Calculs d'aire sur papier quadrillé

Année 2020-2021

Élèves : COLIN Agathe, CORNURICHARD Louis, GARNAULT Chléa, GUERIN Manon, OZCELIK Semih, PETIT Alice, POETTE Andy, RABY Cassandra

Enseignante : Marie-Noëlle Sassiat

Chercheur : Gwénaël Massuyeau (Université de Bourgogne)

Établissement : Lycée Catherine et Raymond Janot, Sens

I. Introduction.

Cette année (2020-2021), Gwenaël Massuyeau, mathématicien chercheur à l'université de Bourgogne, nous a proposé de répondre à un problème qu'il a créé dans le cadre de MATh.en.JEANS. Le problème est à propos du calcul d'aire sur papier quadrillé.

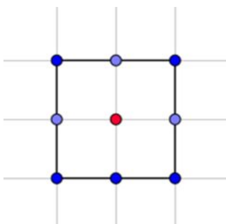
On considère un quadrillage du plan et une région polygonale P dont les sommets sont des points du quadrillage. On compte le nombre de points i du quadrillage situés à l'intérieur de P, le nombre de points *b* du quadrillage situés sur le bord de P et on calcule l'aire A de P.

Plusieurs questions étaient proposées et nous allons rendre compte de nos recherches ci dessous.

Premièrement, nous allons conjecturer une formule qui relie les trois quantités définies dans le sujet. Puis, nous allons démontrer la formule conjecturée précédemment et ensuite adapter cette formule à des polygones composées de plusieurs polygones simples. Finalement, nous allons nous poser la question de l'existence d'un triangle équilatéral dont les sommets appartiennent aux points du quadrillage.

II. Relier les variables.

- Définitions

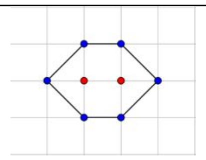
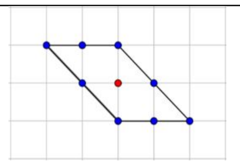
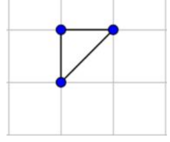
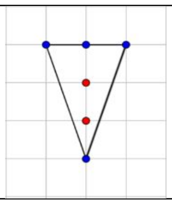
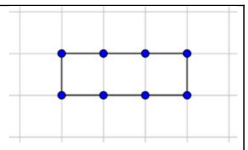


P est défini comme étant la région polygonale. Dans nos exemples, nous avons surtout utilisé des rectangles et des carrés dont les 4 côtés sont parallèles aux axes et des triangles dont au moins un côté est parallèle à un axe. La variable i correspond à tous les points du quadrillage situés à l'intérieur de P, tandis que b correspond aux points situés sur le bord de P. A est égale à l'aire de P.

Nous avons choisi comme unité le carreau.
Sur ce carreau, 4 points sont situés sur le bord (donc b = 4), aucun point n'est à l'intérieur (i = 0), et l'aire vaut $A = 1$.

- Première approche

Pour mieux visualiser le problème, nous avons décidé de représenter plusieurs figures afin de comparer les différentes valeurs des variables.

Figures					
Noms	GANON	GASPARD	MARLO	TURBO	MARCELLE
A	4	4	1/2	3	3
b	6	8	3	4	8
i	2	1	0	2	0

- Autre approche.

Comme nous étions séparés en deux groupes, deux approches se sont dégagées. L'approche choisie par le 2ème groupe était basée sur des carrés. Ils ont donc démontré la formule sur les carrés tout de suite.

Les deux groupes ont donc trouvé la formule de manière différente mais tous deux ont trouvé $b=2A-2i+2$.

III. Démonstration

- Comment démontrer ?

Nous nous sommes posé la question de comment démontrer notre formule. Nous avons d'abord pensé à des manières de démontrer vues en cours, mais nous n'avons pas réussi à trouver une solution à notre problème. Le chercheur est alors intervenu pour nous proposer une piste de réflexion.

- Piste de réflexion

Comme nous ne pouvions pas démontrer la formule en général, le chercheur nous a proposé de démontrer la formule pour certaines formes particulières avec dans l'idée que, en combinant les formules, cela nous permettrait d'adapter nos formules à n'importe quel polygone.

- Formules et Démonstration

Pour les carrés (1) :

Nous avons d'abord décidé de démontrer notre formule avec un carré. Nous avons posé n comme les points compris sur un côté du carré.
Nous sommes partis des formules de l'aire et du périmètre du carré en plaçant n dans les formules.

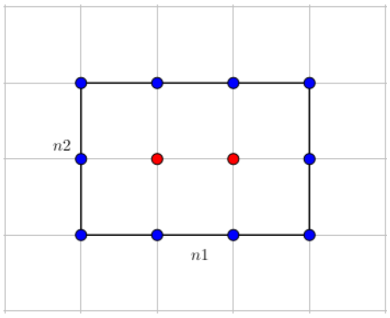
$$\begin{aligned} A &= (n-1)^2 \\ b &= 4n-4 \\ i &= (n-2)^2 \end{aligned}$$

On veut démontrer que notre formule fonctionne, et donc que $2A-2i+2-b=0$.
On remplace les variables par les formules que nous avons trouvé pour le carré :

$$\begin{aligned} 2A-2i+2-b &= 2(n-1)^2-2(n-2)^2+2-(4n-4) \\ &= 2(n^2-2n+1)-2(n^2-4n+4)+2-4n+4 \\ &= 2n^2-4n+2-2n^2+8n-8+2-4n+4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pour les rectangles :

On reprend la variable n, mais avec n_1 et n_2 comme deux côtés consécutifs d'un rectangle, parallèles aux axes.



On souhaite maintenant vérifier notre formule $2A-2i+2-b=0.$, de la même façon qu'avec les carrés, mais avec les formules des variables du rectangle :

$$\begin{aligned} A &= (n_1-1)(n_2-1) \\ b &= 2n_1+2n_2-4 \\ i &= (n_1-2)(n_2-2) \end{aligned}$$

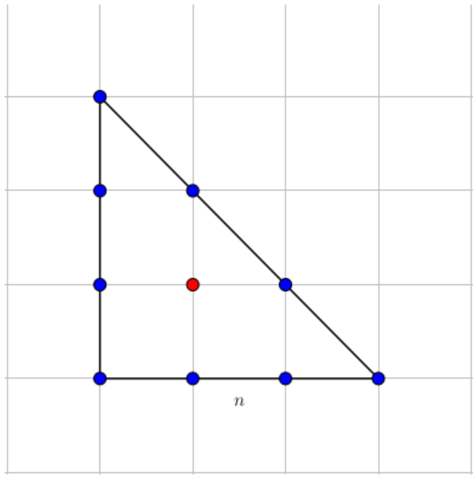
$$\begin{aligned} 2A-2i+2-b &= 2(n_1-1)(n_2-1)-2(n_1-2)(n_2-2)+2-(2n_1+2n_2-4) \\ &= 2(n_1n_2-n_1-n_2+1)-2(n_1n_2-2n_2-2n_1+4)+2-2n_1-2n_2+4 \\ &= 2n_1n_2-2n_1-2n_2+2-2n_1n_2+4n_2+4n_1+2-2n_1-2n_2+4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc l'égalité est vérifiée pour tous les rectangles.

Pour les triangles rectangles isocèles :

Nous posons n comme le nombre de points sur un des côtés parallèles aux axes, et nous vérifions la formule avec les variables adaptées comme précédemment.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(n-1)^2}{2} \\ b &= 3n-3 \\ i &= \frac{(n-2)^2-(n-2)}{2} \end{aligned}$$

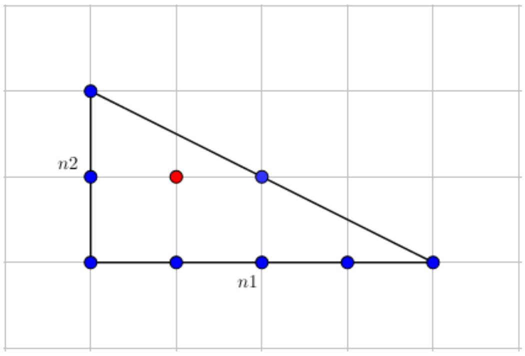


$$\begin{aligned} 2A-2i+2-b &= 2\frac{(n-1)^2}{2}-2\frac{(n-2)^2-(n-2)}{2}+2-(3n-3) \\ &= 2\frac{n^2-2n+1}{2}-2\frac{n^2-4n+4-n+2}{2}+2-3n+3 \\ &= 2\left(\frac{n^2}{2}-n+\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{n^2}{2}-2n+2-\frac{n}{2}+1\right)+5-3n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pour les triangles rectangles :

Pour les triangles rectangles quelconques, nous avons rencontré quelques problèmes à cause de l'hypoténuse. En effet, l'hypoténuse comprend parfois des points de son bord (b) mais parfois non. Nous avons donc décidé de poser x comme le nombre de points sur l'hypoténuse (2).

$$\begin{aligned} A &= \frac{(n_1-1)(n_2-1)}{2} \\ b &= \frac{2n_1+2n_2-4+2x-2}{2} \\ i &= \frac{(n_1-2)(n_2-2)-(x-2)}{2} \end{aligned}$$



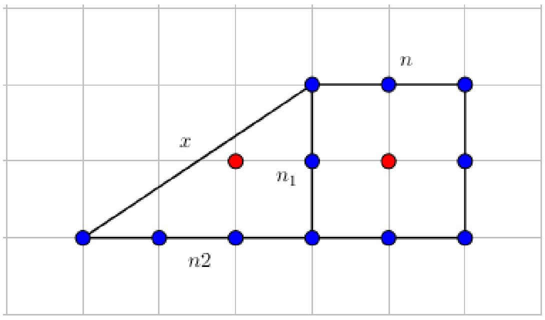
Pour trouver i, nous avons pris la formule des points intérieurs d'un rectangle, $i=(n_1-2)(n_2-2)$, puis nous l'avons divisée par 2 pour pouvoir l'appliquer à un triangle rectangle. Nous avons ensuite retiré les points de l'hypoténuse qui, quand on coupe un rectangle en deux, deviennent des points sur le bord du triangle.

$$\begin{aligned}2A-2i+2-b &= 2\frac{(n_1-1)(n_2-1)}{2}-2\frac{(n_1-2)(n_2-2)-(x-2)}{2}+2-\frac{2n_1+2n_2-4+2x-2}{2}\\ &= 2\frac{n_1n_2-n_1-n_2+1}{2}-2\frac{n_1n_2-2n_1-2n_2+4-x+2}{2}+2-\frac{2n_1+2n_2-4+2x-2}{2}\\ &= n_1n_2-n_1-n_2+1-n_1n_2-2n_1-2n_2+4-x+2+2-(n_1+n_2-2+x-1)\\ &= n_1n_2-n_1-n_2+1-n_1n_2-2n_1-2n_2+4-x+2+2-n_1-n_2+2-x+1\\ &= 0\end{aligned}$$

IV. Assemblage

Nous avons ensuite essayé d'assembler plusieurs formules entre elles.
Nous avons additionné les formules que nous avions trouvé au préalable, en enlevant les points qui étaient comptés 2 fois sur le bord commun.

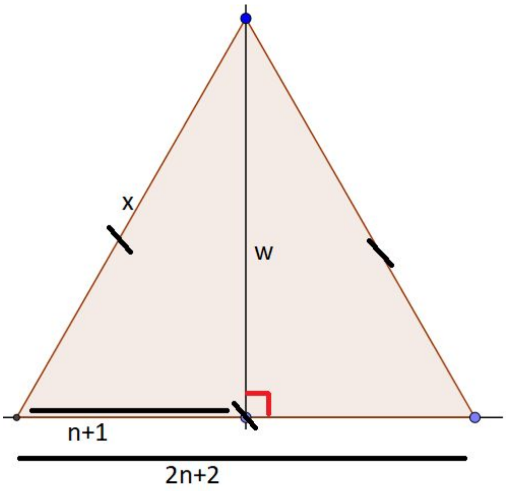
$$\begin{aligned}A &= \frac{(n_1-1)(n_2-1)}{2}+(n-1)^2\\ b &= \frac{2n_1+2n_2-4+2x-2}{2}+(4n-4)-2n+2\\ i &= \frac{(n_1-2)(n_2-2)}{2}+(n-2)^2+n-2\end{aligned}$$ (3)



Ces recherches n'ont pas complètement abouti, du fait des demi-groupes et des raisons sanitaires.

V. Limite de la formule pour les triangles équilatéraux

On se pose maintenant la question s'il est possible ou non qu'un triangle équilatéral ait ses trois sommets sur des points du quadrillage.
Pour cela, nous avons utilisé le théorème de Pythagore pour calculer la hauteur de ce triangle. Cette longueur (w) doit être un nombre entier puisque l'unité est le carreau.
On choisit de travailler dans un triangle rectangle, qui est la moitié du triangle équilatéral.
On raisonne par l'absurde.
On exprime w en fonction de x (l'hypoténuse), et $n+1$ (le nombre de points sur le côté adjacent moins 1)



D'après le théorème de Pythagore, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse au carré est égale à la somme des carrés des deux autres côtés :

$$w=\sqrt{x^2-(n+1)^2}$$

On pose $x=2n+2$

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{(2n+2)^2-(n+1)^2} \\ &= \sqrt{4n^2+8n+4-n^2-2n-1} \\ &= \sqrt{3n^2+6n+3} \\ &= \sqrt{3(n^2+2n+1)} \\ &= \sqrt{3}(n+1) \end{aligned}$$

Conclusion :

$\sqrt{3}$ n'est pas un entier donc w n'est pas un entier non plus (4). Il n'existe donc pas de triangle équilatéral, dont les sommets sont sur des points du quadrillage, et avec un côté parallèle aux axes.

VI. Bilan

Malgré les conditions sanitaires, nous avons beaucoup apprécié travailler ensemble sur ce sujet. Cet atelier nous a permis d'apprendre à réfléchir autrement, en sortant du cadre des cours pour réfléchir à un problème différent, mais aussi de travailler en équipe. Nous avons également appris à expliquer et présenter nos recherches à un œil extérieur.

Finalement, ce fut une très bonne expérience très enrichissante que nous recommencerions sans hésiter !

Notes d'édition.

(1) Il s'agit seulement des carrés dont les côtés sont portés par des lignes du quadrillage. De même pour les rectangles un peu plus loin et pour les triangles rectangles, isocèles ou non isocèles, il s'agit de ceux dont les côtés de l'angle droit sont sur des lignes du quadrillage.
(2) Ce nombre x de points du quadrillage sur l'hypoténuse comprend les extrémités. Les x-2 autres points sont intérieurs au rectangle obtenu en juxtaposant un triangle symétrique par rapport au milieu de l'hypoténuse.
Le calcul de b peut se justifier de même que celui de i en considérant ces deux triangles.
(3) Ici, d'après la figure le polygone de droite est un carré, donc $n_1=n$, ce qui justifie aussi les calculs : les aires s'ajoutent ; les points du bord et les points intérieurs s'ajoutent avec des corrections analogues à celles faites pour le triangle rectangle.
(4) Plus précisément, w ne peut pas être un entier parce que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel : s'il existait un entier $n\geq 0$ tel que $\sqrt{3}(n+1)$ soit un entier k, alors $\sqrt{3}$ s'écrirait sous forme d'une fraction $k/(n+1)$ de nombres entiers.