Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Alea Jacta Est

2020 - 2021

Sioban Nieradzik-Kozic et Alexandre Gabarren (classe de terminale)

Établissement : Lycée Marguerite de Navarre, Bourges
Enseignants : Nathalie Herminier, Olivier Créchet, Guillaume Pelletier
Chercheur : Benjamin Nguyen, INSA Centre Val de Loire

Table des matières

Première partie
Présentation du sujet

L'enjeu du problème "Alea Jacta Est" est de définir une stratégie efficace pour un jeu de dés dont les règles sont les suivantes.

Ce jeu se joue avec deux joueurs et un meneur du jeu. Les joueurs prennent connaissance de deux dés cubiques équilibrés comportant des faces bleues et des faces rouges. Puis le meneur du jeu prend au hasard un dé sans le montrer aux joueurs. Il le lance alors à l'abri des regards et annonce la couleur de la face supérieure du dé lancé, comme on lit le numéro sorti au lancé d'un dé classique à faces chiffrées. Le but des joueurs est de deviner quel dé a été lancé. Le meneur du jeu lance son dé, en annonçant à chaque fois la couleur obtenue, jusqu'à ce qu'un des joueurs dise le dé qu'il pense avoir été lancé. S'il a raison, il marque un point pour cette manche ; un joueur doit accumuler trois points (un point par manche) pour gagner la partie. Si le joueur se trompe, l'autre joueur gagne définitivement la partie.

Un lancer est dit rouge (resp. une autre couleur) lorsque le dé a affiché une face rouge (resp. une autre couleur) lors de ce lancer.

Simulons une partie. Prenons deux dés : le premier dé comporte quatre faces rouges et deux faces bleues ; le second a trois faces rouges et trois faces bleues. Nous utiliserons ces deux dés dans la suite de l'article.

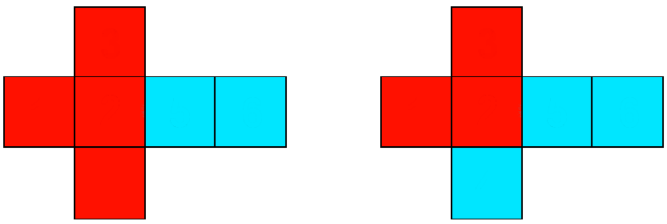


FIGURE 1 – Dé n°1 (gauche) et Dé n°2 (droite)

Le meneur du jeu prend au hasard le dé n°1 et le lance plusieurs fois. Voici le résultat des lancers :

Lancer n°...	1	2	3	4	5
Couleur annoncée par le meneur du jeu	Bleu	Rouge	Rouge	Bleu	Rouge

Le jeu s'arrête au cinquième lancer, quand le premier joueur se prononce pour le dé n°1. Il marque un point.

Deuxième partie

Annonces des conjectures et résultats obtenus

Nous chercherons à répondre à des questions du type : “**Quelle est la probabilité** que ce soit le dé n°1 qui ait été lancé par le meneur du jeu, **sachant qu**’il a lancé le dé trois fois et a obtenu rouge, rouge puis bleu ?”.

Nous présenterons les calculs des probabilités qu’un dé ait été lancé en fonction du nombre de fois où chaque couleur est apparue au cours d’un certain nombre de lancers.

Ces calculs partent d’une situation simple avec deux dés à six faces et deux couleurs, puis vont être généralisés à n’importe quel nombre de lancers, de dés, de faces et de couleurs.

Nous nous intéresserons également au temps d’attente optimal avant qu’un joueur ne se prononce pour un dé : plus il attend, moins son choix sera incertain grâce aux résultats apportés par les lancers, mais plus l’autre joueur risque de se prononcer et de marquer le point à sa place.

Troisième partie

Probabilité conditionnelle du choix d’un dé

1 Un exemple avec deux dés à six faces

Prenons deux dés équilibrés à 6 faces : le dé n°1 a quatre faces rouges (et donc deux faces bleues) et le dé n°2 a trois faces rouges (et trois faces bleues).

Posons les évènements suivants :

— R : “Le lancer est rouge”

— D_1 : “Le dé lancé est le dé n°1.”

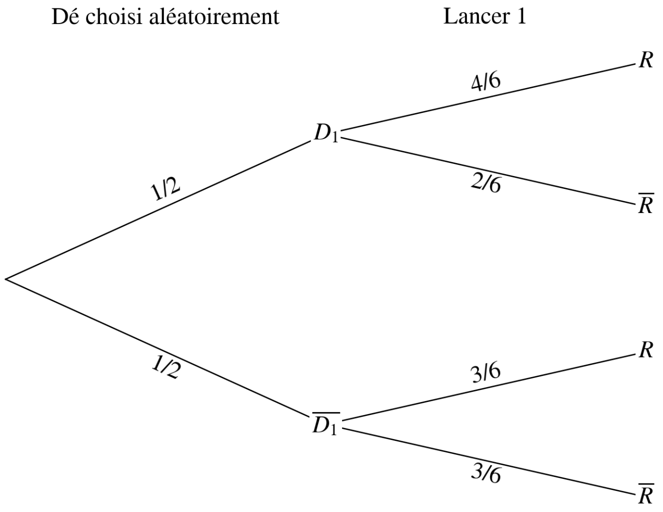
Puisque nous travaillons pour le moment avec seulement deux dés et deux couleurs, nous pouvons nous contenter de ces lettres : l’évènement “Le lancer est bleu” est ainsi $\overline{R}$ tandis que l’évènement “Le dé lancé est le dé n°2” est $\overline{D_1}$.

Ces données sont résumées dans le tableau de probabilité suivant que nous utiliserons par la suite dans certains calculs :

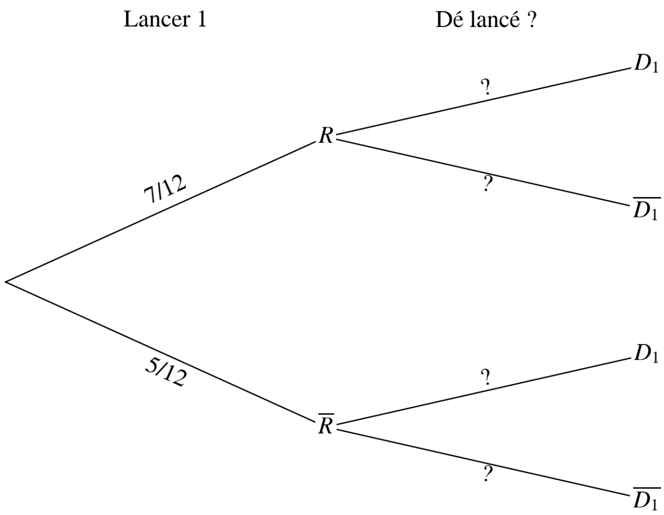
Faces	Rouges	Bleues	Total
Dé n°1	4	2	6
Dé n°2	3	3	6
Total	7	5	12

Ce tableau indique par exemple la probabilité d’obtenir une face rouge lorsque le dé n°1 est lancé :

$$p_{D_1}(R) = \frac{4}{6}$$



Mais nous cherchons la probabilité inverse, notée $p_R(D_1)$: quand on obtient une face rouge, quelle est la probabilité que le dé n°1 soit lancé ? L'arbre suivant, que nous allons compléter, traduit ce problème :



Remarque : Les probabilités $p(R) = \frac{7}{12}$ et $p(\overline{R}) = \frac{5}{12}$ proviennent de la lecture du tableau de probabilités.

1.1 Premier lancer

Pour un unique lancer, la lecture du tableau suffit pour déterminer la probabilité qu'un dé ait été lancé.

Premier cas : le lancer est rouge :

D'après le tableau, la probabilité que le dé n°1 ait été lancé, sachant que le premier lancer est rouge, vaut $p_R(D_1) = \frac{4}{7}$. En effet, sur les sept faces rouges réunies par les deux dés, quatre faces rouges appartiennent au dé n°1. Lorsqu'une face rouge sort, la probabilité que ce soit le dé n°1 qui ait été lancé est donc la probabilité que la face rouge sortie appartienne au dé n°1.

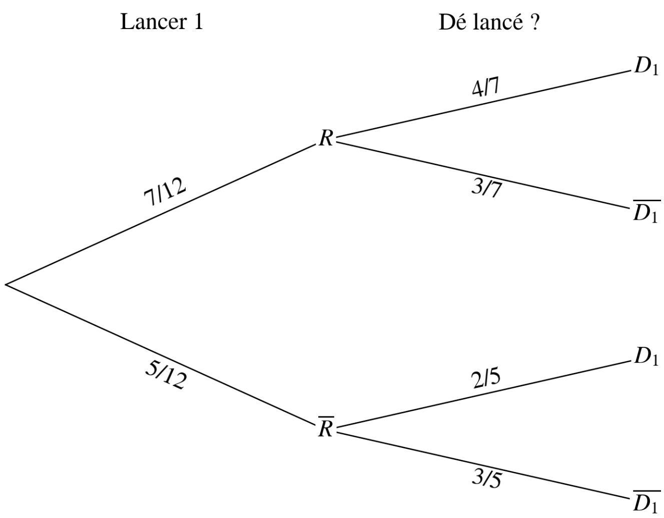
La probabilité que ce soit le dé n°2 et non le n°1 qui ait été choisi vaut quant à elle : $p_R(\overline{D1}) = \frac{3}{7}$. On vérifie bien $p_R(\overline{D1}) + p_R(D1) = 1$.

Second cas : le lancer est bleu :

D'après le tableau, la probabilité que le dé n°1 ait été lancé, sachant que le premier lancer est bleu, vaut $p_{\overline{R}}(D_1) = \frac{2}{5}$.

La probabilité que le dé n°2 ait été lancé vaut : $p_{\overline{R}}(\overline{D_1}) = \frac{3}{5}$.

On peut ainsi compléter le premier arbre pondéré inversé :

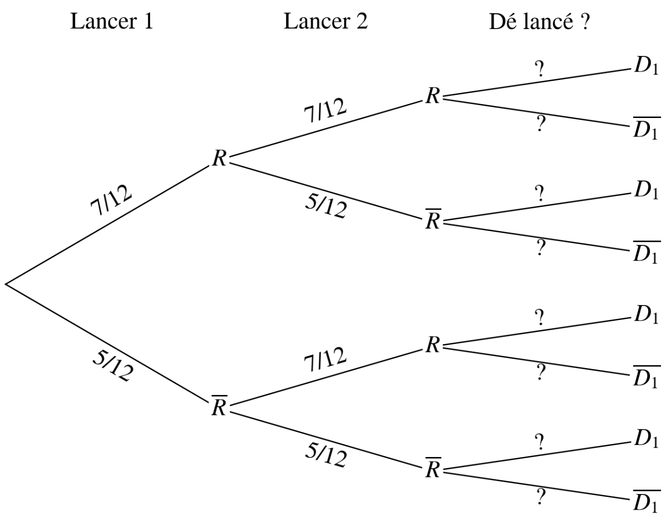


Bien entendu, dans une partie, notre réponse au meneur du jeu sera le dé qui a la plus forte probabilité d'avoir été choisi, pour espérer gagner, même si on ne pourra jamais être sûr d'avoir raison de façon certaine. On remarque que l'écart entre les probabilités des deux dés diffère en fonction de la couleur du lancer. Cet écart vaut, dans notre exemple, $\frac{1}{7}$ pour un lancer rouge et $\frac{1}{5}$ pour un lancer bleu. Plus l'écart est grand, plus nous avons de chance d'avoir raison. Tous les résultats ne donnent donc la même quantité d'informations.

1.2 Deuxième lancer

L'intérêt du deuxième lancer (et de ceux qui suivront) est *d'affiner* les probabilités. On doit donc faire attention à prendre en compte le résultat du premier lancer, que l'on combine avec celui du deuxième lancer.

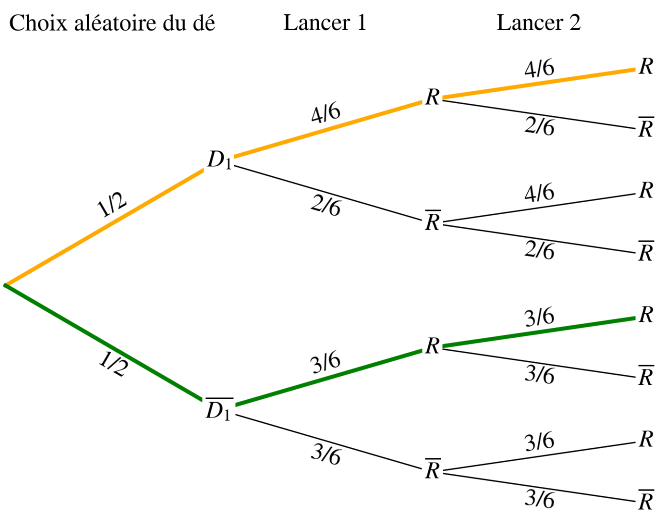
Nous allons compléter l'arbre suivant :



Nous noterons R_n l'évènement : "Le n-ième lancer est rouge". Cette notation permet simplement d'expliquer le raisonnement et les calculs.

Premier cas : deux lancers rouges

La probabilité que le dé n°1 ait été lancé, sachant que les deux premiers lancers sont rouges, est la probabilité d'obtenir deux lancers rouges en lançant le dé n°1, divisée par la probabilité d'obtenir deux lancers rouges quand on lance un des deux dés au hasard. Visuellement, c'est la probabilité de suivre le chemin orange, sur celle d'emprunter un des deux chemins colorés (orange et vert) :



La probabilité que le dé n°1 ait été lancé sachant que les deux premiers lancers sont rouges est donc :

$$p_{R_1 \cap R_2}(D_1) = \frac{p(D_1 \cap R_1 \cap R_2)}{p(R_1 \cap R_2)}$$

Ensuite, d'après les probabilités totales :

$$p_(R_1 \cap R_2) = p(D_1 \cap R_1 \cap R_2) + p(\overline{D_1} \cap R_1 \cap R_2)$$

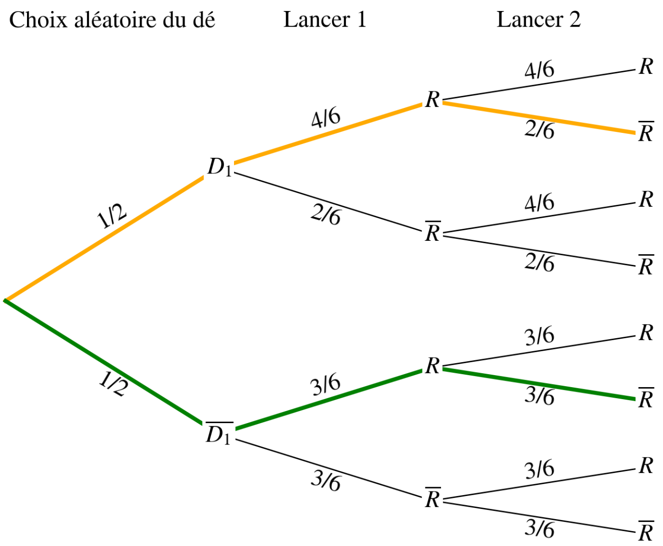
On peut donc calculer $p_{R_1\cap R_2}(D_1)$ en lisant l'arbre pondéré ci-dessus. Les évènements R_1 et R_2 sont indépendants quel que soit le dé lancé, donc $p_{D_1}(R_1)=p_{D_1}(R_2)=\frac{4}{6}$ et $p(D_1\cap R_1\cap R_2)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}$.

$$p_{R_1\cap R_2}(D_1)=\frac{p(D_1\cap R_1\cap R_2)}{p(D_1\cap R_1\cap R_2)+p(\overline{D_1}\cap R_1\cap R_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}}=\frac{16}{25}=0,64$$

La probabilité que le dé n°2 ait été choisi, dans les mêmes conditions, vaut :

$$p_{R_1\cap R_2}(\overline{D_1})=1-p_{R_1\cap R_2}(D_1)=1-0,64=0,36$$

Deuxième cas : un lancer rouge puis un lancer bleu



La probabilité que le dé n°1 ait été choisi sachant que le premier lancer est rouge et que le deuxième est bleu vaut :

$$p_{R_1\cap\overline{R_2}}(D_1)=\frac{p(D_1\cap R_1\cap\overline{R_2})}{p(R_1\cap\overline{R_2})}$$

Comme dans le premier cas :

$$p_{R_1\cap\overline{R_2}}(D_1)=\frac{p(D_1\cap R_1\cap\overline{R_2})}{p(D_1\cap R_1\cap\overline{R_2})+p(\overline{D_1}\cap R_1\cap\overline{R_2})}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}}=\frac{8}{17}$$

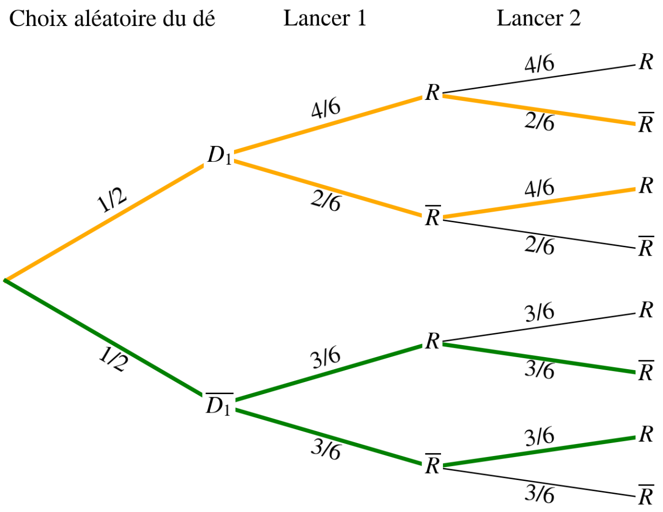
On peut en déduire la probabilité que le dé n°2 ait été choisi sachant les mêmes conditions :

$$p_{R_1\cap\overline{R_2}}(D_2)=1-p_{R_1\cap\overline{R_2}}(D_1)=\frac{9}{17}$$

Troisième cas : premier lancer bleu et second lancer rouge
Nous verrons par la suite que l'ordre dans lequel apparaissent les couleurs au fur et à mesure des lancers n'est pas à prendre en compte. Donc la probabilité que le dé n°1 ait été choisi sachant que le premier lancer était bleu et le second rouge, est donc la même que celle sachant que le premier lancer était rouge et le second bleu.

$$p_{R_1\cap\overline{R_2}}(D_1)=p_{\overline{R_1}\cap R_2}(D_1)$$

On peut donc réunir les deuxième et troisième cas. Visuellement, la probabilité que le dé n°1 ait été lancé, sachant qu'il y a eu un lancer rouge et un lancer bleu, sans notion d'ordre, est la probabilité d'emprunter un chemin orange ($p_{D_1}(R\cap\overline{R})$, voir l'arbre pondéré ci-dessous), divisée par la probabilité de suivre un des quatre chemins colorés ($p(R \cap \overline{R})$). Les chemins concernés sont au nombre de quatre et non deux comme dans le premier cas : il y a en effet une seule façon d'obtenir deux fois une face rouge au cours de deux lancers, mais deux façons d'obtenir une face bleue et une face rouge en deux lancers.



Quatrième et dernier cas cas : deux lancers bleus

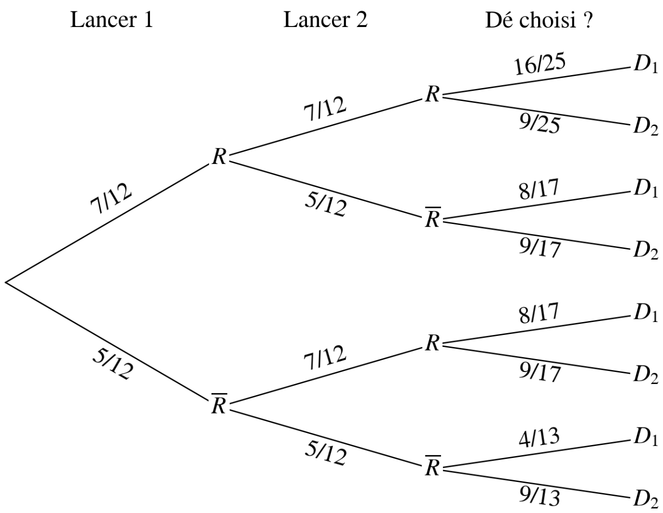
Selon le même raisonnement que dans le premier cas, mais en remplaçant les évènements R_1 et R_2 par $\overline{R_1}$ et $\overline{R_2}$, on a :

$$p_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2}}(D_1) = \frac{p(D_1 \cap \overline{R_1} \cap \overline{R_2})}{p(D_1 \cap \overline{R_1} \cap \overline{R_2}) + p(\overline{D_1} \cap \overline{R_1} \cap \overline{R_2})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}} = \frac{4}{13}$$

$$p_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2}}(\overline{D_1}) = 1 - p_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2}}(D_1) = \frac{9}{13}$$

Bilan :

Au terme de cette étude, on peut compléter l'arbre de début de section :



On a donc calculé la probablité que chaque dé ait été lancé en fonction de n'importe quels résultats obtenus lors de *un ou deux* lancers. Nous allons maintenant généraliser ce calcul à n'importe quel nombre de lancers.

1.3 Généralisation au n-ième lancer

Soit n, un entier naturel non nul, correspondant à un nombre de lancers effectués par le meneur du jeu et soit k, un entier naturel inférieur ou égal à n, indiquant le nombre de lancer où la couleur rouge a été annoncée au cours de ces n lancers.

Pour alléger les expressions, on notera kR à la place de $\bigcap_{i=1}^{k} R_i$ (R_i étant l'évènement "Le lancer n°i est rouge."), c'est-à-dire l'évènement : "La couleur rouge est apparue k fois". En effet, l'ordre d'apparition des couleurs n'ayant pas d'importance, on peut raisonner, dans les calculs, comme si les k lancers rouges étaient les k premiers lancers (1).

Montrons que pour tout n, la probabilité que le dé n°1 ait été choisi, sachant que la partie comprend k lancers rouges et $n-k$ lancers bleus, vaut :

$$\boxed{p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_1) = \frac{p_{D_1}(R)^k \times p_{D_1}(\overline{R})^{n-k}}{p_{D_1}(R)^k \times p_{D_1}(\overline{R})^{n-k} + p_{D_2}(R)^k \times p_{D_2}(\overline{R})^{n-k}}}$$

Démonstration. La probabilité que le dé n°1 ait été lancé, sachant que sur les n lancers, la couleur rouge est sortie k fois et la couleur bleue $(n-k)$ fois, est :

$$p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_1) = \frac{p(kR\cap(n-k)\overline{R}\cap D_1)}{p(kR\cap(n-k)\overline{R})} \tag{1}$$

Or :

$$p(kR\cap(n-k)\overline{R}\cap D_1) = p(D_1)\times p_{D_1}(kR\cap(n-k)\overline{R}) \tag{2}$$

Soit X_1 la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers rouges sur n lancers du dé n°1. Puisque les lancers sont identiques et indépendants, X_1 suit une loi binomiale de paramètres n et $p_{D_1}(R)$. On a alors :

$$p(D_1\cap kR\cap(n-k)\overline{R}) = p(D_1)\times p(X_1=k) = p(D_1)\times\binom{n}{k}\times p_{D_1}(R)^k\times(1-p_{D_1}(R))^{n-k} \tag{3}$$

Passons au dénominateur de la fraction dans l'équation (1). D_1 et $\overline{D_1}$ forment une partition de l'univers, donc d'après les probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(kR\cap(n-k)\overline{R}) &= p(D_1\cap kR\cap(n-k)\overline{R}) + p(\overline{D_1}\cap kR\cap(n-k)\overline{R}) \\ &= p(D_1)\times p_{D_1}(kR\cap(n-k)\overline{R}) + p(\overline{D_1})\times p_{\overline{D_1}}(kR\cap(n-k)\overline{R}) \end{aligned} \tag{4}$$

$p(D_1)$ est la probabilité que le dé n°1 soit choisi par le meneur du jeu. Comme on considère que le dé est choisi aléatoirement, $p(D_1) = p(\overline{D_1})$ soit $\frac{1}{2}$. On peut donc factoriser par $p(D_1)$ dans (4) :

$$p(kR\cap(n-k)\overline{R}) = p(D_1)\times\left(p_{D_1}\left(kR\cap(n-k)\overline{R}\right) + p_{D_2}\left(kR\cap(n-k)\overline{R}\right)\right) \tag{5}$$

On retrouve dans (5) l'expression $p_{D_1}(kR\cap(n-k)\overline{R})$ qui est présente au numérateur. Mais il faut lui sommer la probabilté d'obtenir k lancers rouges sachant que le dé n°2 est lancé : $p_{D_2}(kR\cap(n-k)\overline{R})$. Appelons X_2 la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers rouges sur n lancers du dé n°2. Cette variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres n et $p_{\overline{D_1}}(R)$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
p(kR\cap(n-k)\overline{R}) &= p(D_1)\times\left[p(X_1=k)+p(X_2=k)\right]\\
&= p(D_1)\times\left[\binom{n}{k}\times p_{D_1}(R)^k\times\left(1-p_{D_1}(R)\right)^{n-k}+\binom{n}{k}\times p_{\overline{D_1}}(R)^k\times\left(1-p_{\overline{D_1}}(R)\right)^{n-k}\right]\\
&= p(D_1)\times\binom{n}{k}\times\left[p_{D_1}(R)^k\times\left(1-p_{D_1}(R)\right)^{n-k}+p_{\overline{D_1}}(R)^k\times\left(1-p_{\overline{D_1}}(R)\right)^{n-k}\right]
\end{aligned}
$$

On retrouve bien la formule à démontrer, en remplaçant dans (1) les expressions précédentes et en simplifiant par $p(D_1)$ et $\binom{n}{k}$:

$$
p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_1)=\frac{p_{D_1}(R)^k\times p_{D_1}(\overline{R})^{n-k}}{p_{D_1}(R)^k\times p_{D_1}(\overline{R})^{n-k}+p_{D_2}(R)^k\times p_{D_2}(\overline{R})^{n-k}}
$$

□

Remarque : La simplification par $\binom{n}{k}$ dans la démonstration montre que l'ordre dans lequel les couleurs apparaissent n'a pas d'importance.

2 Généralisation à d dés, f faces et q couleurs

2.1 Généralisation à d dés

On se place dans un jeu comportant un nombre $d\in\mathbb{N}^*$ de dés cubiques équillibrés portant des faces rouges et bleues. Tous les dés sont différents, sinon toutes les configurations de dés n'auraient pas la même probabilité d'être piochées par le meneur du jeu. Soit D_y (y un entier naturel entre 1 et d compris) l'évènement : “Le dé n°y est lancé”. On a donc ici $p(D_y)=\frac{1}{d}$. La probabilité que le dé n°y ait été lancé, sachant kR, vaut :

$$
\boxed{p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_y)=\frac{p_{D_y}(R)^k\times p_{D_y}(\overline{R})^{n-k}}{\sum_{x=1}^{d}p_{D_x}(R)^k\times p_{D_x}(\overline{R})^{n-k}}}
$$

Démonstration. Nous avons :

$$
p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_y)=\frac{p\left(D_y\cap kR\cap(n-k)\overline{R}\right)}{p\left(kR\cap(n-k)\overline{R}\right)}
$$

Or, les évènements D_1, D_2, ..., D_y, ... et D_d forment une partition de l'univers (il y a d dés et un seul dé à la fois peut être lancé). Donc d'après les probabilités totales :

$$
p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_y)=\frac{p\left(D_y\cap kR\cap(n-k)\overline{R}\right)}{\sum_{x=1}^{d}p\left(D_x\cap kR\cap(n-k)\overline{R}\right)}
$$

Le reste (utilisation de la loi binomiale, puis simplifications), est similaire à la démonstration précédente. □

2.2 Généralisation à q couleurs

On se place dans un jeu comportant deux dés cubiques équillibrés dont les faces portent des couleurs parmi un nombre $q\in\mathbb{N}^*$ de couleurs. Il peut y avoir plus de six couleurs car les deux dés peuvent porter des couleurs différentes ; mais on ne considère pas plus de couleurs que les deux dés ne réunissent de faces, soit douze. On ne considère que des couleurs représentées sur au moins une face d'un des dés.

Remarque Le cas à douze couleurs n'est guère intéressant : un lancer permet de déterminer avec certitude quel dé a été choisi puisqu'ils n'ont aucune couleur en commun.

Soit Q_i l'évènement "Le lancer est de la couleur n°i", pour i variant de 1 à q (il y a q couleurs). Par exemple, on peut attribuer le n°1 à la couleur rouge, et le n°2 à la couleur bleue si on ces a deux couleurs. Bien sûr, un numéro correspond à une unique couleur qui le gardera tout au long des calculs. Soit k_i le nombre de lancers où la couleur n°i est apparue au cours de n lancers, avec $0 \leq k_i \leq n$.

Il vient que la probabilité que le dé n°1 ait été lancé sachant les couleurs apparues au cours des n lancers est donnée par la formule :

$$\boxed{p_{\bigcap\limits_{i=1}^{q} k_i Q_i}(D_1) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{q} p_{D_1}(Q_i)^{k_i}}{\prod\limits_{i=1}^{q} p_{D_1}(Q_i)^{k_i} + \prod\limits_{i=1}^{q} p_{D_2}(Q_i)^{k_i}}}$$

On peut généraliser cette formule à d dés :

$$\boxed{p_{\bigcap\limits_{i=1}^{q} k_i Q_i}(D_y) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{q} p_{D_y}(Q_i)^{k_i}}{\sum\limits_{x=1}^{d}\left(\prod\limits_{i=1}^{q} p_{D_x}(Q_i)^{k_i}\right)}}$$

2.3 Généralisation à f faces

On se place dans un jeu comportant deux dés cubiques équillibrés portant les couleurs rouge et bleu.

Dans l'équation $p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_1) = \frac{p_{D_1}(R)^k \times p_{D_1}(\overline{R})^{n-k}}{p_{D_1}(R)^k \times p_{D_1}(\overline{R})^{n-k} + p_{D_2}(R)^k \times p_{D_2}(\overline{R})^{n-k}}$, nous exprimerons $p_{D_1}(R)$ et $p_{D_2}(R)$ en fonction du nombre de faces rouges des dés. On peut s'aider pour cela d'un tableau de probabilités, comme celui p. 3. Soit r_1 le nombre de faces rouges du dé n°1 et r_2 le nombre de faces rouges du dé n°2 :

Faces	Rouges	Bleues	Total
Dé 1	r_1	$6-r_1$	6
Dé 2	r_2	$6-r_2$	6
Total	r_1+r_2	$12-r_1-r_2$	12

Donc :

- $p_{D_1}(R) = \frac{r_1}{6}$
- $p_{D_2}(R) = \frac{r_2}{6}$

On peut maintenant exprimer $p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_1)$ en fonction de r_1 et de r_2 :

$$\begin{aligned}
p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_1) &= \frac{p_{D_1}(R)^k \times p_{D_1}(\overline{R})^{n-k}}{p_{D_1}(R)^k \times p_{D_1}(\overline{R})^{n-k} + p_{D_2}(R)^k \times p_{D_2}(\overline{R})^{n-k}} \\
&= \frac{p_{D_1}(R)^k \times \left(1-p_{D_1}(R)\right)^{n-k}}{p_{D_1}(R)^k \times \left(1-p_{D_1}(R)\right)^{n-k} + p_{D_2}(R)^k \times \left(1-p_{D_2}(R)\right)^{n-k}} \\
&= \frac{(\frac{r_1}{6})^k \times \left(1-\frac{r_1}{6}\right)^{n-k}}{(\frac{r_1}{6})^k \times (1-\frac{r_1}{6})^{n-k} + (\frac{r_2}{6})^k \times \left(1-\frac{r_2}{6}\right)^{n-k}}
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que le nombre de faces de chaque dé ne soit pas 6 mais f (f un entier naturel supérieur ou égal à 3). Exprimons $p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_1)$ en fonction de r_1, r_2 et f :

Faces	Rouges	Bleues	Total
Dé n°1	r_1	$f - r_1$	f
Dé n°2	r_2	$f - r_2$	f
Total	$r_1 + r_2$	$2f - r_1 - r_2$	$2f$

$$\begin{aligned} p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_1) &= \frac{\left(\frac{r_1}{f}\right)^k \times \left(1-\frac{r_1}{f}\right)^{n-k}}{\left(\frac{r_1}{f}\right)^k \times \left(1-\frac{r_1}{f}\right)^{n-k} + \left(\frac{r_2}{f}\right)^k \times \left(1-\frac{r_2}{f}\right)^{n-k}} \\ &= \frac{\frac{r_1^k \times (f-r_1)^{n-k}}{f^n}}{\frac{r_1^k \times (f-r_1)^{n-k}}{f^n} + \frac{r_2^k \times (f-r_2)^{n-k}}{f^n}} \\ &= \frac{r_1^k \times (f-r_1)^{n-k}}{r_1^k \times (f-r_1)^{n-k} + r_2^k \times (f-r_2)^{n-k}} \end{aligned}$$

Il peut aussi arriver que les deux dés n'aient pas le même nombre de faces. Soit f_1 le nombre de faces du dé n°1 et f_2 le nombre de faces du dé n°2 (f_1 et f_2 deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 3). On peut exprimer $p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_1)$ en fonction de r_1, r_2, f_1 et f_2 :

Faces	Rouges	Bleues	Total
Dé n°1	r_1	$f_1 - r_1$	f_1
Dé n°2	r_2	$f_2 - r_2$	f_2
Total	$r_1 + r_2$	$f_1 + f_2 - r_1 - r_2$	$f_1 + f_2$

$$p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_1) = \frac{\left(\frac{r_1}{f_1}\right)^k \times \left(1-\frac{r_1}{f_1}\right)^{n-k}}{\left(\frac{r_1}{f_1}\right)^k \times \left(1-\frac{r_1}{f_1}\right)^{n-k} + \left(\frac{r_2}{f_2}\right)^k \times \left(1-\frac{r_2}{f_2}\right)^{n-k}}$$

2.4 Généralisation complète

Nous avons généralisé le calcul initial à d dés, q couleurs et f faces séparément. Nous allons maintenant réunir en une seule formule ces différentes généralisations. Pour cela, nous devons introduire quelques notations.

Soient d le nombre de dés et f_x le nombre de faces du dé n°x (avec x un entier naturel compris entre 1 et d inclus); soient q le nombre de couleurs et $c_{i,x}$ le nombre de faces de couleur n°i possédées par le dé n°x (i un entier compris entre 1 et q inclus). Soient enfin n le nombre de lancers de la partie et k_i le nombre de lancers de couleur n°i.

Exemple : Dans notre premier jeu à deux dés cubiques et deux couleurs (rouge et bleu), nous avions ainsi $d = q = 2$ et $f_1 = f_2 = 6$. Les évènements correspondant à l'apparition de chaque couleur n'avaient pas pour noms Q_1 et Q_2 mais R et $\overline{R}$: le dé n°1 avait $c_{R,1} = r_1$ faces rouges et $c_{\overline{R},1} = 6 - r_1$ faces bleues tandis que le dé n°2 avait $c_{R,2} = r_2$ faces rouges et $c_{\overline{R},2} = 6 - r_2$ faces bleues.

Etudions donc maintenant une situation avec d dés et q couleurs. Prenons un dé quelconque n°y parmi les d dés. Ce dé a $c_{i,y}$ faces de couleur n°i : $c_{1,y}$ faces de couleur n°1 (comme du rouge), $c_{2,y}$ faces de couleur n°2 (du bleu), $c_{3,y}$ faces de couleur n°3 (par exemple du vert, ou du jaune), et de même jusqu'à la couleur n°q qui a $c_{q,y}$ faces sur ce dé. En tout, le dé n°y a f_y faces avec :

$$f_y = \sum_{i=1}^{q} c_{i,y}$$

Il y a bien sûr d'autres dés. Le dé n°1 a $c_{i,1}$ faces d'une certaine couleur n°i, le dé n°2 en a $c_{i,2}$, jusqu'au dé n°d qui en a $c_{i,d}$. Sur l'ensemble des d dés, le nombre de faces de couleur n°i est donc :

$$\sum_{x=1}^{d} c_{i,x}$$

Maintenant, exprimons la probabilité que le dé n°y ait été lancé, sachant les résultats des n lancers de la partie : la couleur n°1 est apparue k_1 fois, la couleur n°2 est apparue k_2 fois, et ainsi de suite jusqu'à la couleur n°q apparue k_q fois. On note D_y l'évènement : "Le dé n°y a été lancé par le meneur du jeu".

$$p_{\bigcap\limits_{i=1}^{q} k_i Q_i}(D_y) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{q} \left(\frac{c_{i,y}}{f_y}\right)^{k_i}}{\sum\limits_{x=1}^{d} \prod\limits_{i=1}^{q} \left(\frac{c_{i,x}}{f_x}\right)^{k_i}} \qquad (2)$$

Application de la formule générale Reprenons notre situation initiale à deux dés ($d = 2$) de six faces, et deux couleurs ($q = 2$). En attribuant le numéro 1 à la couleur rouge, et 2 à bleu, on peut appliquer nos nouvelles notations à la situation :

Faces	Rouges	Bleues	Total
Dé 1	$c_{1,1} = 4$	$c_{2,1} = 2$	$f_1 = c_{1,1} + c_{2,1} = 6$
Dé 2	$c_{1,2} = 3$	$c_{2,2} = 3$	$f_2 = c_{1,2} + c_{2,2} = 6$
Total	$\sum\limits_{x=1}^{2} c_{1,x} = c_{1,1} + c_{1,2} = 7$	$\sum\limits_{x=1}^{2} c_{2,x} = c_{2,1} + c_{2,2} = 5$	$\sum\limits_{x=1}^{2} f_x = f_1 + f_2 = 12$

Mettons qu'avec deux lancers, on ait obtenu Rouge puis Bleu ($k_1 = k_2 = 1$). Appliquons la formule générale ci-dessus pour détérminer la probabilité que le dé n°1 ait été choisi. Appliquons donc la formule :

$$\begin{aligned} p_{\bigcap\limits_{i=1}^{2} k_i Q_i}(D_1) = p_{Q_1 \cap Q_2}(D_1) &= \frac{\prod\limits_{i=1}^{2} \left(\frac{c_{i,1}}{f_1}\right)^{k_i}}{\sum\limits_{x=1}^{2} \prod\limits_{i=1}^{2} \left(\frac{c_{i,x}}{f_x}\right)^{k_i}} \\ &= \frac{\frac{4}{6} \times \frac{2}{6}}{\frac{4}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}} \\ &= \frac{8}{17} \end{aligned}$$

On retrouve bien la probabilité calculée p.7.

3 Dés truqués

Jusqu'ici, nous avons considéré des dés équilibrés. Pour compliquer un peu le jeu, il peut être amusant d'utiliser des dés dont toutes les faces n'ont pas la même probabilité d'apparition.

On se place dans un jeu avec deux dés cubiques non équilibrés dont les faces sont rouges ou bleues.

Faces	Rouges	Bleues	Total
Dé 1	4	2	6
Dé 2	3	3	6
Total	7	5	12

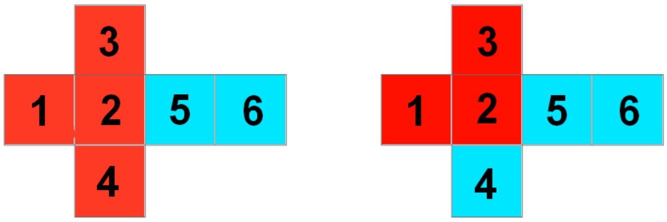


FIGURE 2 – Dé n°1 (gauche) et Dé n°2 (droite)

Soit A_α l'évènement : "la face n°α du dé lancé est apparue" avec $\alpha \in [\![1;6]\!]$. On peut imaginer que les faces du dé n°1 ont les probabilités d'apparition suivantes quand on le lance :

- Face 1 : $p_{D_1}(A_1) = \frac{1}{4}$
- Face 2 : $p_{D_1}(A_2) = \frac{1}{8}$
- Face 3 : $p_{D_1}(A_3) = \frac{1}{6}$
- Face 4 : $p_{D_1}(A_4) = \frac{1}{6}$
- Face 5 : $p_{D_1}(A_5) = \frac{1}{6}$
- Face 6 : $p_{D_1}(A_6) = \frac{1}{8}$

Toutes ses faces n'ont donc pas la même probabilité d'apparition mais on a bien :

$$\sum_{\alpha=1}^{6} p_{D_1}(A_\alpha) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

Désormais, la probabilité d'apparition d'une face rouge quand on lance le dé n°1 est la somme des probabilités d'apparition de ses faces rouges (et idem pour bleu) :

$$p_{D_1}(R) = \sum_{\alpha=1}^{4} p_{D_1}(A_\alpha) = p_{D_1}(A_1,) + p_{D_1}(A_2) + p_{D_1}(A_3) + p_{D_1}(A_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{17}{24}$$

et non $4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ comme lorsque le dé était équilibré.

Faisons de même avec le dé n°2 :

- Face 1 : $p_{D_2}(A_1) = \frac{1}{3}$
- Face 2 : $p_{D_2}(A_2) = \frac{1}{9}$
- Face 3 : $p_{D_2}(A_3) = \frac{1}{8}$
- Face 4 : $p_{D_2}(A_4) = \frac{1}{3}$
- Face 5 : $p_{D_2}(A_5) = \frac{1}{12}$
- Face 6 : $p_{D_2}(A_6) = \frac{1}{72}$

$$p_{D_2}(R) = \sum_{\alpha=1}^{3} p_{D_2}(A_\alpha) = p_{D_2}(A_1) + p_{D_2}(A_2) + p_{D_2}(A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{41}{72}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_1) &= \frac{p_{D_1}(R)^k \times p_{D_1}(\overline{R})^{n-k}}{p_{D_1}(R)^k \times p_{D_1}(\overline{R})^{n-k} + p_{D_2}(R)^k \times p_{D_2}(\overline{R})^{n-k}} \\ &= \frac{\left[\sum_{\alpha=1}^{4} p_{D_1}(A_\alpha)\right]^k \times \left[1 - \sum_{\alpha=1}^{4} p_{D_1}(A_\alpha)\right]^{n-k}}{\left[\sum_{\alpha=1}^{4} p_{D_1}(A_\alpha)\right]^k \times \left[1 - \sum_{\alpha=1}^{4} p_{D_1}(A_\alpha)\right]^{n-k} + \left[\sum_{\alpha=1}^{3} p_{D_1}(A_\alpha)\right]^k \times \left[1 - \sum_{\alpha=1}^{3} p_{D_1}(A_\alpha)\right]^{n-k}} \end{aligned}$$

Cette formule est valable grâce à la configuration des dés : pour le dé n°1 par exemple, les quatre premières faces sont rouges et les deux dernières sont bleues. Mais dans le cas où faces rouges et bleues sont séparées (la face n°1 est rouge, la deuxième et la troisième bleues, la quatrième rouge, etc.), l'expression $\sum_{\alpha=1}^{4} p_{D_1}(A_\alpha)$ n'est plus utilisable.

Soit donc $E_{i,x}$ l'ensemble des faces (ou numéros de faces) de couleur i sur le dé n°x. On peut remplacer $\sum_{\alpha=1}^{4} p_{D_1}(A_\alpha)$ par $\sum_{\alpha\in E_{1,1}} p_{D_1}(A_\alpha)$ avec $E_{1,1}=\{1,2,3,4\}$ l'ensemble des faces rouges du dé n°1.

On obtient donc :

$$p_{\bigcap_{i=1}^{q} k_i Q_i}(D_y) = \frac{\prod_{i=1}^{q}[\sum_{\alpha\in E_{y,i}} p_{D_1}(A_\alpha)]^{k_i}}{\sum_{x=1}^{d}\left(\prod_{i=1}^{q}[\sum_{\alpha\in E_{x,i}} p_{D_1}(A_\alpha)]^{k_i}\right)}$$

4 Programmation en Python des calculs

4.1 Premier programme

Au cours d'une partie, on doit être capable de trouver rapidement les probabilités voulues. Une programmation Python s'impose donc pour calculer la probabilité qu'un dé ait été choisi en fonction de la configuration de chaque dé et des résultats de la partie. Voici un premier programme qui demande, à chaque lancer les données de la partie (nombre de dés, de couleurs, de faces de chaque couleur de chaque dé, nombre de lancers et nombre d'apparitions de chaque couleur) pour calculer la probabilité qu'un dé, désigné par le joueur au programme, ait été lancé :

```python
#Nombre de dés : d
d=int(input("Nombre de dés :"))

#Nombre de faces de chaque dé : f[dé]
f=[0]
for dé in range(1,d+1):
    f.append(int(input("Nombre de faces du dé n°{}:".format(dé))))

#Nombre total de couleurs représentées sur l'ensemble des d dés : q
q=int(input("Nombre total de couleurs :"))

#Nombre de faces de chaque couleur pour chaque dé : on utilise une liste de listes
Dés=[0] #première liste : une case pour chaque dé
for dé in range(1,d+1):
    Q=[] #seconde liste : nombre de faces de chaque couleur sur le dé correspondant
         # dans la première liste
    for couleur in range(1,q+1):
        c=int(input("Nombre de faces de la couleur n°{} sur le dé n°{}:".format(couleur,dé)))
        Q.append(c)
    Dés.append(Q)

#Nombre d'apparition de chaque couleur : k[couleur]
k=[]
for couleur in range(1,q+1):
    k.append(int(input("Nombre de lancers de la couleur {}:".format(couleur))))

#A ce stade, toutes les données nécéssaires au programme ont été entrées
# par l'utilisateur.

```

```
def chemin(dé):
    produit=1
    for couleur in range(q):
        produit*=(Dés[dé][couleur]/f[dé])**k[couleur]
    return(produit)

#Probabilité que le dé n°y ait été choisi
y=int(input("Numéro du dé supposé choisi:"))
Numérateur=chemin(y)
Dénominateur=0
for dé in range(1,d+1):
    Dénominateur+=chemin(dé)
Proba=Numérateur/Dénominateur
print("Probabilité que le dé n°{} ait été lancé :".format(y),Proba)
```

Ainsi, si on rentre dans l'ordre : 2, 6, 6, 2, 4, 2, 3, 3, 1 et 1, le programme retourne : "Probabilité que le dé n°1 ait été lancé : 0.47058823529411764" qui correspond bien à $\frac{8}{17}$.

4.2 Récurrence

Au cours de la partie, calculer après chaque lancer la probabilité que tel dé ait été choisi d'après les données de toute la partie est assez lent. Sur le premier programme, cela nécessite en effet de rentrer après chaque lancer le nombre de dés, de couleurs, la configuration des dés, et le nombre de lancers rouges et bleus.

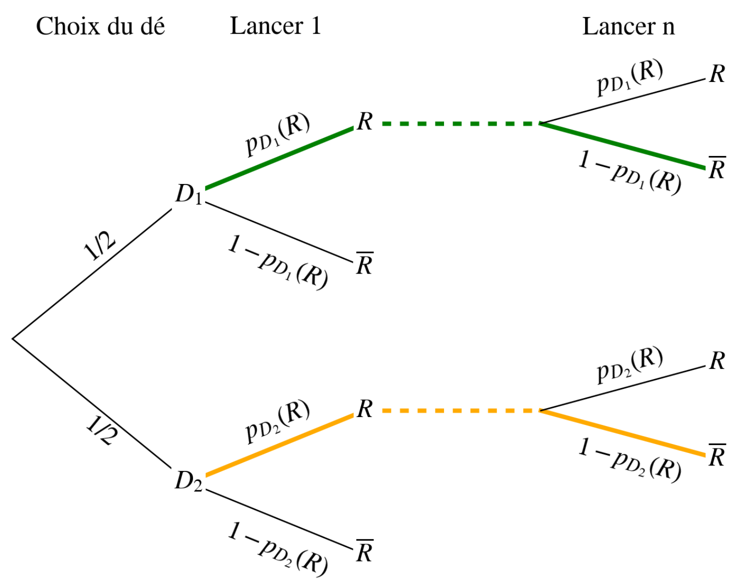
Il serait plus intéressant de pouvoir calculer la probabilité qu'un certain dé ait été lancé, au n-ième lancer, en fonction de la probabilité calculée au $(n-1)$-ème lancer, et en fonction du résultat du n-ième lancer. Il s'agit donc d'établir une relation de récurrence.

Reprenons un jeu à deux dés et deux couleurs (dont l'une est le rouge). D_1 et D_2 sont toujours les évènements : "Le dé n°1 a été lancé" et "Le dé n°2 a été lancé". R est l'évènement : "La couleur rouge apparaît" tandis que $\overline{R}$ correspond à l'apparition de l'autre couleur.

On introduit trois suites définies sur $\mathbb{N}^*$:

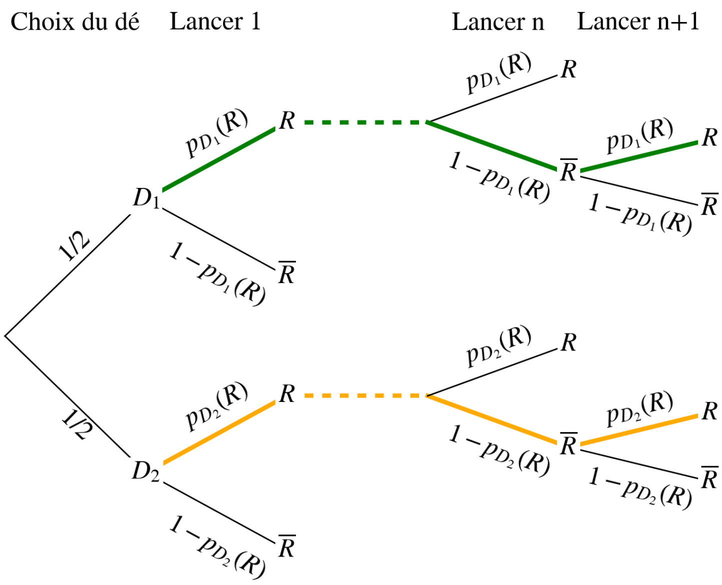
— Soit (l_n) une suite d'évènements : l_n désigne la couleur du lancer n. Par exemple, si au premier lancer, la couleur rouge sort, $l_1 = R$.
— Soit (u_n) : $u_n = p_{D_1}(\bigcap_{k=1}^{n} l_k)$
— Soit (v_n) : $v_n = p_{D_2}(\bigcap_{k=1}^{n} l_k)$

Voici en exemple le schéma du déroulé d'une partie :



Le rouge sort au premier lancer et le bleu sort au dernier lancer. Les pointillés représentent les couleurs sorties lors des lancers intermédiaires. u_n correspond ainsi à la probabilité que le chemin vert soit suivi sachant que le dé n°1 est lancé. v_n correspond à la probabilité que le chemin orange soit suivi sachant que le dé n°2 est lancé. (L'arbre n'est pas représenté en entier.)

Lançons une $(n+1)$-ième fois le dé choisi et imaginons que le rouge sorte. On obtient le schéma suivant :



On a donc :

$$u_{n+1} = u_n \times p_{D_1}(l_{n+1})$$
$$v_{n+1} = v_n \times p_{D_2}(l_{n+1})$$

Comme :

$$p_{kR\cap(n-k)\overline{R}}(D_1) = \frac{p_{D_1}(R)^k \times p_{D_1}(\overline{R})^{n-k}}{p_{D_1}(R)^k \times p_{D_1}(\overline{R})^{n-k} + p_{D_2}(R)^k \times p_{D_2}(\overline{R})^{n-k}}$$
$$u_n = p_{D_1}(R)^k \times p_{D_1}(\overline{R})^{n-k}$$

$$v_n = p_{D_2}(R)^k \times p_{D_2}(\overline{R})^{n-k}$$

On trouve que :

$$p_{\bigcap_{k=1}^{n} l_k}(D_1) = \frac{u_n}{u_n + v_n} = \frac{u_{n-1} \times p_{D_1}(l_n)}{u_{n-1} \times p_{D_1}(l_n) + v_{n-1} \times p_{D_2}(l_n)}$$

Le nouvel algoritme a donc seulement à mémoriser u_n et v_n pour calculer $p_{\bigcap_{k=1}^{n+1} l_k}(D_1)$.

```
#Nombre de dés : d
d=int(input("Nombre de dés :"))
#Nombre de faces de chaque dé : f[dé]
f=[]
for dé in range(1,d+1):
    f.append(int(input("Nombre de faces du dé n°{}:".format(dé))))

#Nombre total de couleurs représentées sur l'ensemble des d dés : q
q=int(input("Nombre total de couleurs :"))

#Nombre de faces de chaque couleur pour chaque dé : on utilise une liste de listes
Dés=[] #liste de dés
for dé in range(1,d+1):
    Q=[] #liste du nombre de faces de chaque couleur
    for couleur in range(1,q+1):
        c=int(input("Nombre de faces de la couleur n°{} sur le dé n°{}:".format(couleur,dé)))
        Q.append(c)
    Dés.append(Q)

#A ce stade, toutes les données nécéssaires au programme ont été entrées par l'utilisateur.
#Par rapport au premier programme, la section 'nombre d'apparition
# de chaque couleur k[couleur]' a disparu.

u=[1]*d # il n'y a pas de suites (u) et (v) mais une liste où le dernier terme des suites
# exposées précédemment est retenu (il peut y avoir plus de 2 dés).
PartieFinie=False
#Après chaque lancer, le joueur devra indiquer au programme si la partie se poursuit.
while not PartieFinie:
    couleurLancer=int(input("Numéro de la couleur sortie au dernier lancer :"))
     #correspond à la suite (l)
    dénominateur=0 #Le dénominateur doit être recalculé à chaque lancer.
    for dé in range(d):
        u[dé]*=Dés[dé][couleurLancer-1]/f[dé]
        dénominateur+=u[dé]
    #Probabilité que le dé n°y ait été choisi
    y=int(input("Numéro du dé supposé choisi:"))
    proba=u[y-1]/dénominateur
    print("Probabilité que le dé n°{} ait été choisi :".format(y),proba)
    Fin=input("Partie finie ? Répondre 'oui' ou 'non'.")
    if Fin=='oui':
        PartieFinie=True
    else:
        PartieFinie=False
```

Quatrième partie

Évolution, au cours d'une partie, des probabilités calculées

1 Expériences et observation de courbes

Mettons en application les formules et les programmes exposés précédemment lors d'une partie, et voyons comment s'aider des probabilités.

Plutôt que de lancer manuellement des centaines de fois un dé pour calculer les probabilités que chaque dé ait été lancé à partir des couleurs apparues, un programme Python peut le faire! Il est ainsi plus aisé et plus rapide de faire un grand nombre d'essais. Or, les probabilités deviennent plus intéressantes quand les expériences sont beaucoup répétées, grâce à la loi des grands nombres.

Le programme Python en question choisit un dé aléatoirement (ligne 16 du programme). Puis il simule un certain nombre de lancers (lignes 18 à 36); la fréquence d'apparition de chaque couleur tient compte de la configuration de dé lancé virtuellement, c'est-à-dire des probabilités de sortie de chaque couleur quand on lance ce dé. À chaque lancer, la probabilité que chaque dé soit celui lancé est calculée. Le programme utilise la récurrence comme le précédent. Toutes les probabilités sont enfin affichées dans un graphique grâce aux lignes 38 à 51 du programme.

```
1  from random import *
2  from pylab import *
3
4  #Nombre de dés : d
5  d=2
6  #Nombre de faces de chaque dé : f[dé]
7  f=[6,6]
8
9  #Nombre total de couleurs représentées sur l'ensemble des d dés : q
10 q=2
11 #Nombre de faces de chaque couleur pour chaque dé : on utilise une liste de listes
12 Dés=[[4,2],[3,3]] #liste de dés
13
14 #Choix aléatoire du numéro du dé lancé
15 #(non affiché, à moins de vouloir vérifier les résultats ultérieurement)
16 D=randint(0,d-1)
17
18 u=[1]*d
19 Probas=[[],[]]
20 for i in range(100): #100 lancers
21     #Simulation du résultat du lancer (dépend de D)
22     k=random()
23     borne=0
24     couleurLancer=0
25     for i in range(q):
26         if borne<=k<=borne+Dés[D][i]/f[D] :
27             couleurLancer=i
28         borne+=Dés[D][i]/f[D]
29     #Calcul des probabilités
30     dénominateur=0
31     for dé in range(d): #Calcul du dénominateur commun à toutes les probas
32         u[dé]*=Dés[dé][couleurLancer]/f[dé]
33         dénominateur+=u[dé]
34     for dé in range(d): #Calcul de la probabilité inversée de chaque dé
35         proba=u[dé]/dénominateur
36         Probas[dé].append(proba)
37
```

```
#Tracé des courbes
Probas=array(Probas)
x=array([lancer for lancer in range(1,101)])
y1=Probas[0][x-1]
y2=Probas[1][x-1]
plot(x,y1, ".-", color = 'orange', label="Dé n°1")
plot(x,y2, ".-", color = 'green', label="Dé n°2")

xlabel("Numéro du lancer")
ylabel("Probabilité")
legend()
title("Evolution des probabilités inversées")
grid()
show()

```

Voici quelques graphiques obtenus en lançant le programme (3) :

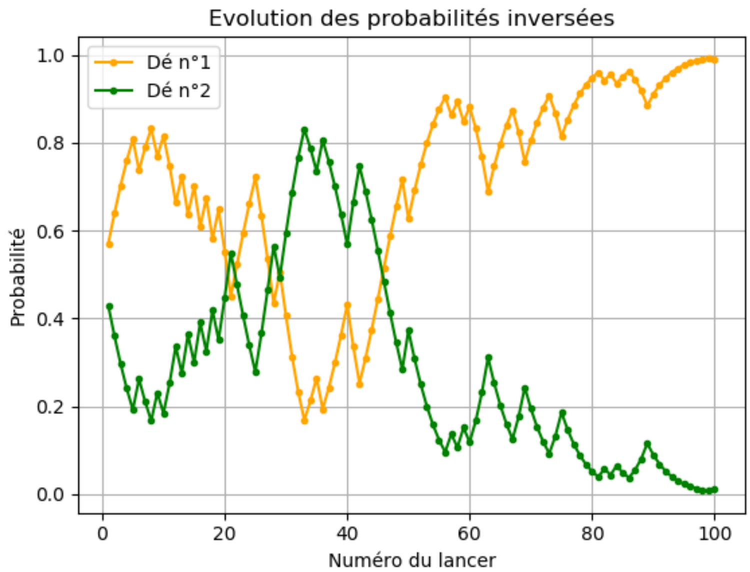


FIGURE 3 – Graphique 1

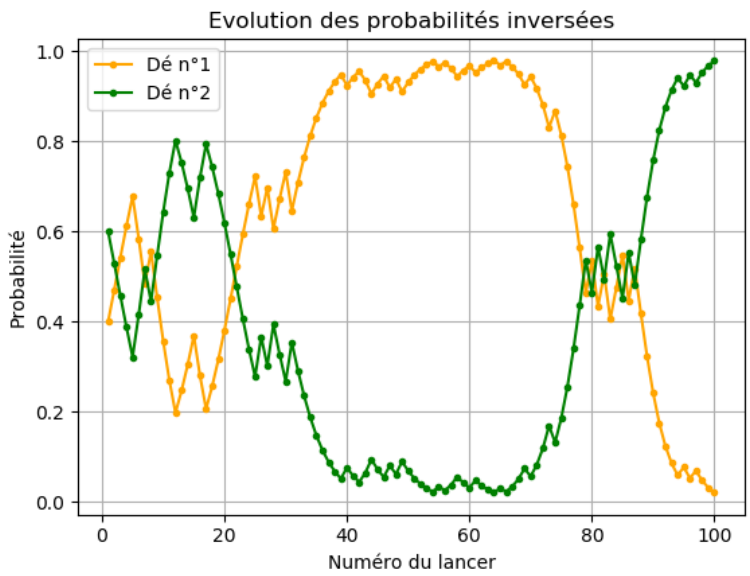


FIGURE 4 – Graphique 2

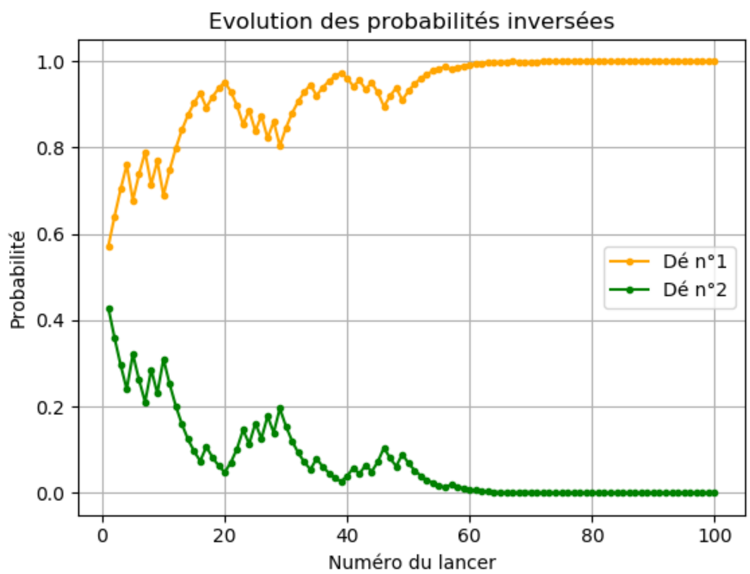


FIGURE 5 – Graphique 3

Sur la majorité des graphiques obtenus, les probabilités s'approchent des extrêmes 1 et 0 à partir d'une cinquantaine de lancers. C'est notamment le cas des graphiques 1 et 3, le 2 s'éloignant un peu plus des résultats habituels. Avant le cinquantième lancer, on observe souvent de nombreux pics sur les courbes, qui ne sont pas stables.

D'après la loi des grands nombres, la probabilité que le dé lancé, soit lancé, devrait tendre vers 1 tandis que celle des autres dés devrait tendre vers 0 après un grand nombre de lancers, la fréquence d'apparition de chaque couleur devant tendre vers la fréquence de possession de chaque couleur par le dé lancé. Au bout d'une cinquantaine de lancers, il semble que les probabilités se stabilisent vers les extrêmes (on peut lancer le programme un grand nombre de fois pour vérifier). Malgré tout, le graphique n°2 montre que rien n'est sûr.

2 Au bout de combien de lancers un joueur doit-il se prononcer? ou Utilisation des intervalles de confiance

Il est évident qu'un joueur se prononcera pour le dé dont la probabilité d'avoir été lancé est la plus élevée. D'après les courbes de la section précédente, un joueur devrait se prononcer au bout d'une cinquantaine de lancers, quand on peut être à peu près sûr que le dé ainsi désigné par les probabilités soit bien le dé lancé : en effet, cette probabilité atteint alors des valeurs élevées supérieurs à 90%; il n'y a donc que 10% de chances de se tromper. Avant le cinquantième lancer, les probabilités semblent instables; ainsi, sur le premier graphique p.20, la courbe orange est au-dessus de la bleue jusqu'au vingtième lancer avant de passer en-dessous : le dé désigné était plutôt le dé n°2 jusqu'au vingtième lancer mais il est finalement presque certain (à plus de 95%) que ce soit le dé n°1 qui ait été lancé.

Cependant, lors des parties que nous avons faites, les joueurs se prononcent très rapidement, avant le cinquantième lancer. En effet, les erreurs n'étaient pas si fréquentes et chacun veut répondre avant l'autre. Intuitivement, quand il y a par exemple plus de lancers bleus que de rouges, les joueurs se prononcent pour le dé comportant le plus de faces bleues.

Pour savoir à quel moment il est préférable de se décider, nous utiliserons les intervalles de confiance. Nous ne reprendrons pas les probabilités calculées dans la partie précédente.

Reprenons un jeu avec un dé n°1 à quatre faces rouges et deux faces bleus, et un dé n°2 comportant trois faces rouges et trois faces bleues.

Lançons le dé n°1 n fois ($n \geq 30$). On a 95% de chances que la fréquence du nombre de lancers rouges soit dans l'intervalle :

$$I_1 = \left[\frac{4}{6} - \frac{1}{\sqrt{n}}; \frac{4}{6} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Si on lance le dé n°2 n fois ($n \geq 30$), on a 95% de chances que la fréquence du nombre de lancers rouges soit dans l'intervalle :

$$I_2 = \left[\frac{3}{6} - \frac{1}{\sqrt{n}}; \frac{3}{6} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Il suffit d'observer vers quel intervalle tend la fréquence en lancers rouges pour en déduire le dé lancé, avec néanmoins un risque toujours présent (4) .

Quand il y a plus de deux couleurs, la démarche peut être reprise pour chaque couleur; puis les résultats peuvent être comparés pour effectuer le choix.

Cette stratégie peut permettre de ne pas attendre trop longtemps tout en demeurant prudent.

Cinquième partie
Conclusion

En conclusion, il est appréciable de voir qu'on est en mesure de quantifier les probabilités avec précision dans toutes les situations. Pour autant, il apparaît que la prise de décision est conditionnée au gain potentiel si on ajoute des points, voire une récompense financière, à chaque partie jouée. De plus, ce travail avec tous ces résultats obtenus, peut être transposable à d'autres domaines où l'équilibre prise de risque/gain est à prendre en considération et permettra d'éclairer le décideur dans la stratégie à priviligier.

Au cours de nos travaux, nous avons aimé manipuler des formules et les faire évoluer, en créant au besoin des notations. Leur programmation avec Python a aussi été très amusante et utile pour visualiser les résultats d'un grand nombre de lancers et mesurer l'aide apportée par les formules. Celles-ci sont finalement peu utilisées dans une véritable partie, les joueurs se fiant à leur instinct.

Nous remercions grandement nos professeurs de mathématiques Nathalie Herminier, Olivier Créchet et Guillaume Pelletier, ainsi que le chercheur Benjamin Nguyen pour leur aide cette année.

Une vidéo résumant notre travail est également disponible à
https://www.youtube.com/watch?v=qy65v3X44o4

Notes d'édition

(1) Il est important de préciser que kR est l'événement "la couleur rouge est apparue *au moins* k fois". Par conséquent, $kR \cap (n-k)\overline{R}$ est l'événement "la couleur rouge est apparue exactement k fois". Il est inexact en revanche de dire que kR est la même chose que $\bigcap_{i=1}^{k} R_i$ (événement "les k premiers lancers sont rouge") car par cohérence $(n-k)\overline{R}$ serait l'événement "les $n-k$ premiers lancers sont bleus" et l'intersection précédente serait vide.

Les auteurs expliquent ici que l'ordre des lancers n'influe pas le calcul, c'est-à-dire que toute séquence avec exactement k lancers rouges a la même probabilité, qui est donc celle de l'événement particulier "les k premiers lancers sont rouges et tous les autres sont bleus". Ceci se déduit de l'indépendance des lancers qui permet de calculer la probabilité de la séquence comme produit des probabilités de chaque lancer. On peut dès lors réorganiser ce produit pour regrouper les k probabilités du lancer rouge en début et les $(n-k)$ probabilités du lancer bleu à la fin.

(2) On pourra également remarquer que dans le cas où le dé D_y n'a pas de face de la couleur Q_i alors $c_{i,y} = 0$ et la probabilité que D_y ait été choisi est bien nulle.

(3) La configuration utilisée pour produire ces graphiques reprend le premier cas exposé dans l'article (voir Figure 1). Les détails sont donnés en lignes 4 à 15 du programme python ci-dessus.

(4) Un exercice intéressant est de se demander à partir de quelle valeur de n les deux intervalles cessent de se chevaucher. Cela motivera peut-être le lecteur à reprendre le code inséré dans l'article et étendre un peu les graphiques 1 à 3.