2d(\tau)}{v_{\max}}}$$

Or, d'après l'expression (1),

$$d(\tau) = v_{\max} \times \tau - a\frac{\tau^2}{2}$$

On sait que $T = t_1 + 2\tau + t_2$, donc

$$T = t_1 + 2\tau + \frac{D - t_1 \times v_{\max} - 2(v_{\max} \times \tau - a\frac{\tau^2}{2})}{v_{\max}}$$
$$T = \frac{t_1 \times v_{\max} + 2v_{\max} \times \tau + D - t_1 \times v_{\max} - 2 \times v_{\max} \times \tau + a\tau^2}{v_{\max}}$$

$$\boxed{T = \frac{D + a\tau^2}{v_{\max}}}$$

4.1.3 Détermination du temps de freinage τ

Par conséquent, puisque $\mathrm{E}_i + \mathrm{T} \equiv \mathrm{E}_f \mod 40$, le feu sera vert s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$20 + 40k \leqslant \mathrm{E}_i + \mathrm{T} < 40 + 40k \tag{3}$$

Or le but du cycliste est aussi d'arriver au feu le plus vite possible, pour cela on cherche donc la plus petite valeur du temps de freinage τ possible. Cela revient donc à chercher la plus petite valeur de k, que l'on notera $k_{\min}$, telle qu'on peut obtenir l'encadrement évoqué précédemment. Le temps minimal que le cycliste peut mettre pour atteindre le feu est $\frac{D}{v_{\max}}$. On en déduit donc que $k_{\min}$ est tel que

$$40k_{\min} \leqslant \mathrm{E}_i + \frac{D}{v_{\max}} < 40(k_{\min} + 1)$$

En appliquant $k_{\min}$ à l'encadrement (3) on obtient

$$20+40k_{\min}-\mathrm{E}_i \leqslant \frac{\mathrm{D}+a\tau^2}{v_{\max}} < 40+40k_{\min}-\mathrm{E}_i$$

$$20+40k_{\min}-\mathrm{E}_i-\frac{\mathrm{D}}{v_{\max}} \leqslant \frac{a\tau^2}{v_{\max}} < 40+40k_{\min}-\mathrm{E}_i-\frac{D}{v_{\max}} \tag{4}$$

or par définition de $k_{\min}$ on a

$$\mathrm{E}_i+\frac{D}{v_{\max}} < 40(k_{\min}+1),$$
$$0 < 40k_{\min}+40-\mathrm{E}_i-\frac{D}{v_{\max}}$$

Mais on peut avoir $20+40k_{\min}-\mathrm{E}_i-\frac{D}{v_{\max}} \leqslant 0$. Dans ce cas pour $\tau=0$, on a $\frac{a\tau^2}{v_{\max}}=0$ et donc bien

$$20+40k_{\min}-\mathrm{E}_i-\frac{D}{v_{\max}} \leqslant \frac{a\tau^2}{v_{\max}} < 40+40k_{\min}-\mathrm{E}_i-\frac{D}{v_{\max}}$$

On peut en déduire que dans le cas où $20+40k_{\min}-\mathrm{E}_i-\frac{\mathrm{D}}{v_{\max}} \leqslant 0$ le cycliste n'a pas besoin de freiner, ce qui revient à la condition (2), et on est donc dans la situation optimale. Cependant nous nous intéressons au cas contraire où le cycliste est obligé de freiner ; on ne considérera donc pas dans la suite cette possibilité et l'on supposera donc que

$$20+40k_{\min}-\mathrm{E}_i-\frac{D}{v_{\max}} > 0$$

Alors, de (4), en multipliant par $\frac{v_{\max}}{a}$ et en prenant la racine (étant donné que la borne supérieure est toujours positive et que l'on a supposé de même pour la borne inférieure), on obtient

$$\sqrt{\frac{1}{a}(20v_{\max}+40v_{\max}k_{\min}-v_{\max}\mathrm{E}_i-D)} \leqslant \tau < \sqrt{\frac{1}{a}(40v_{\max}+40v_{\max}k_{\min}-v_{\max}\mathrm{E}_i-D)}$$

4.1.4 Expression des valeurs minimums de k et τ

Le cycliste cherche aussi à atteindre le feu le plus rapidement et donc à freiner le moins longtemps possible ce qui revient donc à prendre la plus petite valeur possible de τ (que l'on notera $\tau_{\min}$) comprise dans l'intervalle :

$$\left[\sqrt{\frac{1}{a}\big(20v_{\max}+40v_{\max}k_{\min}-v_{\max}\mathrm{E}_i-D\big)}\,;\,\sqrt{\frac{1}{a}\big(40v_{\max}+40v_{\max}k_{\min}-v_{\max}\mathrm{E}_i-D\big)}\right[$$

Ainsi $\tau_{\min}$ s'exprime

$$\tau_{\min}=\sqrt{\frac{1}{a}\big(20v_{\max}+40v_{\max}k_{\min}-v_{\max}\mathrm{E}_i-D\big)}$$

Nous allons maintenant chercher à déterminer une expression de $k_{\min}$. Par définition $k_{\min}$ est le plus grand entier tel que

$$40k_{\min} \leqslant \mathrm{E}_i+\frac{D}{v_{\max}}, \quad \text{soit} \quad k_{\min} \leqslant \frac{\mathrm{E}_i}{40}+\frac{D}{40v_{\max}}$$

Or $k_{\min}$ étant le plus grand entier vérifiant cette inégalité on a donc

$$\boxed{k_{\min} = \left\lfloor \frac{\mathrm{E}_i}{40} + \frac{D}{40 v_{\max}} \right\rfloor} \qquad (6)$$

En remplaçant cette expression de $k_{\min}$ dans celle de $\tau_{\min}$ obtenue précédemment on obtient alors :

$$\boxed{\tau_{\min} = \sqrt{\frac{1}{a}\left(20 v_{\max} + 40 v_{\max} \left\lfloor \frac{\mathrm{E}_i}{40} + \frac{D}{40 v_{\max}} \right\rfloor - v_{\max}\mathrm{E}_i - D\right)}}$$

4.1.5 Limites de cette méthode

Ainsi, nous pouvons connaître le temps de freinage minimal nécessaire au cycliste pour atteindre le feu lorsqu'il est vert. Toutefois, cette méthode présente des limites.

La distance séparant initialement le cycliste du feu ne doit pas être trop faible. En effet, lorsque le feu change de couleur, le cycliste connaîtra E_i, lui permettant de débuter son temps de freinage. Dans un cas où D est trop faible, le cycliste ne pourra pas connaître E_i. Puisque la période de changement de couleur du feu est de 20 secondes, il s'agit alors de la durée maximale pour observer un changement de couleur. Ainsi, pour connaître E_i, il faut que $D > 20 v_{\max}$.

Il est également nécessaire que la distance restant à parcourir après le premier changement de couleur du feu ne soit pas trop petite, pour que le cycliste ait le temps de freiner et d'accélérer durant un même temps $\tau_{\min}$ avant d'atteindre le feu. Par conséquent, il faut que

$$2d(\tau_{\min}) \leqslant D - d(t_1)$$

or on peut fixer $t_1 = 0$ et on obtient par conséquent $d(t_1) = v_{\max} \times 0 = 0$ et donc il faut

$$2d(\tau_{\min}) \leqslant D$$

soit

$$2 v_{\max}\tau_{\min} - a\tau_{\min}^2 \leqslant D \qquad (7)$$

Enfin, on sait que $v(\tau_{\min}) = v_{\max} - a\tau_{\min}$. Il peut exister des cas où la vitesse serait strictement négative, lorsque

$$v_{\max} - a\tau_{\min} < 0, \quad \text{soit} \quad \tau_{\min} > \frac{v_{\max}}{a}$$

Prenons pour exemple $v_{\max} = 9$ m.s^{-1} et $a = 1$ m.s^{-2}. Si le temps de freinage minimum est strictement supérieur à 9 secondes, la vitesse du cycliste serait négative (mathématiquement cela pourrait être interprété comme si le cycliste reculait alors que celui-ci se serait plutôt en réalité immobilisé). Nous devons donc considérer un autre modèle dans le cas où $\tau_{\min} > \frac{v_{\max}}{a}$: le **temps d'arrêt**.

4.2 Temps d'arrêt

4.2.1 Décomposition du temps de parcours

Dans les situations où le temps de freinage minimum est tel que selon le modèle utilisé précédemment le cycliste aurait une vitesse négative, il est nécessaire d'utiliser une autre méthode. En effet, le cycliste en réalité en freinant sans s'arrêter finira par s'immobiliser mais ne se déplacera pas en sens arrière à moins de le décider en faisant demi-tour avec son vélo. Ce qu'il n'a pas intérêt a faire, il préférera plutôt rester immobile pendant une certaine durée que l'on appellera temps d'arrêt et que l'on notera t_a. Enfin, il accélérera de manière à retrouver sa vitesse maximale.

La vitesse du cycliste diminuerait jusqu'à devenir nulle durant un temps d'arrêt t_a. Nous allons désigner cette période par Δt (Figure 6). Autrement dit, puisque le temps de freinage est égal au temps d'accélération, pour tout $\Delta t > 2\frac{v_{\max}}{a}$ et pour $\tau = \frac{v_{\max}}{a}$, on a

$$\Delta t = 2\tau + t_a$$

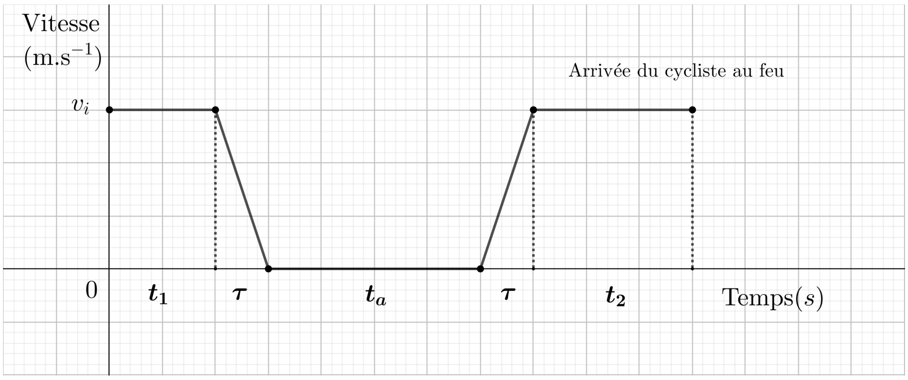


FIGURE 6 – Cas où $\Delta t > 9s$: existence du temps d'arrêt t_a

On a donc le temps de parcours T qui s'exprime

$$T = t_1 + \Delta t + t_2 = t_1 + t_a + 2\tau + t_2$$

4.2.2 Expression du temps de parcours T

Or t_2 correspond au temps que va mettre le cycliste à parcourir la distance restante qui le sépare du feu après être allé à vitesse maximale pendant un temps t_1, avoir freiné et accéléré respectivement pendant une durée τ et avoir marqué un temps d'arrêt t_a. Étant donné que pendant la durée t_a le cycliste est immobile il parcourt donc une distance nulle et on a donc

$$\begin{aligned} d(t_2) &= D - d(t_1) - 2d(\tau) \\ &= D - v_{\max} t_1 - 2\left(v_{\max}\tau - a\frac{\tau^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Or ici on a $\tau = \frac{v_{\max}}{a}$ et donc

$$\begin{aligned} d(t_2) &= D - v_{\max} t_1 - 2\left(v_{\max}\frac{v_{\max}}{a} - a\frac{\left(\frac{v_{\max}}{a}\right)^2}{2}\right) \\ &= D - v_{\max} t_1 - \frac{v_{\max}^2}{a} \end{aligned}$$

Le cycliste parcourt la distance $d(t_2)$ en allant à vitesse maximale ; on en déduit ainsi que t_2 s'exprime

$$t_2 = \frac{D - v_{\max} t_1 - \frac{v_{\max}^2}{a}}{v_{\max}}$$

On en déduit enfin, en remplaçant dans l'expression de T,

$$\begin{aligned} T &= t_1 + t_a + 2\tau + \frac{D - v_{\max} t_1 - \frac{v_{\max}^2}{a}}{v_{\max}} \\ &= t_1 + t_a + 2\frac{v_{\max}}{a} - t_1 - \frac{v_{\max}}{a} + \frac{D}{v_{\max}} \end{aligned}$$

$$\boxed{T = t_a + \frac{v_{\max}}{a} + \frac{D}{v_{\max}}}$$

4.2.3 Détermination du temps d'arrêt t_a

On a donc par conséquent

$$\mathrm{E}_i + T = \mathrm{E}_i + t_a + \frac{v_{\max}}{a} + \frac{D}{v_{\max}}$$

Or $\mathrm{E}_i + T \equiv \mathrm{E}_f \mod 40$ et pour que le cycliste atteigne le feu lorsqu'il est vert il faut que $\mathrm{E}_f \in [20; 40[$. Cela revient donc à ce qu'il existe un entier k tel que

$$\begin{aligned} 20 + 40k &\leqslant \mathrm{E}_i + T < 40 + 40k \\ 20 + 40k &\leqslant \mathrm{E}_i + \frac{v_{\max}}{a} + \frac{D}{v_{\max}} + t_a < 40 + 40k \\ 20 + 40k - \mathrm{E}_i - \frac{v_{\max}}{a} - \frac{D}{v_{\max}} &\leqslant t_a < 40 + 40k - \mathrm{E}_i - \frac{v_{\max}}{a} - \frac{D}{v_{\max}} \end{aligned}$$

Le but du cycliste étant aussi d'atteindre le feu le plus rapidement possible nous allons donc chercher la plus petite valeur de t_a telle que le cycliste atteigne le feu lorsqu'il est vert. Ce qui revient donc à chercher la plus petite valeur de k (que l'on notera $k'_{\min}$) telle qu'il est possible d'obtenir l'encadrement. Le temps minimal que le cycliste peut mettre à atteindre le feu en allant à vitesse maximale puis freiner et accélérer d'une même durée $\frac{v_{\max}}{a}$ et enfin parcourir la distance restante à vitesse maximale, ce qui revient à prendre $t_a = 0$ et se mettre dans le cas extrême de la méthode du paragraphe 4.1 avec $\tau = \frac{v_{\max}}{a}$, est $\frac{D}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a}$.
$k'_{\min}$ est donc tel que

$$40k'_{\min} \leqslant \mathrm{E}_i + \frac{D}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a} < 40(k'_{\min} + 1)$$

Or ici nous sommes dans le cas où le cycliste est obligé de marquer un temps d'arrêt et on obtient selon la méthode évoquée précédemment $\tau_{\min} > \frac{v_{\max}}{a}$ c'est-à-dire

$$\sqrt{\frac{1}{a}(20v_{\max} + 40v_{\max}k_{\min} - v_{\max}\mathrm{E}_i - D)} > \frac{v_{\max}}{a}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{a}(20v_{\max} + 40v_{\max}k_{\min} - v_{\max}\mathrm{E}_i - D)} &> \frac{v_{\max}}{a} \\ \frac{1}{a}(20v_{\max} + 40v_{\max}k_{\min} - v_{\max}\mathrm{E}_i - D) &> \frac{v_{\max}^2}{a^2} \qquad \left(\frac{v_{\max}}{a} \geqslant 0\right) \\ 20v_{\max} + 40v_{\max}k_{\min} - v_{\max}\mathrm{E}_i - D &> \frac{v_{\max}^2}{a} \qquad (a > 0) \\ 20 + 40k_{\min} - \mathrm{E}_i - \frac{D}{v_{\max}} &> \frac{v_{\max}}{a} \qquad (v_{\max} > 0) \end{aligned}$$

$$20 + 40k_{\min} > \mathrm{E}_i + \frac{D}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a}$$

Et on a de plus $40k_{\min} \leqslant \mathrm{E}_i + \frac{D}{v_{\max}}$ et donc $40k_{\min} \leqslant \mathrm{E}_i + \frac{D}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a}$.
On a ainsi

$$40k_{\min} \leqslant \mathrm{E}_i + \frac{D}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a} < 40(k_{\min} + 1)$$

On en déduit enfin que $k'_{\min} = k_{\min}$.

On peut ainsi appliquer $k_{\min}$ à l'encadrement

$$20 + 40k_{\min} - \mathrm{E}_i - \frac{v_{\max}}{a} - \frac{D}{v_{\max}} \leqslant t_a < 40 + 40k_{\min} - \mathrm{E}_i - \frac{v_{\max}}{a} - \frac{D}{v_{\max}}$$

Or, d'après le calcul précédent,

$$20 + 40k_{\min} > \mathrm{E}_i + \frac{D}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a}$$

On en déduit que la plus petite valeur de t_a respectant l'encadrement est la borne inférieure et ainsi :

$$t_a = 20 + 40\mathrm{k}_{min} - \mathrm{E}_i - \frac{\mathrm{D}}{v_{\max}} - \frac{v_{\max}}{a}$$

En remplaçant $k_{\min}$ par son expression en fonction de E_i, D et $v_{\max}$ on obtient alors :

$$\boxed{t_a = 20 + 40\left\lfloor \frac{\mathrm{E}_i}{40} + \frac{D}{40v_{\max}} \right\rfloor - \mathrm{E}_i - \frac{D}{v_{\max}} - \frac{v_{\max}}{a}}$$

4.2.4 Limites de cette méthode

Cette méthode nécessite elle aussi de freiner et accélérer tout en marquant cette fois un temps d'arrêt entre ces deux étapes. Ici il s'agit de freiner pour passer de la vitesse maximale $v_{\max}$ à vitesse nulle, puis après le temps d'arrêt, d'accélérer pour passer de vitesse nulle à la vitesse maximale, c'est-à-dire aussi le temps pour réaliser ces 3 actions ainsi que les distances correspondantes.

On a $v(t) = v_{\max} - at$; le temps de freinage s'exprime donc $\tau = \frac{v_{\max}}{a}$ et on a ainsi un même temps d'accélération $\frac{v_{\max}}{a}$. Pendant le temps d'arrêt le cycliste est immobile et la distance qu'il parcourt est donc nulle. La distance correspondant donc à ces 3 actions est celle parcourue pendant le freinage et l'accélération, donc $2d(\tau)$. La distance séparant initialement le cycliste du feu D doit donc vérifier

$$D \geqslant 2d(\tau) = 2\left(v_{\max} \times \frac{v_{\max}}{a} - a \times \frac{v_{\max}^2}{2a}\right) = \frac{v_{\max}^2}{a}$$

5 Conclusion

En définitive, le cycliste est confronté à différents cas :

Le cycliste a la possibilité de ne pas avoir besoin de freiner et atteindre le feu vert à vitesse maximale. Le deuxième cas concerne l'obligation de freiner, pouvant se décomposer en deux situations. La première, serait un freinage d'un temps τ inférieur à 9 secondes, puis une accélération d'un même temps pour retrouver la vitesse maximale. La deuxième situation désigne un cas où le temps de freinage est supérieur à 9 secondes, obligeant le cycliste à s'arrêter.

Enfin, dans d'autres situations, la distance séparant initialement le cycliste du feu peut être trop faible. Ce dernier ne pourra pas ajuster sa vitesse de manière à atteindre le feu lorsqu'il vert : il sera ainsi obligé de patienter que le feu change de couleur.

Nous avons ainsi obtenu une expression de $\tau_{\min}$ dans les cas où le temps d'arrêt n'est pas nécessaire et nous avons déterminé les conditions dans lesquelles le cycliste ne pourra pas ajuster sa vitesse de manière à atteindre le feu lorsqu'il est vert :

$$\left\{\begin{array}{l}
\tau_{\min} = 0 \text{ si } \begin{cases} 20 - \frac{d_r}{v_{\max}} \leqslant \mathrm{E}_i < 40 - \frac{d_r}{v_{\max}} & \text{si } \frac{d_r}{v_{\max}} \in [0;20] \\ \mathrm{E}_i \in [0;40 - \frac{dr}{v_{\max}}[\cup [60 - \frac{dr}{v_{\max}};40[& \text{si } \frac{d_r}{v_{\max}} \in]20;40[\end{cases} \\
\tau_{\min} = \sqrt{\frac{1}{a v_{\max}}\left(20 + 40\mathrm{k}_{\min} - \mathrm{E}_i - \frac{D}{v_{\max}}\right)} \text{ si } \begin{cases} \mathrm{E}_i \in [0;20 - \frac{d_r}{v_{\max}}[\cup [40 - \frac{d_r}{v_{\max}};40[& \text{si } \frac{d_r}{v_{\max}} \in [0;20] \\ \mathrm{E}_i \in [40 - \frac{dr}{v_{\max}};60 - \frac{dr}{v_{\max}}[& \text{si } \frac{dr}{v_{\max}} \in]20;40[\end{cases} \\
t_a = 0 \text{ si } \tau_{\min} \leqslant \frac{v_{\max}}{a} \\
t_a = 20 + 40k_{\min} - \mathrm{E}_i - \frac{D}{v_{\max}} - \frac{v_{\max}}{a} \text{ si } \tau_{\min} > \frac{v_{\max}}{a} \\
\text{Impossibilité d'atteindre le feu lorsqu'il est vert si (8)} \\
D < \frac{v_{\max}^2}{2a} \text{ et } \begin{cases} \mathrm{E}_i \in [0;20 - \tau_r[\cup [40 - \frac{d_r}{v_{\max}};40[& \text{si } \tau_r \in [0;20] \\ \mathrm{E}_i \in [40 - \frac{d_r}{v_{\max}};60 - \tau_r[& \text{si } \tau_r \in]20;40[\end{cases}
\end{array}\right.$$

6 Perspectives

Nous avons trouvé des pistes de travail non approfondies dans l'article, mais pas moins intéressantes.

On peut d'abord s'intéresser à un cas où l'accélération appartient à l'intervalle $[-1;1]$. De plus, nous pouvons nous interroger sur une situation où il n'existe pas de vitesse maximale.

Ensuite, nous pouvons nous intéresser à un cas où la vitesse du cycliste suit une évolution géométrique de raison q, dont l'expression serait $v(\tau) = v_{\max} \times q^{\tau}$. Ainsi, nous devons raisonner de la même façon que la partie 4.1.2, pour déterminer un encadrement de τ. Il est possible d'étudier une situation où le temps d'accélération du cycliste diffère du temps de freinage.

Enfin, on peut s'intéresser à un contexte où il existe plusieurs feux. On peut s'interroger sur la stratégie adoptée par le cycliste.

7 Remerciements

Nous remercions **Lucas Gerretsen**[1,2] et **Ariane Martin**[1,2], qui nous ont encadrés cette année.

De même, on remercie **Anaïs**[6], **Chloë**[6], **Eliott**[6], et **Ibrahim**[6], des excellents camarades, pour leur avis sur nos travaux et notre présentation.

Nous remercions également le **lycée Carnot** de nous avoir permis de participer à MATh.en.JEANS ainsi que :

Adélie[1]	**Mr Paul**[1,3]	**1. Anciens de MEJ**
Jules[1]	**Mme Desfougères**[2]	**2. Professeur documentaliste**
Mr Devaux[3,5]	**Mme Blondel**[4]	**3. Professeurs de Maths**
Mme Briaud[3]	**Mme Lorin-Colin**[4]	**4. Professeurs de Physique**
Mr Brizay[3]	**Mme Michaut**[4]	**5. Proviseur**
Mr Grosselin[3]	**Mme Ruault**[4]	**6. Membres de MEJ**
Mr Garçin[3]	**Guillaume Saes**[7]	**7. Chercheur, docteur en mathématiques à l'Université Paris-Est Créteil**
Mr Lopez[3]	**(Science Trash)**	

Merci enfin à **l'organisation de MATh.en.JEANS**.

Notes d'édition

(1) $20-\tau_r \leqslant \mathrm{E}_i < 40 - d_r / v_{\max}$ *ou* $\mathrm{E}_i \geq 60-\tau_r$. En effet dans le cas où $\mathrm{E}_i+\tau_r \geqslant 40$ on a $\mathrm{E}_f = \mathrm{E}_i+\tau_r-40$, et alors si $\mathrm{E}_i \geqslant 60-\tau_r$ le cycliste arrive aussi au feu vert en freinant tout le temps.

(2) On ne peut pas raisonner seulement sur les restes τ_r et d_r. Par exemple la remarque à la fin de ce paragraphe pour le cas $\tau_r \geqslant d_r/v_{\max}+20$ s'applique en fait lorsque $\tau \geqslant D/v_{\max}+20$ puisque l'intervalle dans lequel on peut choisir le temps d'arrivée contient alors nécessairement un temps où le feu est vert : on n'a aucune condition liant E_i à τ_r et d_r. Et lorsque $\tau < D/v_{\max}+20$, on ne peut pas plus comparer τ_r et $d_r/v_{\max}$ mais il faut et il suffit que l'une des extrémités de l'intervalle corresponde à un feu vert, c'est-à-dire

$$\mathrm{E}_i \in \left[20-\max\left(\frac{d_r}{v_{\max}},\ \tau_r\right);\ 40-\min\left(\frac{d_r}{v_{\max}},\ \tau_r\right)\right[\cup \left[60-\max\left(\frac{d_r}{v_{\max}},\ \tau_r\right);\ 40\right[$$

(voir la discussion au paragraphe 3.4).

(3) Ici, on est dans le cas simple $0 \leqslant D/v_{\max} < \tau < 20$, d'où $d_r/v_{\max} = D/v_{\max}$ et $\tau_r = \tau$; la condition se réduit alors à $20-\tau \leqslant \mathrm{E}_i < 40 - D/v_{\max}$.

(4) En fait, cette incertitude sur l'état du feu avant son premier changement de couleur n'est pas prise en compte dans la discussion.

(5) On cherche d'abord à déterminer ce temps de freinage τ sans tenir compte qu'il doit être inférieur ou égal au temps mis pour s'arrêter, ni que la distance parcourue lors du freinage puis de l'accélération doit être inférieure ou égale à D. Ces conditions sont discutées au paragraphe 4.1.5.

(6) La notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière d'un réel x.

(7) – Pour le cas où $\tau_{\min} > v_{\max}/a$, il faut remplacer $\tau_{\min}$ par $v_{\max}/a$ dans cette condition (voir la discussion avec un temps d'arrêt au paragraphe 4.2.4).
– Lorsque la condition n'est pas vérifiée, le cycliste pourra arriver au feu vert sous les conditions du paragraphe 2.3 si $D < v_{\max}^2/(2a)$, ou sans condition si $D \geqslant v_{\max}^2/(2a)$, mais pas nécessairement en ayant retrouvé sa vitesse maximale.

(8) Pour ce cas le résultat est erroné (voir la note 2).

Lien vers le programme simulant une partie