Jeux de stratégie

Elèves : Solène, Cesare, Youssef, Justine, Safa, Benoit, Clément, Noah, Arthur, Bregje, Lucien, Mahmoud, Tom, Anna, Katerina, Martin, Alexis, Anna, Alex

Chercheur : Marie Anastacio, chercheur à l'université de Leiden (Pays-Bas)

https://www.universiteitleiden.nl/en/staffmembers/marie-anastacio#tab-1

Problématique - Mise en situation du problème

Le lycée français et l'école européenne ont cherché une solution à la question: "est-il possible de gagner a Tic-tac-toe, au Achi et au Picaria, à tous les coups? Et si oui, comment?"

Le but de nos recherches était de maximiser nos chances de gagner sur chaque jeu.

Morpion
Tic Tac Toe

Une majorité d’entre vous a déjà joué à Tic Tac Toe, mais pour ceux qui ne connaissent pas les principes de ce jeu, voici les règles. Le tic-tac-toe, aussi appelé « morpion » et « oxo » en Belgique, est un jeu de réflexion se pratiquant à deux joueurs dont le but est d’être le premier à créer un alignement de trois symboles identiques au sein d'une grille de 3x3.

Première approche

Étapes et stratégie :

Placer un point gagnant (pas de hasard) (après 2 tours)

Bloquer l’adversaire (empêcher l’adversaire de mettre son point gagnant)

?

Un algorithme

A	B	C
D	E	F
G	H	I

- Nous avons réfléchi à une stratégie qui fonctionnerait sous forme d'algorithme et qui nous permettrait de gagner à tous les coups. Les deux étapes prioritaires sont :
  - Placer un pion gagnant, pas de hasard.
  - Bloquer l'adversaire c'est-à-dire empêcher l'adversaire de mettre son pion gagnant.

- Mais que faire lorsque l'on ne se trouve dans aucune des situations précédentes? Placer un pion aléatoirement est une possibilité mais ce n'est pas la solution la plus fiable pour compléter cet algorithme. Nous avons donc réfléchi à une troisième étape qui rendrait la stratégie infaillible.

- Pour cela, nous avons commencé par créer un système de scores. Au début de la partie, toutes les cases ont un score de 0. Lorsqu'un pion est placé sur une des cases, toutes les cases se trouvant sur la même ligne, colonne ou diagonale gagnent 1 point.

A	B	C +1
D +1	E +1	F
G	H	I +1

- Lorsque qu’un pion est placé sur une case, elle perd tous ses points.

- Le deuxième joueur, en bleu, doit bloquer son adversaire et si possible ouvrir ses possibilités:
  - choisir une case avec le score adversaire le plus haut, pour l'empêcher au mieux de gagner

  et/ou
  - prendre une case qui lui permet d’ouvrir ses possibilités, c'est à dire, choisir une case qui lui permet d'augmenter le score d'un maximum de cases.

A +1	B+1	C +1+1
D +1	E	F
G+1	H+1	I +1+1

- L’opération se répète jusqu’à ce que 4 cases soient occupées. Pour la majorité des combinaisons, lorsque 4 cases sont occupées, au moins l’un des joueurs a une possibilité de gagner ou de bloquer une victoire adverse, ce qui nous ramène aux deux premières étapes de la stratégie.
- Dans le tableau ci-dessous, nous pouvons voir, en tant que joueur bleu, que le joueur rouge possède un score de 2 sur une case. Pourtant, on ne peut pas encore se raccrocher à la première stratégie c’est-à-dire empêcher l’adversaire de mettre un point gagnant. Cela signifie que l’adversaire aura une bonne opportunité pour se trouver en situation d'échec et mat. Afin d'éviter cette situation, il faut mettre son pion sur la case concernée. Ci-dessous, le joueur bleu est donc obligé de jouer sur la case C.
-

A +1	B+1 +1	C +2+1
D +1	E	F
G+1 +1	H+1	I +1+1

A +1	B+1 +1	C +2+1
D +1	E	F
G+1 +1	H+1	I +1+1

- Les points peuvent compter comme des possibilités de gagner. Lorsqu’il y a un point sur une case, on a la possibilité de gagner en positionnant son dernier pion sur cette case. Afin d’optimiser ses chances de gagner, il faudrait donc parvenir à avoir un point sur un maximum de case.

- Il est préférable de placer un pion sur une case qui permettrait d’ouvrir le plus de possibilités. Cependant en suivant cette stratégie, on peut en déduire que la place centrale est la plus bénéfique. De là, nous vient un nouveau problème : atteindre une situation gagnante ne se fait pas de la façon la plus simple en partant du milieu.
- En effet, afin d’assurer une victoire, il faut parvenir à se trouver en situation d'échec et mat, néanmoins, ça n'est pas possible si la première case que l’on prend en tant qu'attaquant, est la centrale. Pour se trouver dans cette situation il faut parvenir à former les sommets d’un triangle en posant les pions sur les bords; et la case centrale fait partie des cases qui complètent une donne gagnante.
  Pour l'attaquant, le but est donc de se trouver en situation d'échec et mat, pour se faire il faut parvenir à ouvrir un maximum de possibilités. Donc, de limiter les 0.

A +1	B+1 +1	C +2+1
D +1	E	F
G+1 +1	H+1	I +1+1

A +1	B+1 +1	C +2+1
D +1	E	F
G+1 +1	H+1	I +1+1

L'exception qui fait la règle

A –	B +1+1	C +2+1
D +1 +1	E +1 -	F +1+1
G +2 +1	H +1+1	I +1

A –	B +1+1	C +2+1
D +1 +1	E +1 -	F +1+1
G +2 +1	H +1+1	I +1

Ici, on observe un autre cas où l’on trouve que le joueur rouge possède un score de 2 sur une case, pourtant, on ne peut pas encore se raccrocher à la première stratégie. Cependant, dans ce cas-ci, c’est le cas pour deux cases, concernant toutes deux le même joueur: le rouge. En tant que joueur bleu, on ne peut pas bloquer les deux cases en même temps, car l’autre joueur pourra le mettre en situation d'échec et maths.

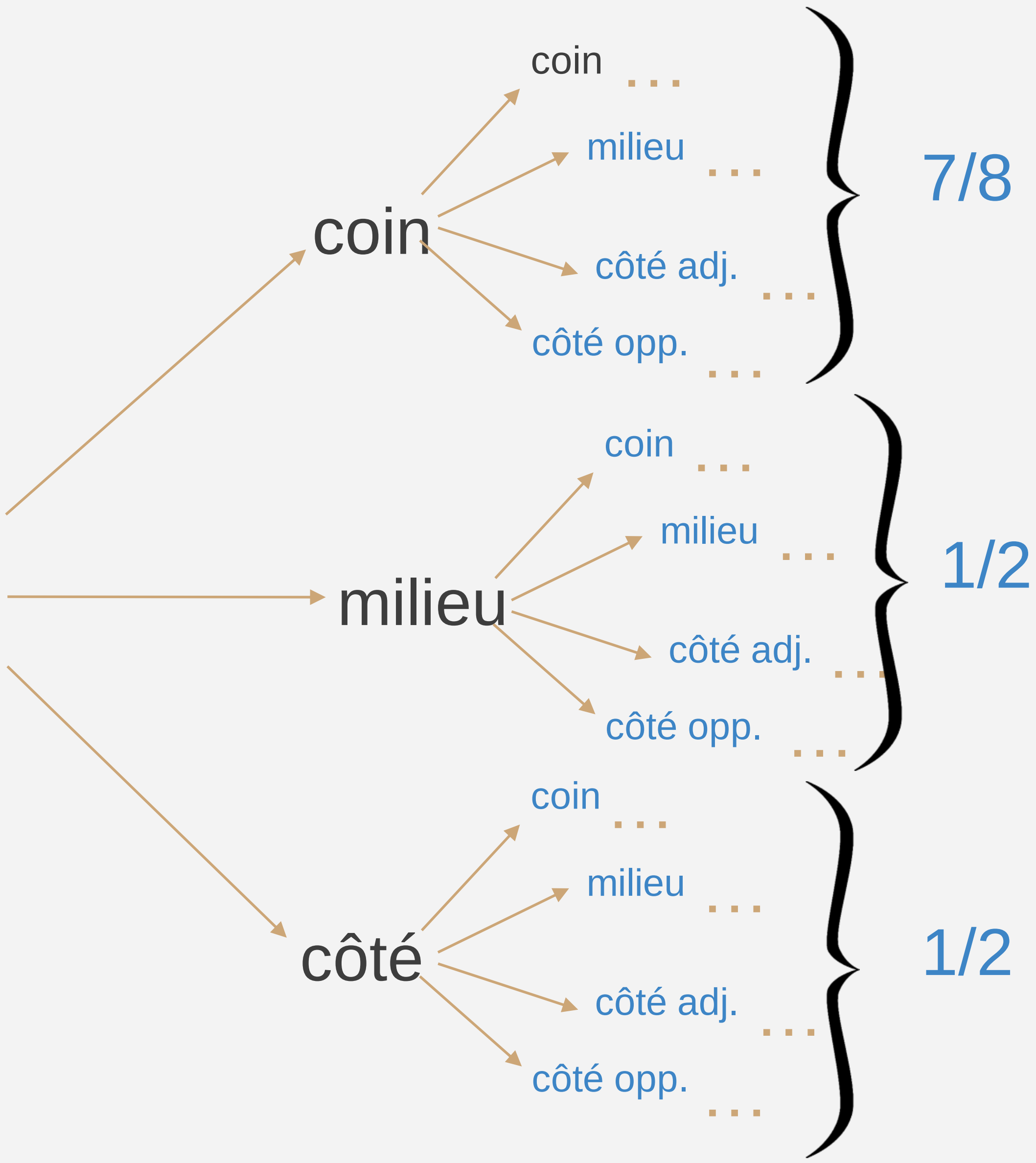
Dans ce cas-là, la seule solution pour ne pas perdre serait de forcer l'adversaire à mettre son pion sur une case autre que la C et la G. Pour ce faire, il faudra poser son pion de manière à forcer le joueur rouge a vous bloquer. Le joueur bleu doit donc placer son pion dans l'un des côtés (soit B ou F ou D ou H)

A –	B +1+1	C +2+1
D +1 +1	E +1 -	F +1+1
G +2 +1	H +1+1	I +1

Deuxième approche

L’arbre des possibles

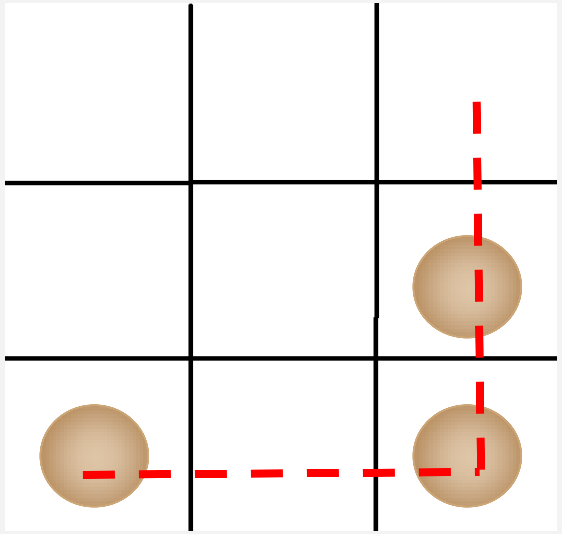
Au début de nos recherches, nous voulions faire un système de valeurs attribuées à chaque case. Nous avons commencé par faire un arbre des possibles. Ainsi, nous nous sommes rendus compte que lors du premier tour : si on commence dans le coin, l’adversaire peut choisir entre 8 cases, et 7 de ces cases nous mènent à la victoire. De même, si on commence au milieu ou sur le côté, on a 1 chance sur 2 que l’adversaire choisisse une case qui nous mène à la victoire.
Le coin maximise donc nos chances de gagner. Mais finalement, nous en avons conclu que c’était plus intéressant de tout simplement créer une stratégie partant des coins et de ne pas faire une IA qui évalue toutes les possibilités.



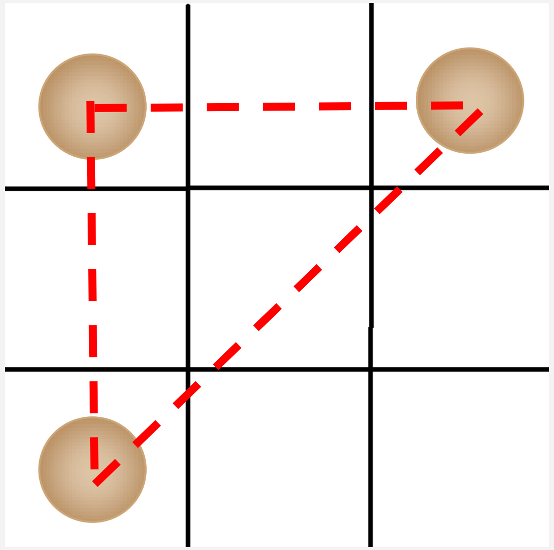
-Quelle case permet de maximiser nos chances de gagner?

-Une IA qui choisirait le meilleur chemin pour gagner?

Observations intéressantes



3 pions sur la grille peuvent former 2 lignes. Si on possède deux lignes où il nous manque 1 case pour gagner, l'adversaire ne peut pas nous bloquer sur 2 lignes en même temps !
La victoire est donc garantie. C'est le pilier de notre stratégie pour maximiser nos chances de gagner, on cherche à atteindre cette configuration.



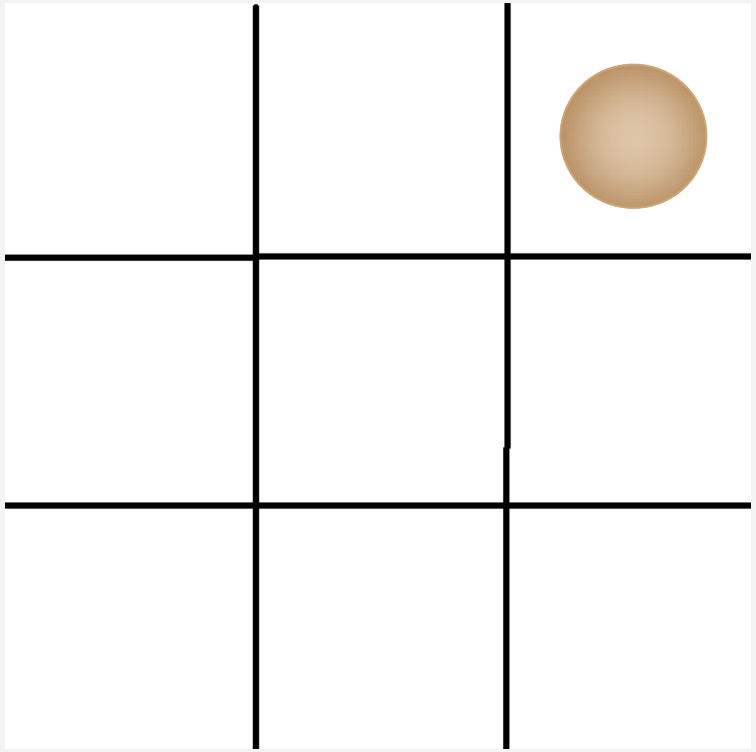
Ces 3 pions peuvent également former 3 lignes. Cette configuration est optimale, car elle permet de manipuler l'adversaire. En effet, on peut sacrifier une ligne pour contrôler la position de l'adversaire (il sera forcé de nous bloquer). Ensuite, il ne nous reste plus qu'à compléter l'ensemble de 3 lignes avec le dernier pion. Dans cette situation, l'adversaire ne peut pas nous bloquer sur deux lignes simultanément.

Comment choisir les 3 cases qui nous permettront de garantir notre victoire ?

Peu importe la stratégie, il faut commencer par jouer dans un coin.
Par symétrie, le coin choisi ne changera pas le résultat de la partie.
Le choix du coin peut être justifié de 2 façons:

1. Le coin est la case qui maximise les chances de gagner selon l'arbre des possibles.

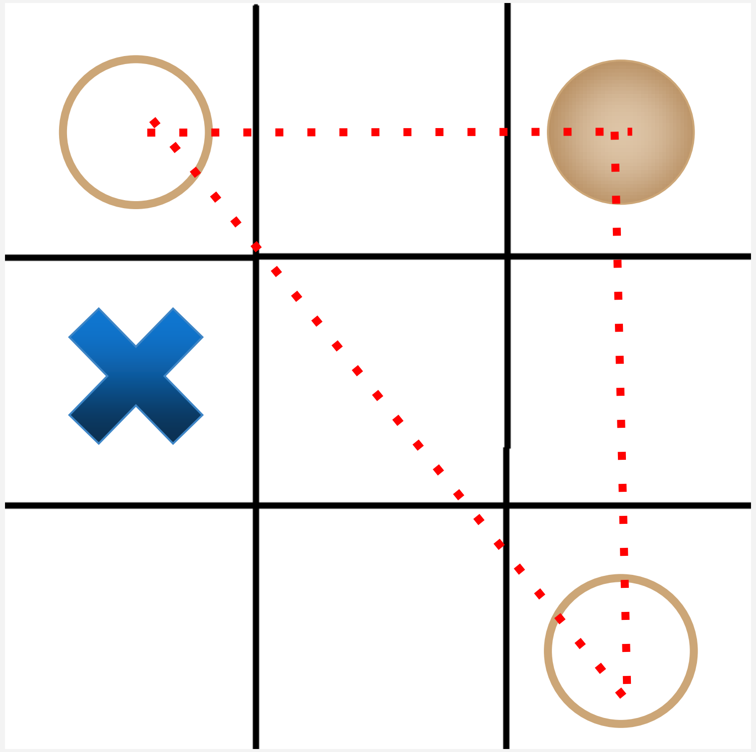
2. Toutes les configurations optimales de 3 pions (qui forment 3 lignes) passent par un coin. Donc en choisissant un coin au début, on garde le maximum d'options et de configuration de 3 pions possibles pour réagir face à notre adversaire.



Comment choisir les 3 cases qui nous permettront de gagner ?

Une fois le coin placé, il faut repérer un ensemble de 3 pions qui forment 3 lignes, dont aucune ligne ne passe par une case de l’adversaire.

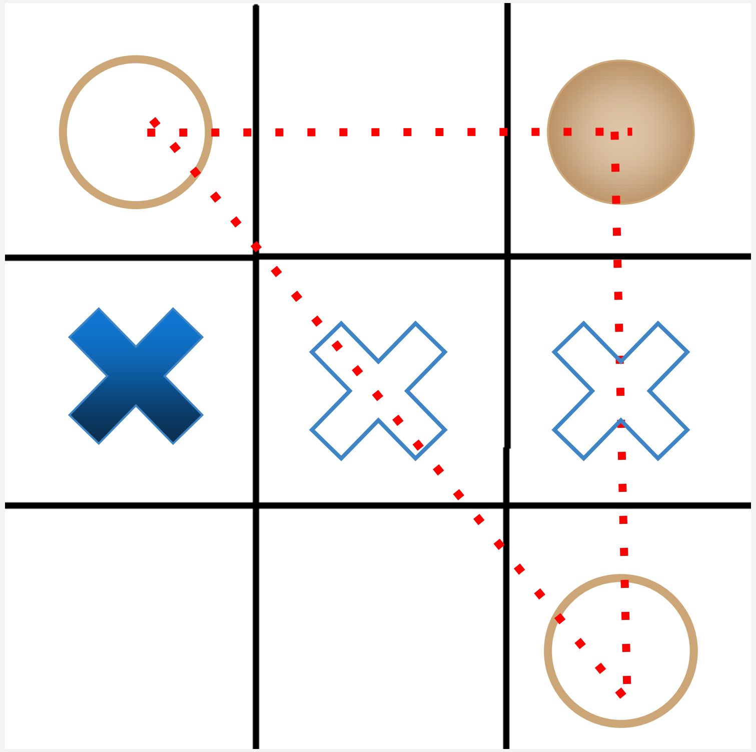
De cette manière, en plaçant les 3 pions, on oblige l’adversaire à nous bloquer.



Comment choisir les 3 cases qui nous permettront de gagner ?

Désormais, il faut choisir un autre coin pour former une ligne qui ne contient pas le pion de l'adversaire. Si cette case ne renforce pas une ligne où l'adversaire peut gagner, c'est celle sur laquelle on va jouer.

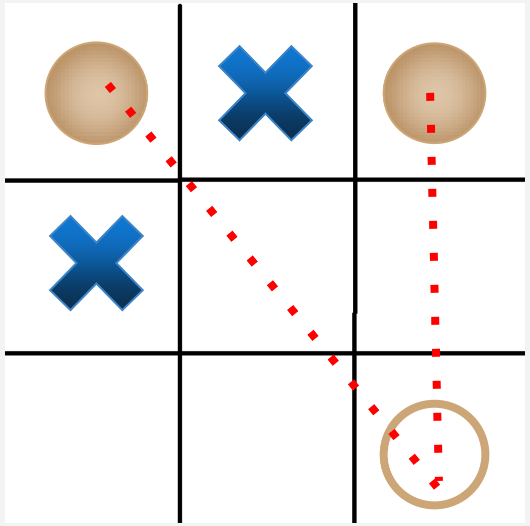
Par exemple, on ne peut pas ici jouer en bas à droite car en nous bloquant, l'adversaire renforcerait une ligne où il peut gagner (ligne symbolisée par les croix vides).
Par contre, on peut jouer sur la case en haut à gauche car elle ne permet pas à l'adversaire de prendre le contrôle de la situation (c'est-à-dire qu'elle ne renforce pas une ligne où il peut gagner).
Il est possible qu'aucune des cases de la configuration ne réponde à ces contraintes. À ce moment-là, il faut faire mAchine arrière et choisir une configuration différente qui nous permette de garder le contrôle des prochains coups de la partie.



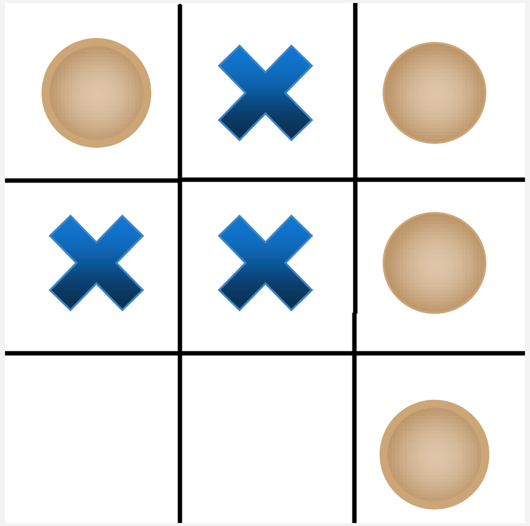
Comment choisir les 3 cases qui nous permettront de gagner ?

Comme prévu, l'adversaire a été forcé de nous bloquer pour ne pas perdre, mais nous avons toujours le contrôle du prochain coup (nous ne sommes pas obligés de bloquer l'adversaire).

Finalement, il ne reste plus qu'à placer le dernier pion, qui complète l'ensemble de 3 pions.



Au tour suivant, notre victoire est garantie !

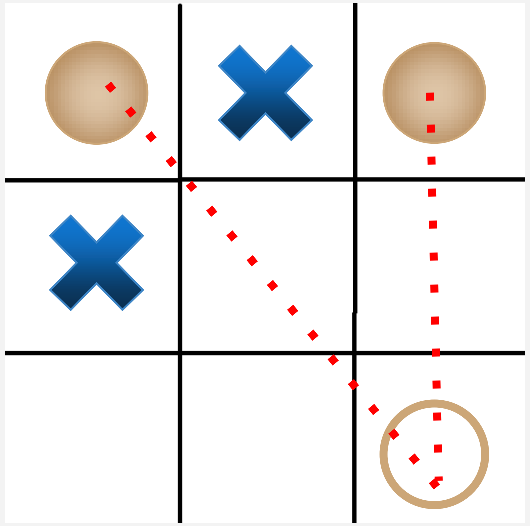


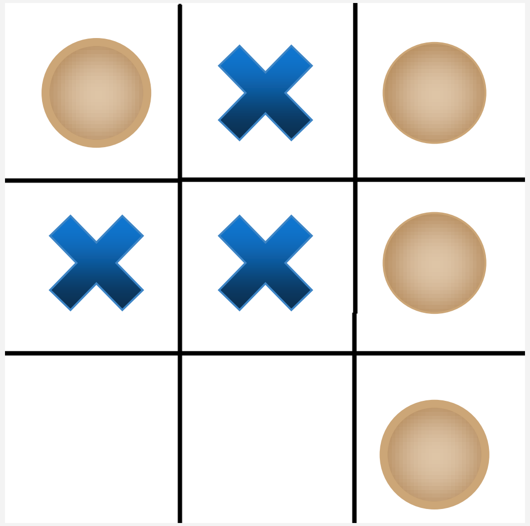
Comment choisir les 3 cases qui nous permettront de gagner ?

Comme prévu, l'adversaire a été forcé de nous bloquer pour ne pas perdre, mais nous avons toujours le contrôle du prochain coup (nous ne sommes pas obligés de bloquer l'adversaire).

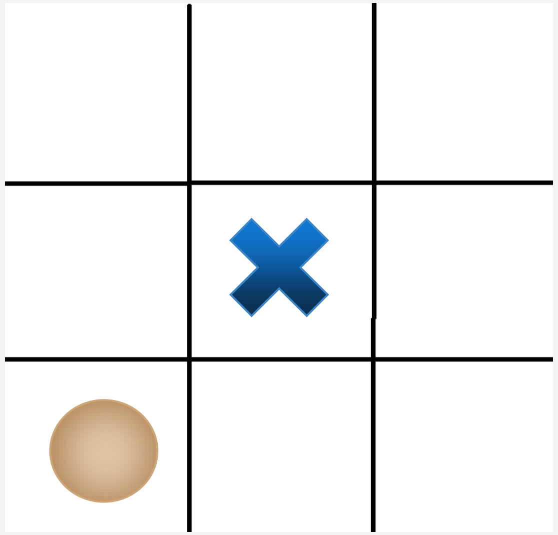
Finalement, il ne reste plus qu'à placer le dernier pion, qui complète l'ensemble de 3 pions.

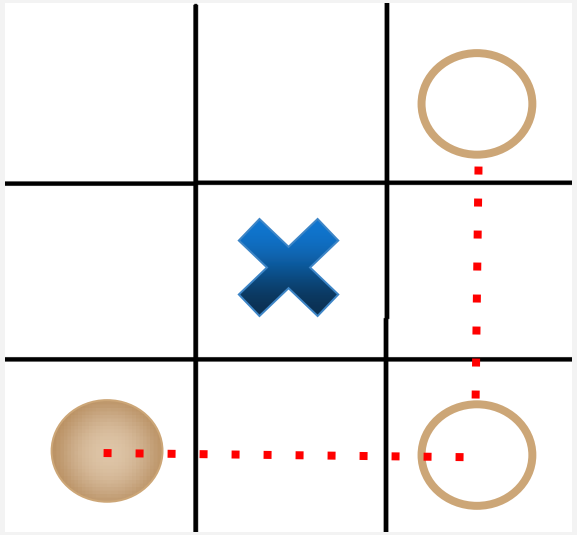
Au tour suivant, notre victoire est garantie !





L’exception… qui confirme la règle





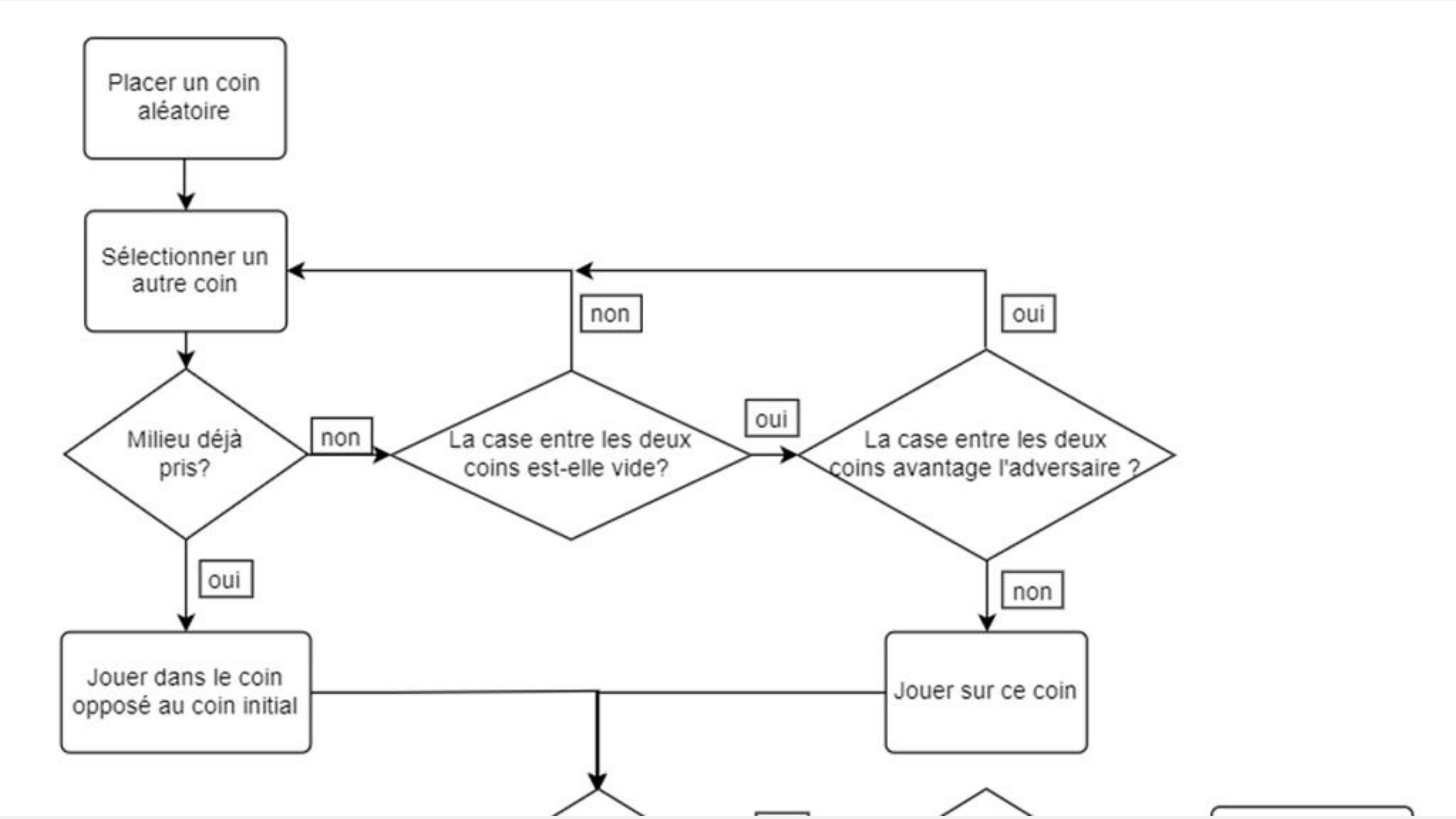
La stratégie précédente n’est pas forcément infaillible.

Si l’adversaire joue au centre, il est impossible de créer une configuration optimale, car celles-ci passent toutes par le centre.

Ainsi, nos meilleures chances de victoire consistent à tenter de créer une configuration de 2 lignes en espérant ne pas perdre le contrôle de la situation (c’est-à-dire se retrouver à se bloquer mutuellement pour finir à égalité).

En jouant de nombreuses parties avec cette stratégie, on retrouve bien les résultats de l’arbre des possibles, on maximise donc nos chances de gagner. Afin de nous en assurer, nous avons développé un programme python qui le vérifie.

Logigramme 1

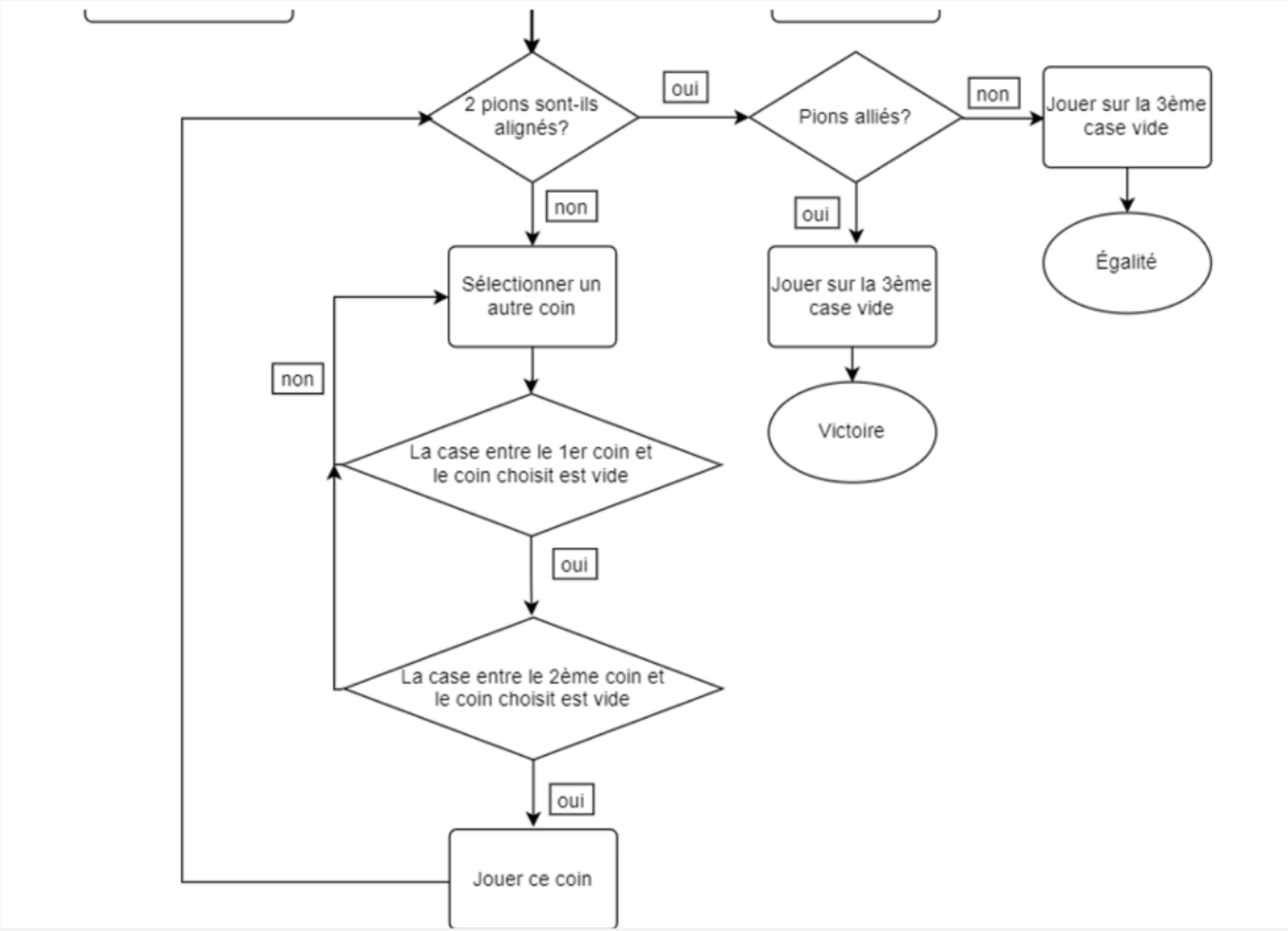


Ci-contre, le logigramme qui représente l'algorithme de l'IA, permettant de vérifier notre stratégie.

Différence avec la stratégie: si on devait regarder chaque ensemble de 3 pions, cela prendrait beaucoup de code et ce serait moins performant. On s'est rendu compte que l'on pouvait toujours trouver un ensemble de pions optimal qui passe seulement par des coins.

On a donc simplifié le programme au maximum pour que celui-ci ne prenne en compte que des ensembles qui passent par les coins.

Logigramme 2

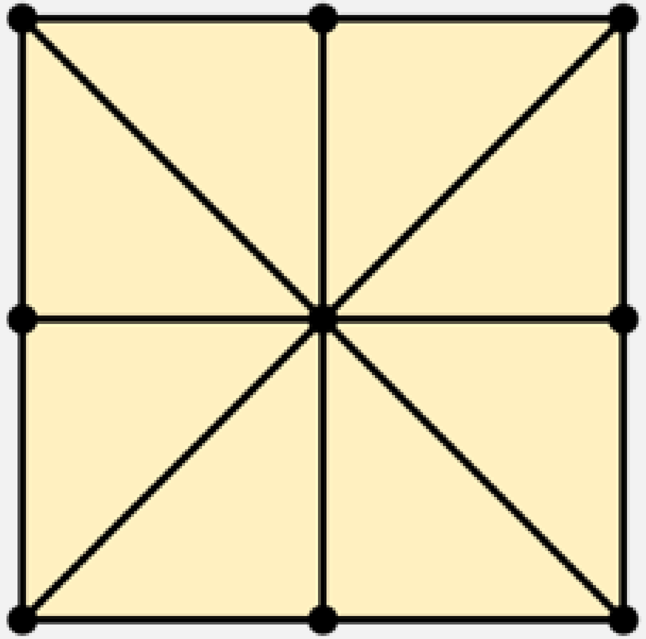


Achi

Achi

Le Achi est un jeu d'alignement qui se joue à deux. Chaque joueur place un pion à tour de rôle sur un point d'intersection vide. Le but est d'aligner trois symboles (jetons) identiques.

Une fois tous les jetons déposés sur le plateau, si personne n'a encore gagné, on rentre dans une phase de déplacement. En effet, il est ensuite possible de les déplacer vers un sommet adjacent vide afin d'obtenir un alignement.



Première approche

Transition du Tic Tac Toe au Achi

Pour arriver au Achi, il faut d'abord commencer par le Tic Tac Toe. Nous avons essayé plusieurs possibilités de déplacements au Tic Tac Toe pour trouver des positions gagnantes, ainsi que des positions perdantes.

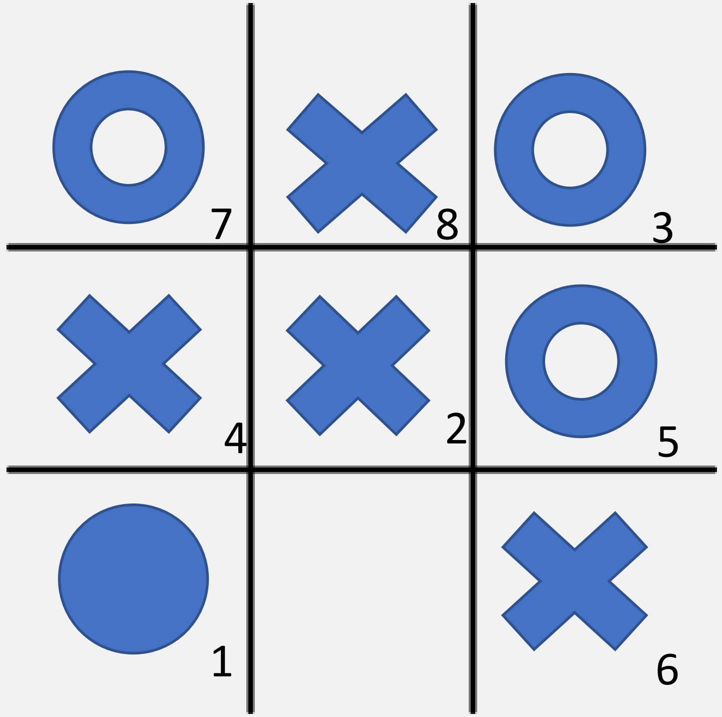
En commençant au coin, le rond a le plus de chances de gagner au Tic Tac Toe et on ne peut pas poursuivre avec le Achi.

Jouer au Achi suppose d'éliminer la position gagnante qui consisterait à commencer aux coins.

Transition du Tic Tac Toe au Achi

À droite, nous pouvons voir un des exemples qui mène à l'égalité au Tic Tac Toe.
Si au début de la partie, le rond se trouve dans la case du coin, au Achi c'est une défaite assurée.

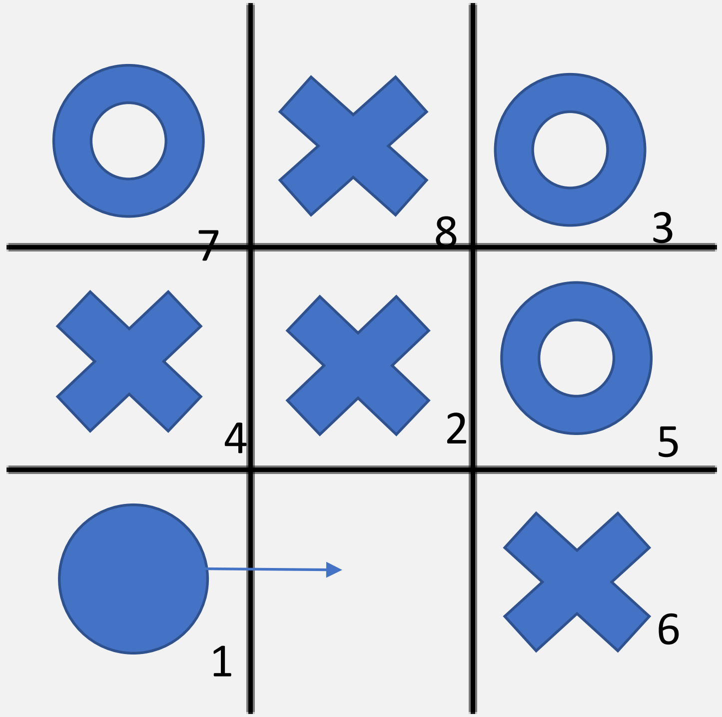
Nous allons développer notre hypothèse qui consiste à occuper le centre pour assurer la victoire au premier joueur (le rond).
L'étape suivante pour le rond sera de se déplacer. Dans une telle configuration il n'a que deux possibilités de mouvement.



Transition du Tic Tac Toe au Achi

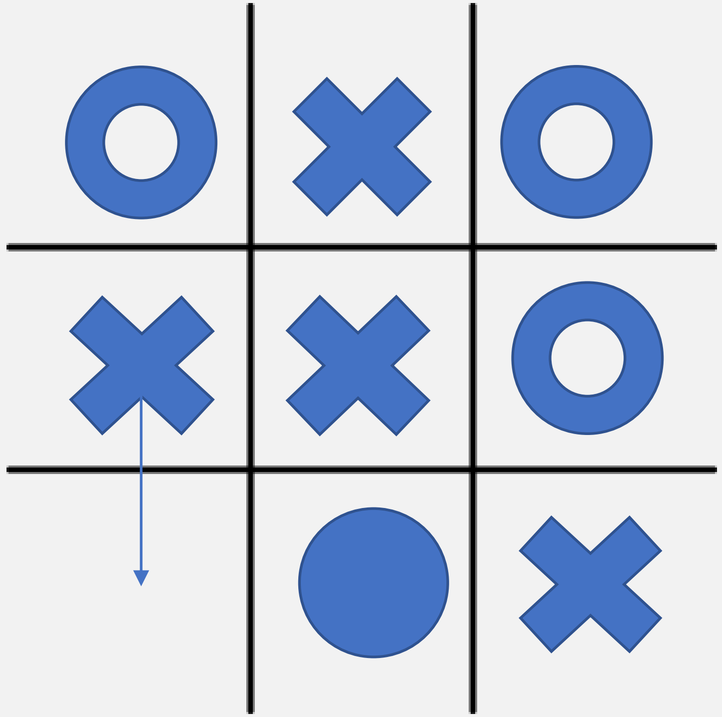
Nous pouvons voir que le rond peut occuper la dernière case libre en y arrivant de deux façons différentes.
Soit, on libère la case de droite, soit celle de gauche.
Si le rond quitte la case 5, la croix gagne directement en complétant l'ensemble des trois cases à l'horizontale.

- Seule possibilité sinon il perd directement



Transition du Tic Tac Toe au Achi

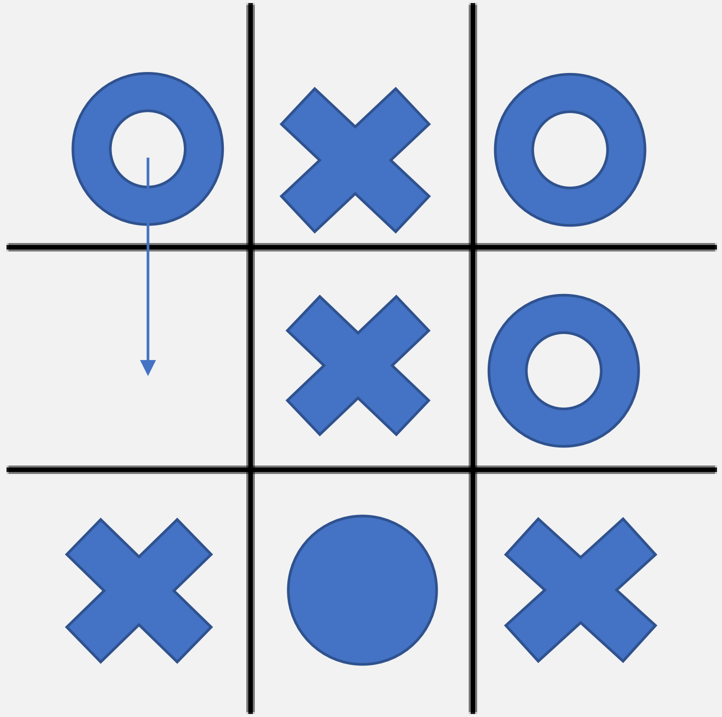
Si nous considérons que le joueur qui joue avec les croix est un bon joueur, il va surement prévoir les prochains mouvements de l'adversaire, et donc déplacer la croix sur le coté pour limiter le nombre de coups du rond.



Transition du Tic Tac Toe au Achi

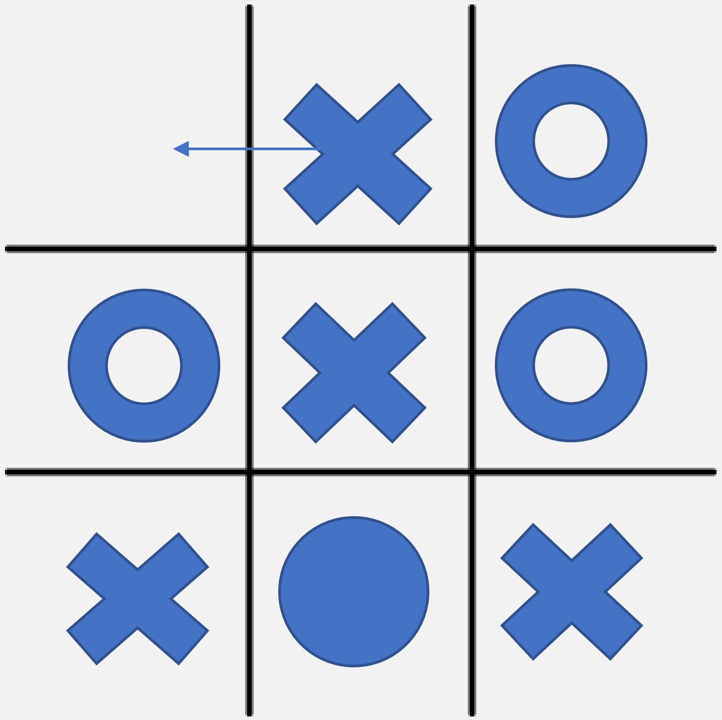
On arrive maintenant à une configuration où les ronds n'ont aucune possibilité de gagner.

Peu importe leur prochain coup, les croix gag nent.



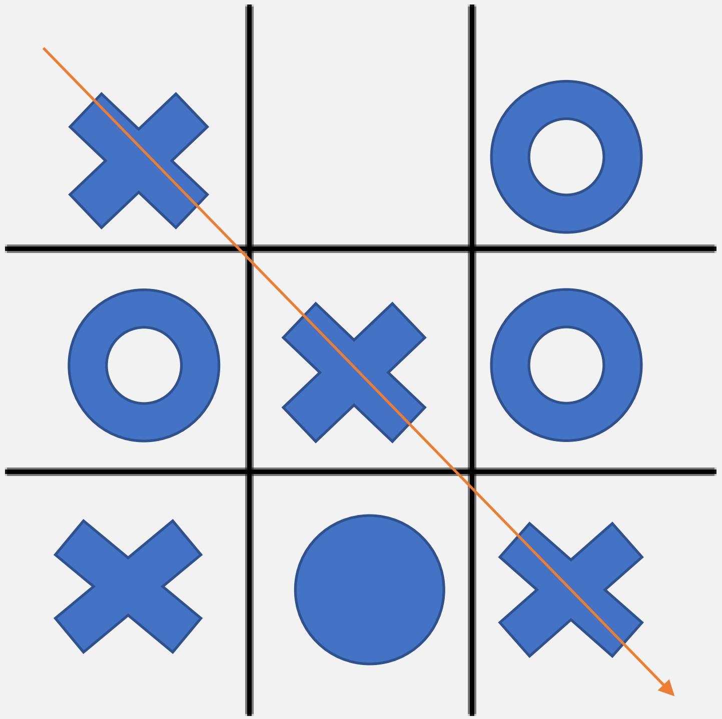
Transition du Tic Tac Toe au Achi

La croix se déplacant dans le coin, il y a un alignement en diagonale des croix qui gagnent la partie.



Transition du Tic Tac Toe au Achi

Les croix sont dans une position gagnante en s'alignant, cela confirme la théorie selon laquelle le premier jouer qui se met dans le coin, soit il gagne au Tic Tac Toe et le jeu s'arrête, soit il arrive à égalité à la fin du Tic Tac Toe et perd au Achi.

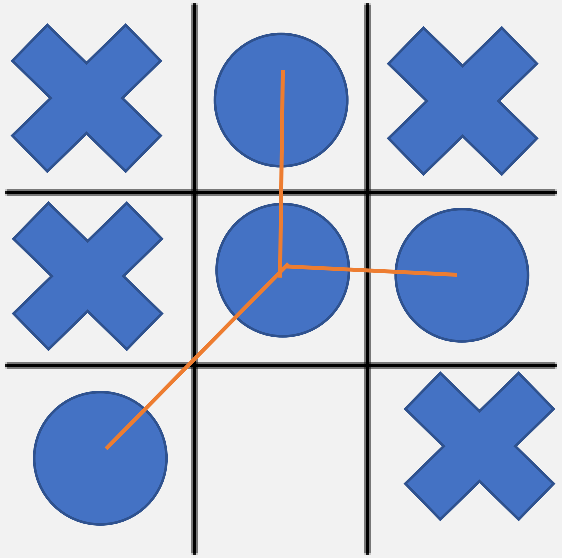


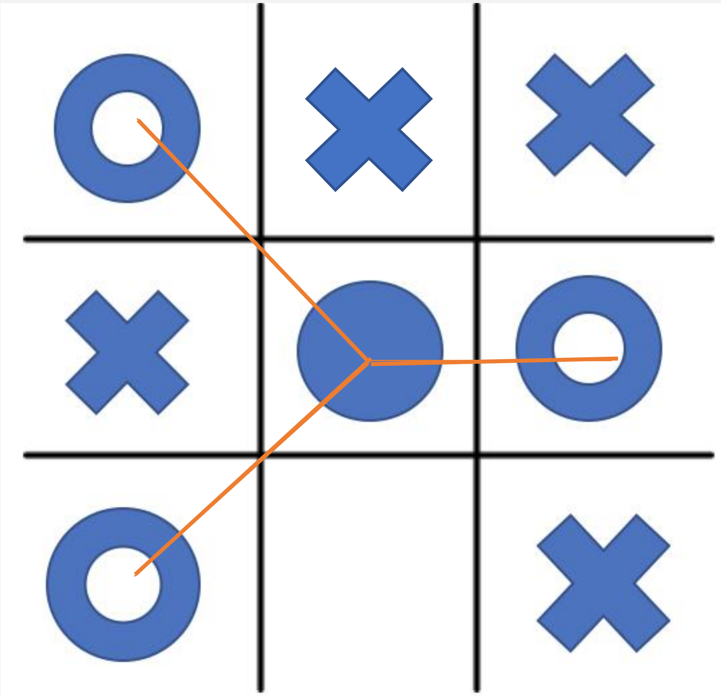
Configuration gagnante:

Après avoir vu que la méthode qui nous permet d'avoir le plus de chances de gagner au Tic Tac Toe ne fonctionne pas au Achi, nous avons essayé d'autres positions de départ.
En nous concentrant uniquement sur le Achi et les stratégies qui permettent de gagner à tous les coups, nous avons trouvé une stratégie qui fait gagner celui qui commence les coups . Nous avons trouvé une position à la fin du Tic Tac Toe qui fait remporter celui qui est dans cette position, c'est une forme géometrique en forme de y, comme vous pouvez le voir sur les exemples suivants.

Configuration gagnante:

La y-théorie





Configuration gagnante:

Celui qui commence peut arriver facilement à cette position et y parvenir a tous les coups.
Il suffit de manipuler et contrôler chaque étape du jeu en obligeant l'adversaire à se déplacer là où c'est le plus avantageux pour les ronds. C’est-à-dire qu'il ne faut jamais laisser aux croix plus d'une, ou maximum deux possibilités, en fin de partie, de se positionner.

Configuration gagnante:

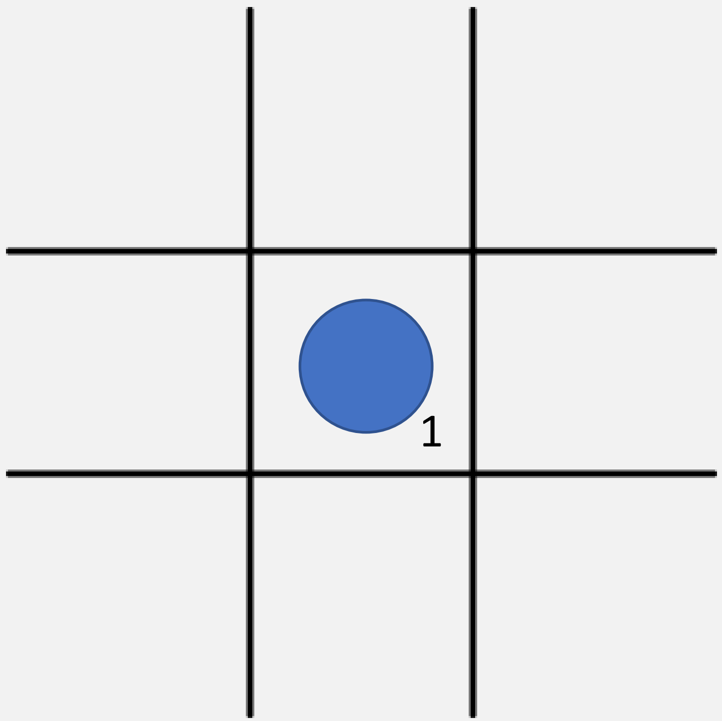
Nous allons montrer un exemple qui illustre bien cette méthode:

Tout d'abord, toute manipulation doit commencer par le centre, de cette façon, quand on arrive au achi, on aura une possibilité de plus pour se positionner sur la case libre.

Ensuite, plus les possilités de déplacements seront grandes, plus les probabili tés de gagner le seront également.

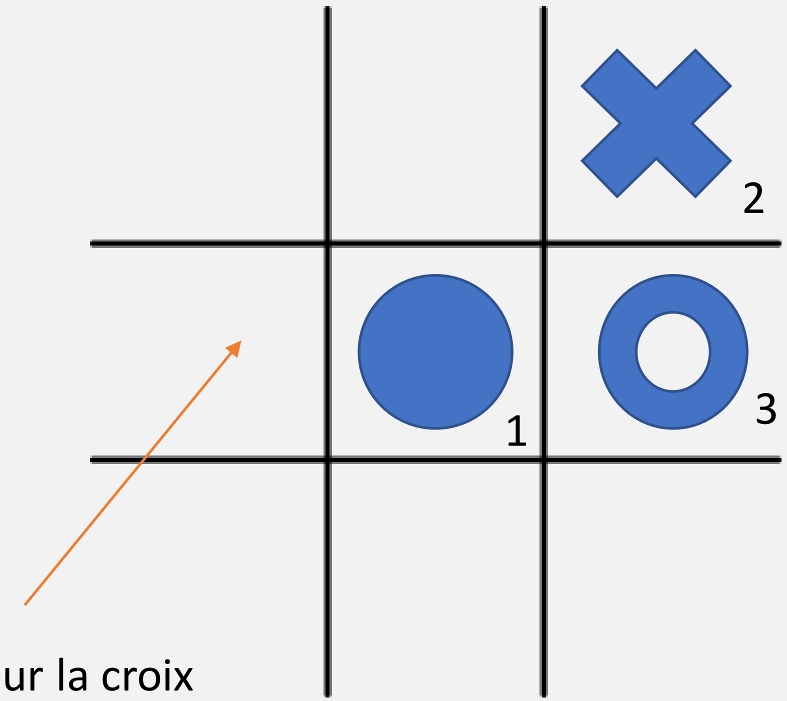
Étape 1: Le but du joueur qui commence est de ne pas laisser le choix à l'adversaire de se placer librement.

- Jouez au centre



Étape 2:

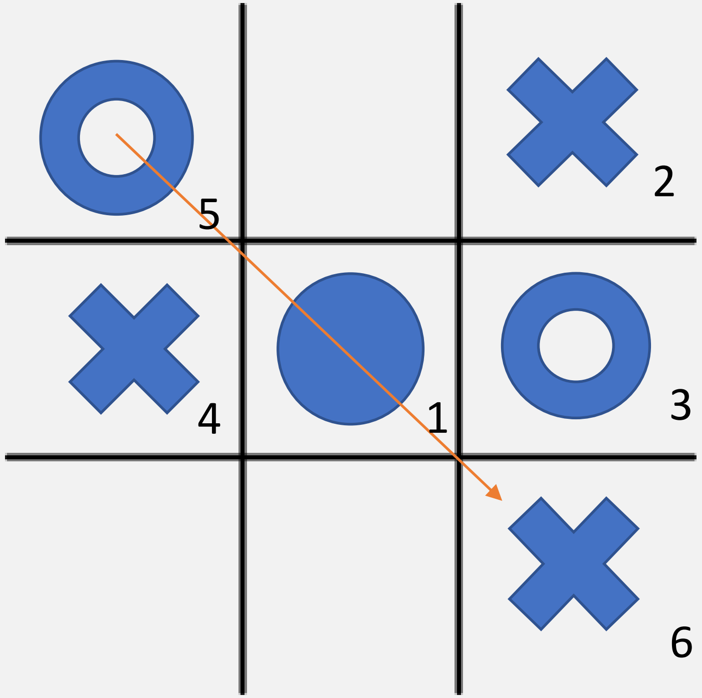
- Pour que le rond puisse gagner, il ne doit pas laisser aux croix la possibilité de se déplacer librement.
- Dans ce cas le deuxième va jouer dans un coin car sinon il perd au Tic Tac Toe. Dans ce cas il joue en haut à droite. Puis le rond joue en suivant la méthode.



seule possibilité pour la croix

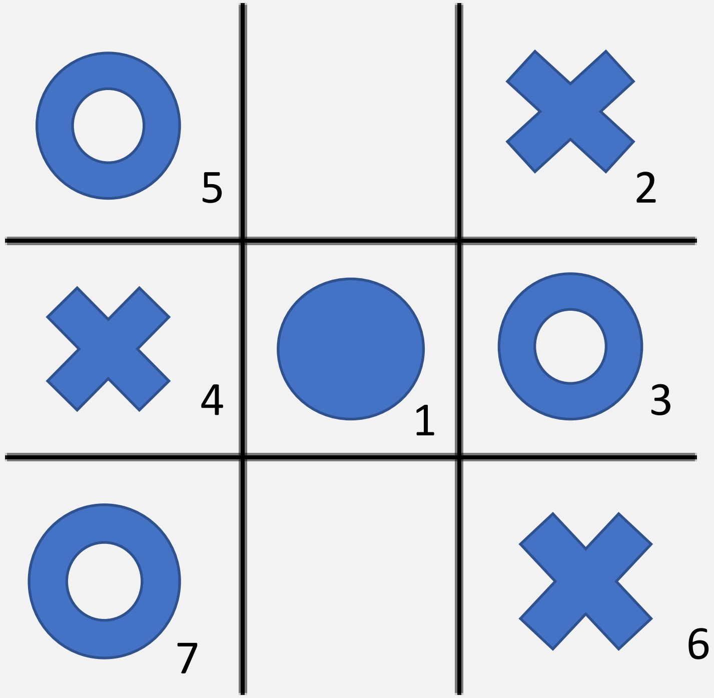
Étape 3:

- Le rond contrôle l'endroit où la croix va se mettre lors de son prochain tour
- La croix se retrouve avec des choix contraints



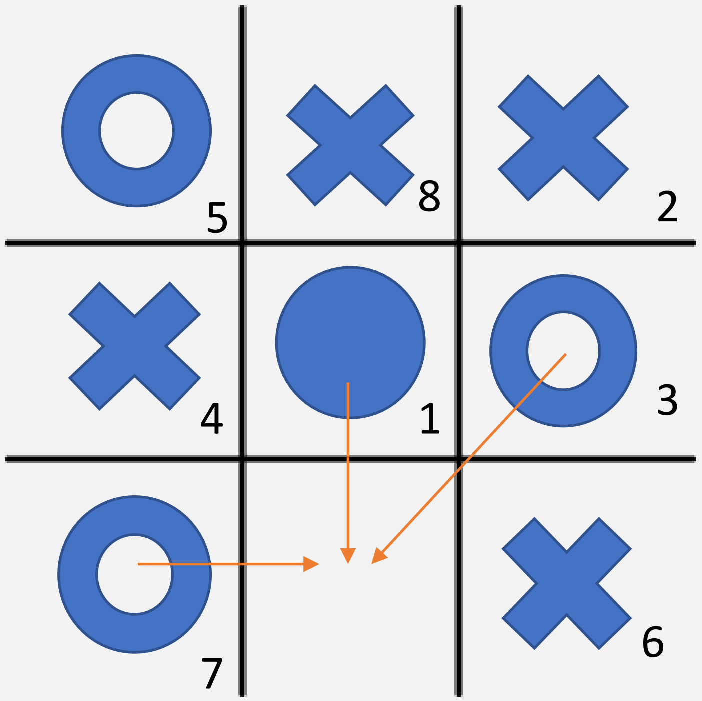
Étape 4:

- À ce stade, peu importe dans quelle case se mettra la croix, on arrive à égalité au Tic Tac Toe et à une configuration gagnante pour le rond



Étape 5:

Plus le rond aura
de possiblités de déplacement,
plus sa victoire sera probable.

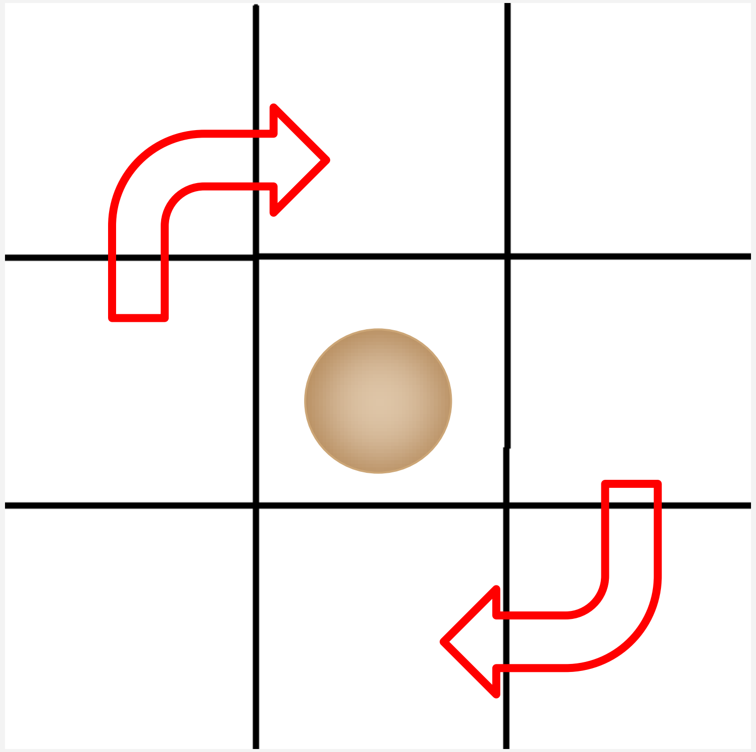


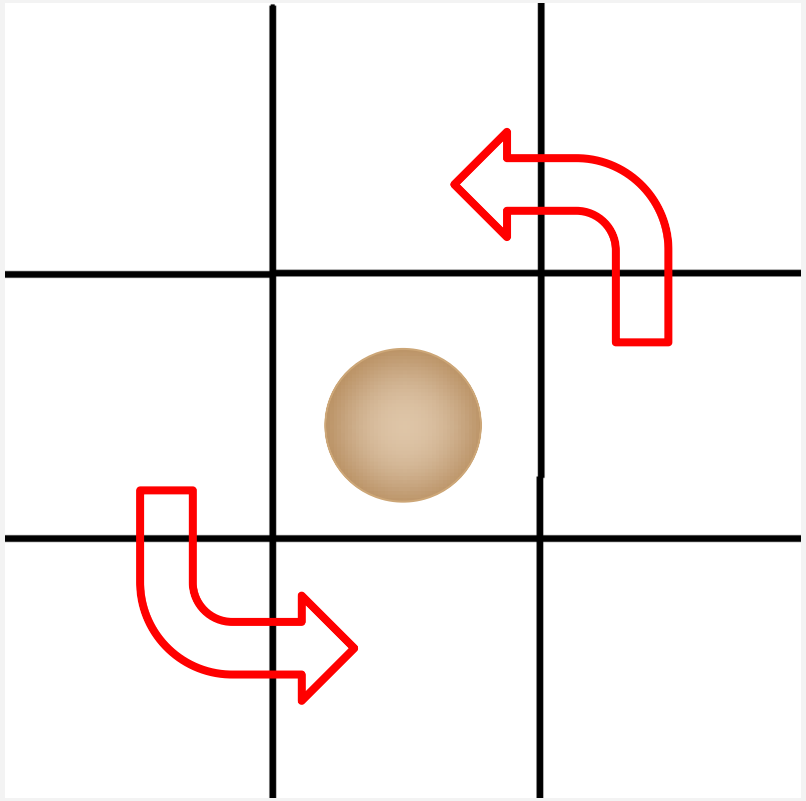
Conclusion/observation

- À la fin du Tic Tac Toe, celui qui a le plus de possibilités de bouger un pion sur une case libre a le plus de chances de gagner au Achi.
- Avec la théorie Y, vous avez 100% de chances de remporter le jeu avec des positions sûres.

Deuxième approche

Observations intéressantes



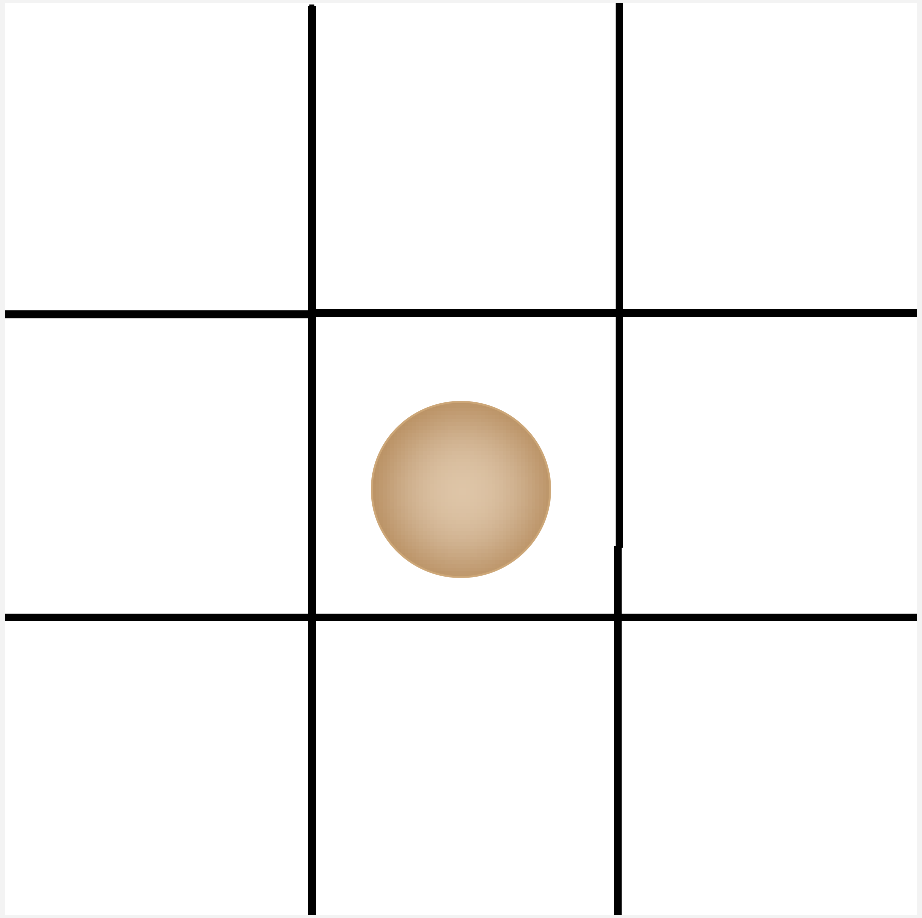


Très vite, nous nous sommes rendus compte que si l’on prenait le contrôle du centre au début de la partie, l’adversaire ne pouvait pas gagner ! En fin de partie, les pions tournent autour du pion central jusqu’à ce que 3 de nos pions soient alignés. C’est le pilier de notre stratégie au Achi.

Une méthode simple pour atteindre cette configuration !

I. Jouer au centre

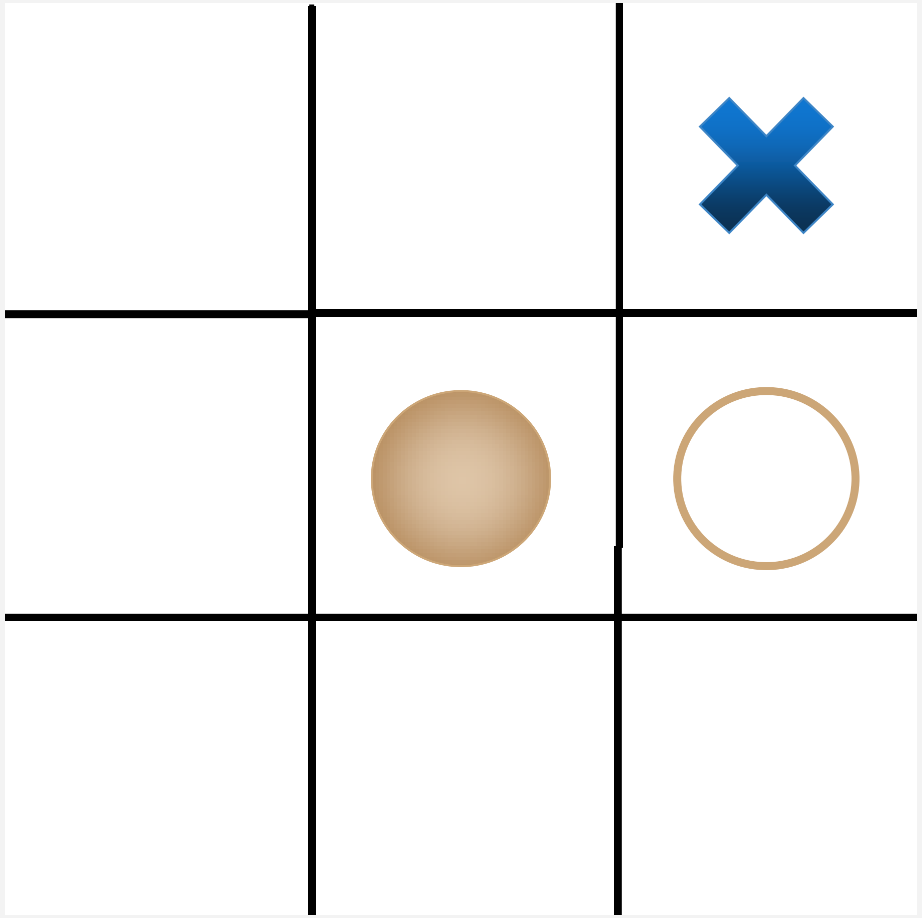
Pour gagner, on commence par jouer au centre.



Une méthode simple pour atteindre cette configuration !

II. Jouer dans le sens horaire par rapport à l'adversaire

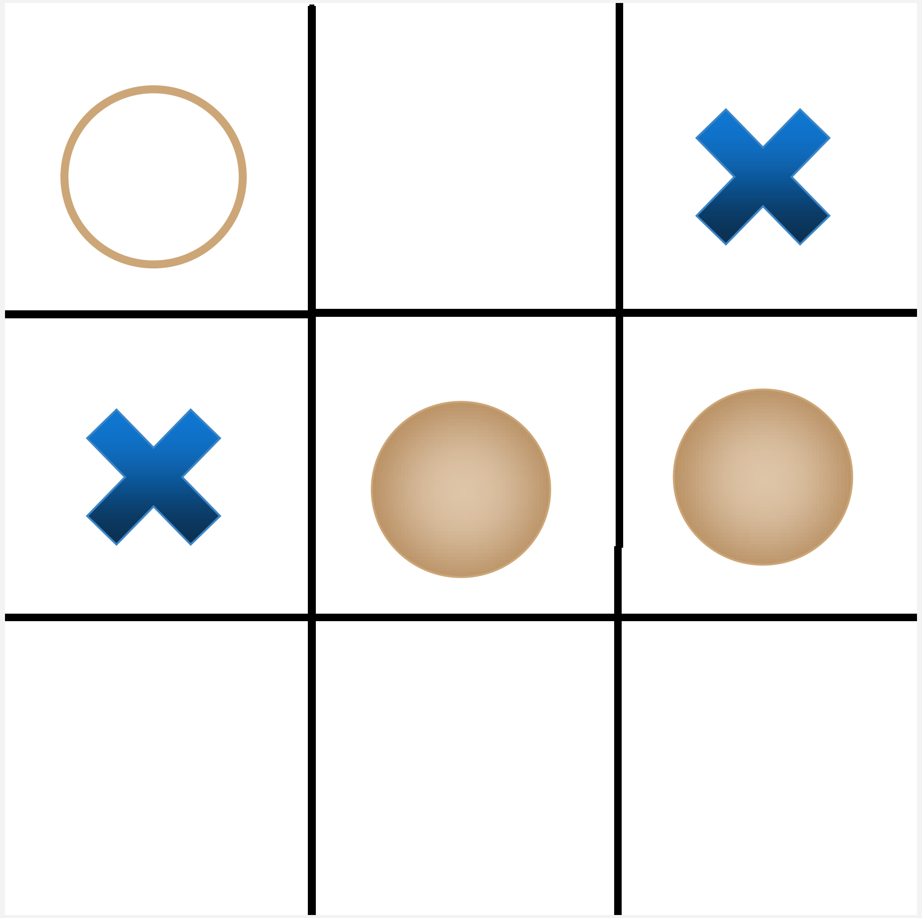
Ensuite, on joue dans le sens horaire (ou anti-horaire) par rapport au pion de l'adversaire. Peu importe le sens, il est juste important de conserver le même tout au long de la partie. De cette manière, on aligne 2 pions et l'adversaire est obligé de nous bloquer.



Une méthode simple pour atteindre cette configuration !

III. Répéter le processus

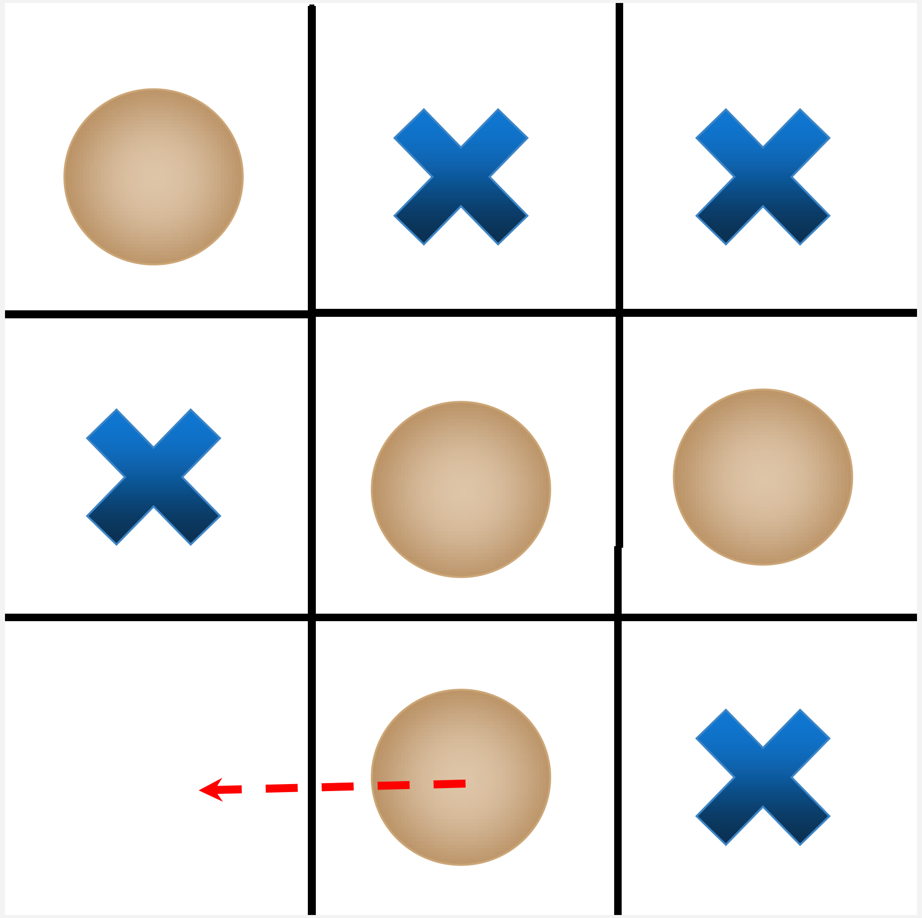
Désormais, on répète le processus de blocage jusqu’à ce que tous les pions soient placés.



Une méthode simple pour atteindre cette configuration !

IV. Déplacer le seul pion que l’on peut déplacer qui n’est pas au centre

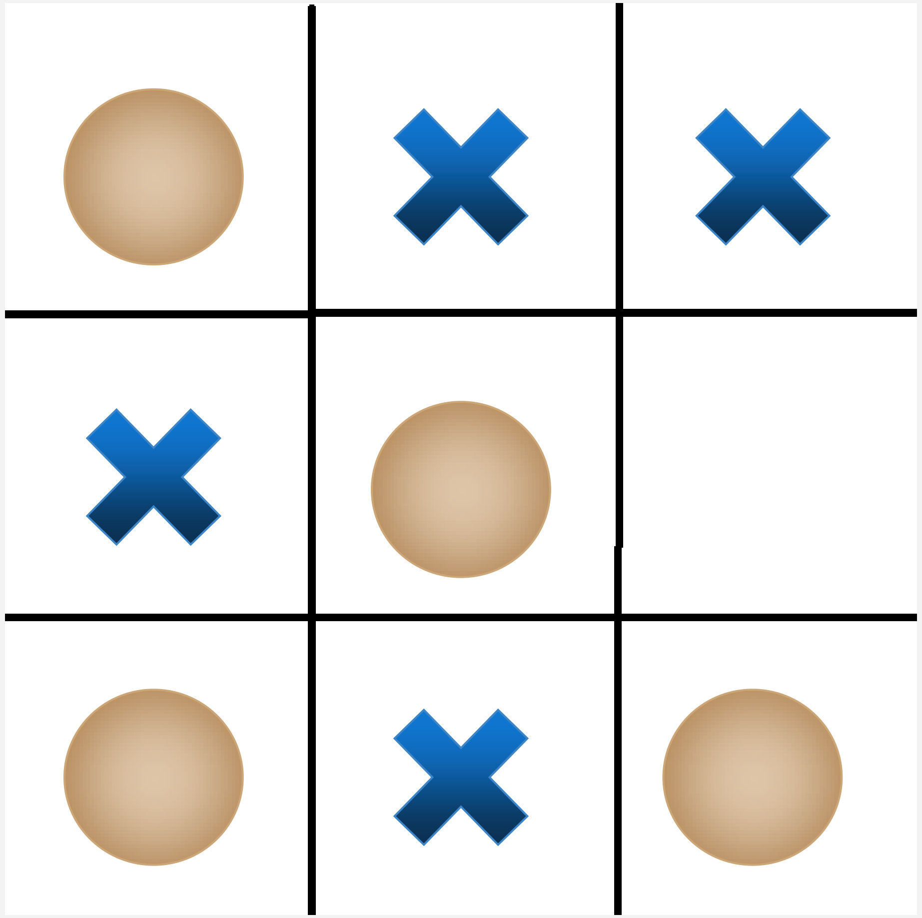
Maintenant que tous les pions ont été placés, c’est le début de la deuxième phase de jeu. On doit donc déplacer nos pions, mais souvenez-vous : on ne veut pas déplacer le pion central car de cette manière, l’adversaire n’aligne jamais 3 pions. On déplace alors le seul pion que l’on peut déplacer, le joueur adverse nous suit et au bout de 2 déplacements, on a gagné.



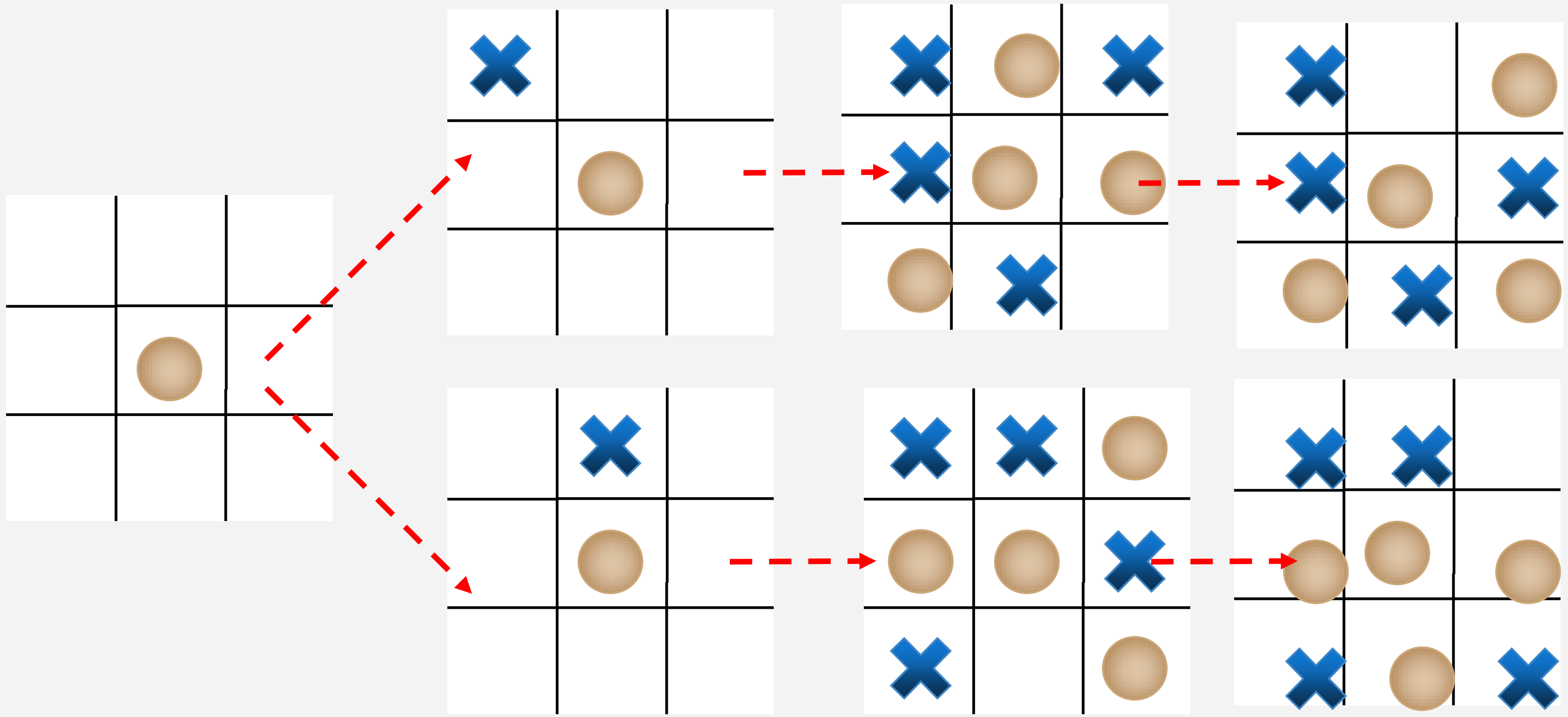
Une méthode simple pour atteindre cette configuration !

V. Finissez de déplacez vos pions et contemplez votre victoire

Les 3 pions du joueur 1 sont alignés, il a gagné !



Pourquoi ça marche ?



Par symétrie, lorsqu'on commence par jouer au centre, l'adversaire n'a en réalité que 2 possibilités : jouer dans un coin ou jouer sur le côté.

Lorsqu'on joue toujours sur la case précédent l'adversaire dans le sens horaire, on aboutit seulement à 2 motifs (Y) possibles en entrant dans la 2ème phase de jeu.

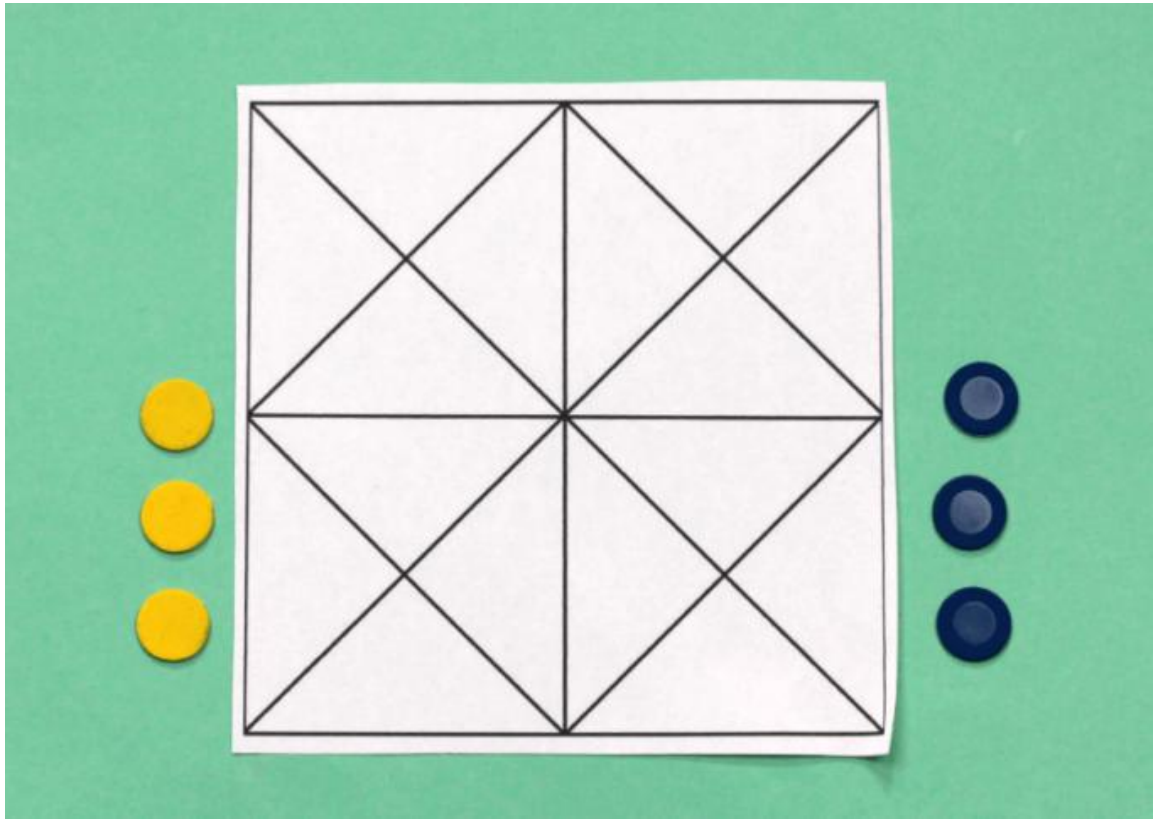
On voit en haut que peu importe le motif, on peut garantir notre victoire, en faisant bien attention à ne pas bouger le pion central.

Ainsi, cette méthode simple permet de garantir notre victoire lorsqu'on est joueur 1.

Picaria

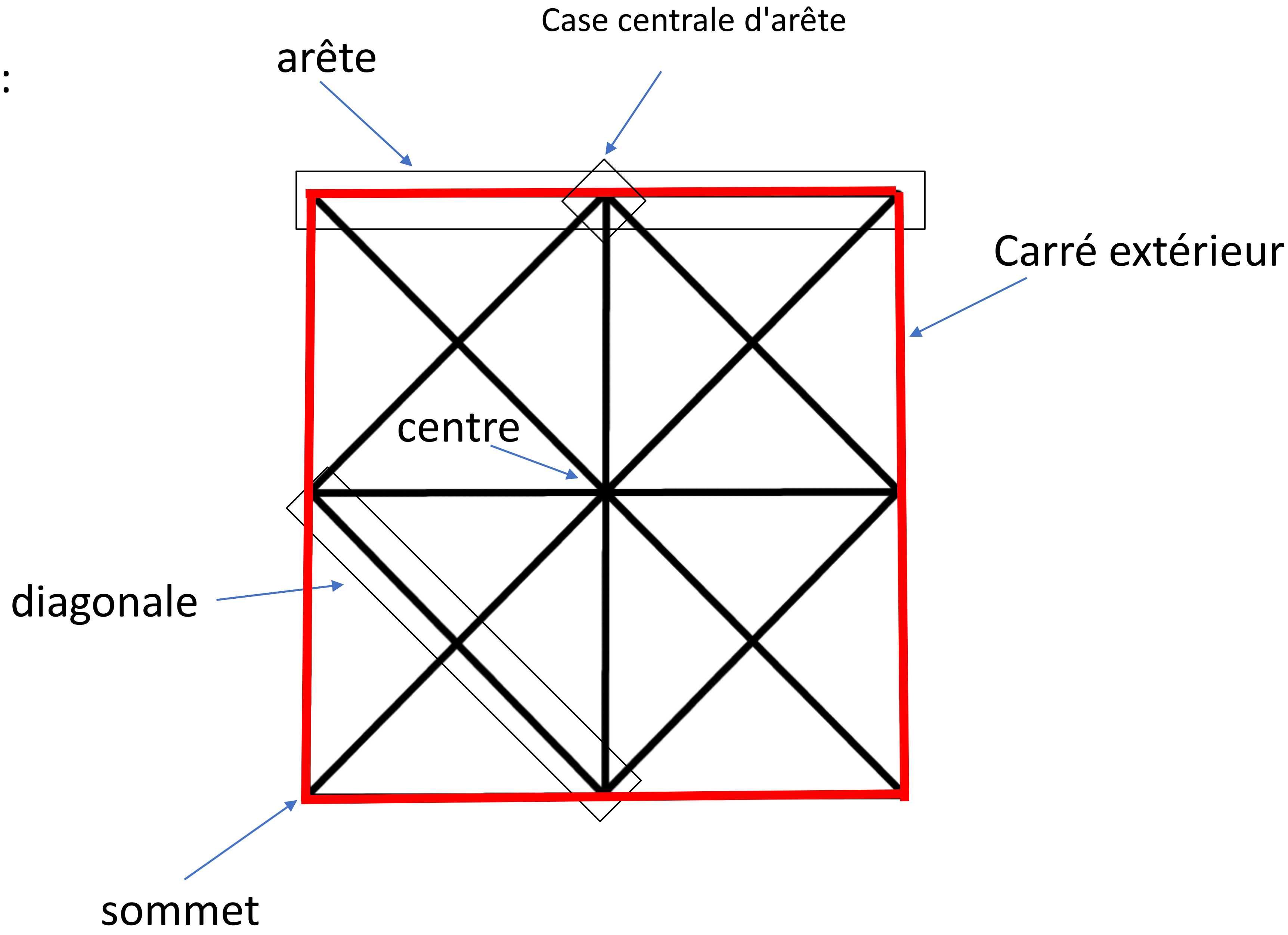
Picaria

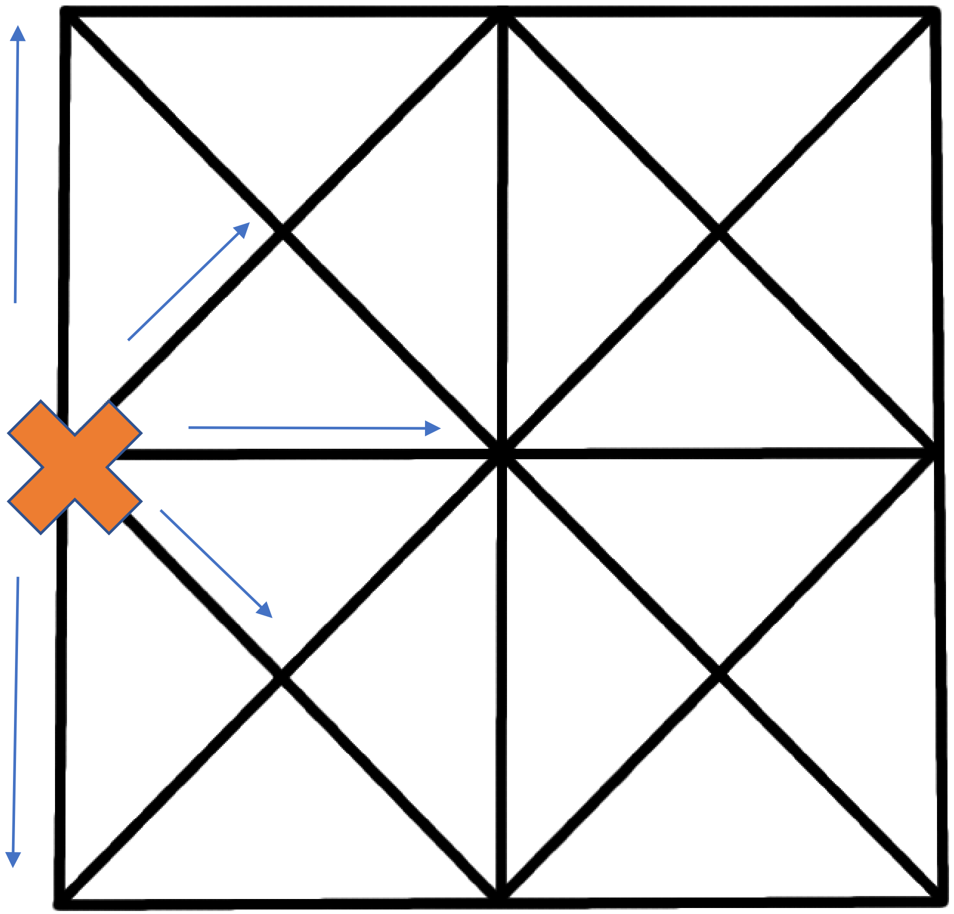
Les règles du Picaria sont très similaires à celles du Achi, mais elles diffèrent en certains points.
En effet, dans ce jeu il est impossible de jouer au point central pendant la phase de placement des pions. Il ne sera possible d'y accéder qu'en y déplaçant un pion pendant la phase de déplacement.
De plus, le plateau de jeu est différent au Picaria. Quatre sommets et quatre arêtes ont été ajoutées.



Première approche

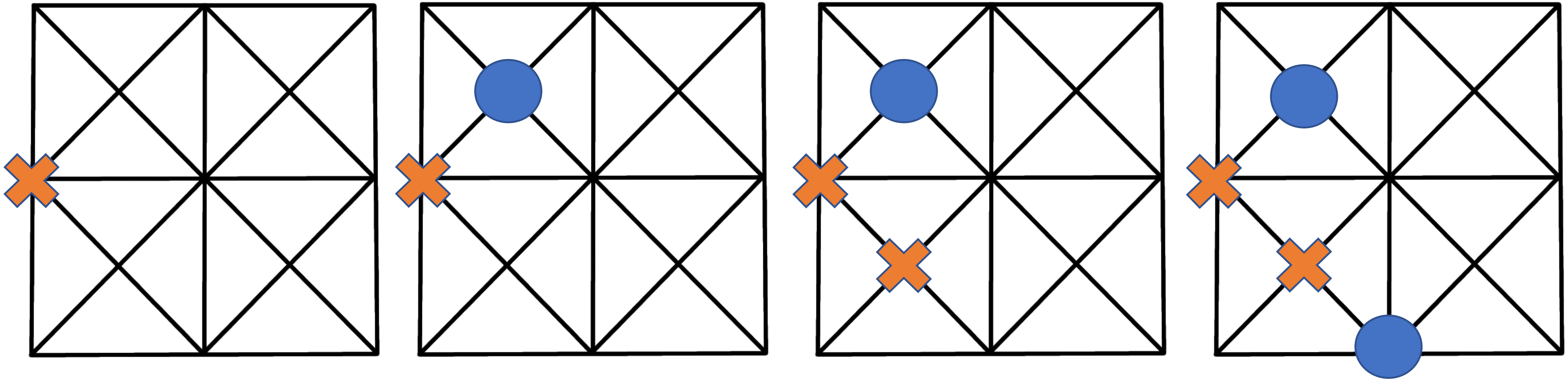
Vocabulaire:



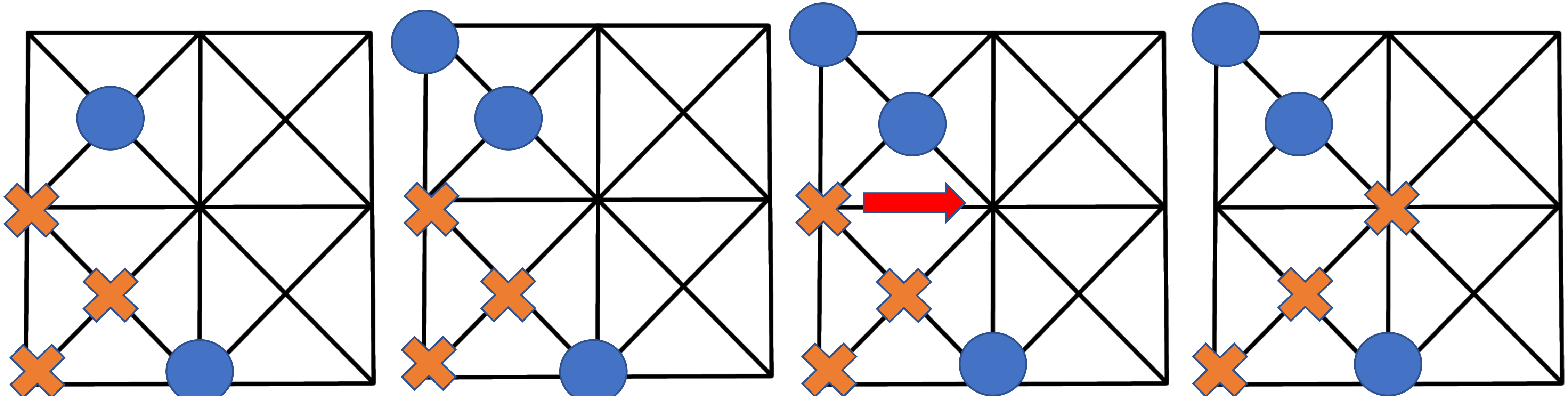


Reprise des stratégies du Tic-tac-toe

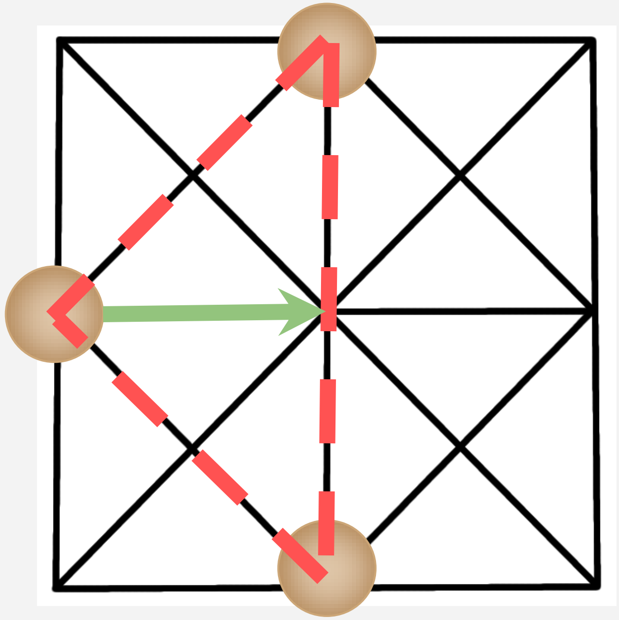
Les idées directrices pour le Picaria sont :
- ouvrir le plus de possibilités pour gagner
- terminer la partie avec le moins de tours possible
- gagner en déplaçant un pion vers le centre

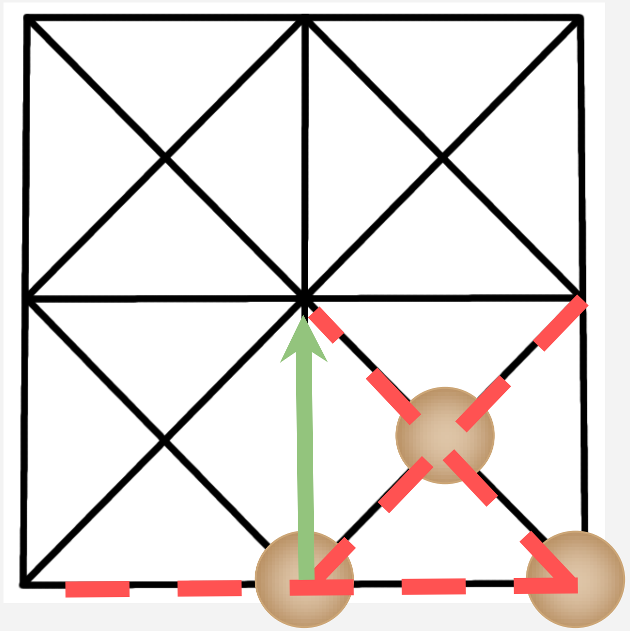


Il faut commencer dans une des cases centrales des arêtes du carré extérieur pour ouvrir le plus de possibilités.
Pour poursuivre dans la stratégie gagnante, il faut placer le second pion dans la diagonale pour contraindre l'adversaire à bloquer. Le troisieme pion doit être placé au sommet le plus proche pour se mettre en position de victoire.
Enfin, il faut déplacer le pion initial vers le centre et créer l'alignement de trois.



Observations intéressantes



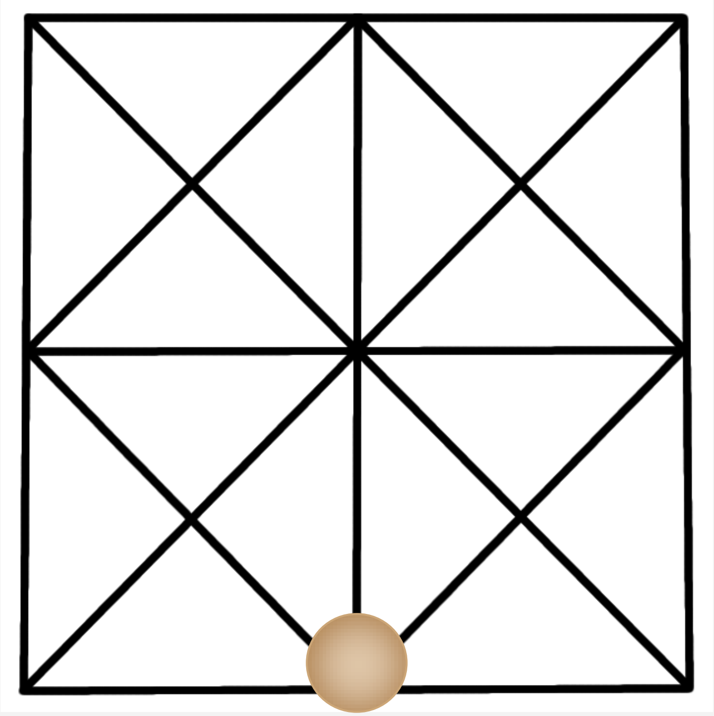


Quelques exemples de configuration de 3 points optimales.

Pour le Picaria, on peut réutiliser la stratégie du morpion, qui consiste à trouver une configuration à 3 points, qui forment 3 lignes sur la grille.
Toutefois, il y a une contrainte supplémentaire. On ne peut utiliser que 3 pions. Or, on a besoin de 4 pions pour terminer la partie.
Pour compléter la ligne à la fin de la partie, il faut que l'on déplace un pion déjà placé. Cela implique qu'un des pions de la configuration puisse être déplacé pour former une ligne.
Il existe plusieurs configurations qui répondent à ces critères, quelques exemples.

Comment choisir les 3 cases qui nous permettront de garantir notre victoire ?

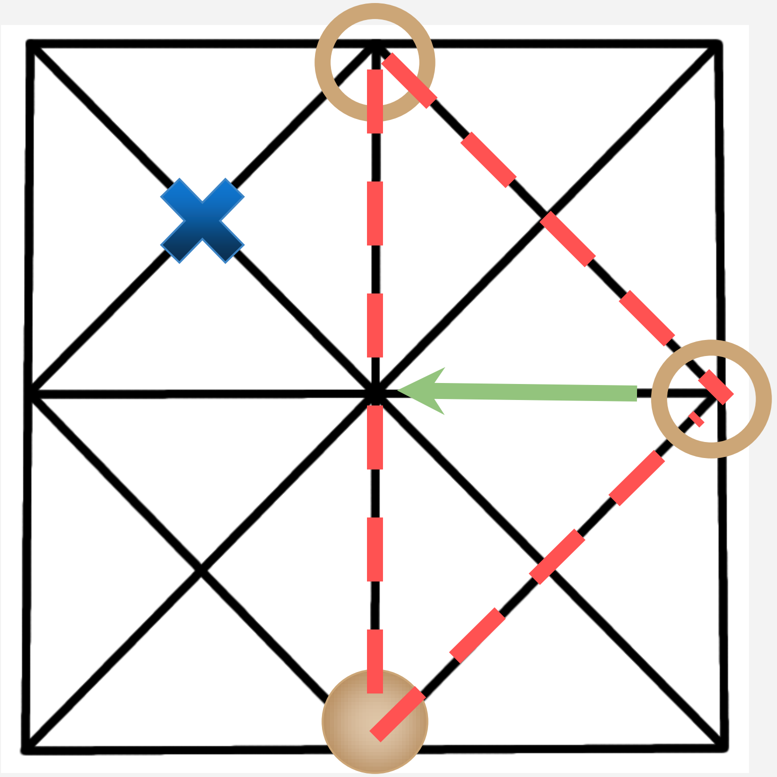
I. Jouer sur le milieu d’un des côtés du carré



Au premier tour, il est optimal de jouer au milieu d’un des côtés du carré. En effet, c’est la case par laquelle passe le plus de configurations en 3 points (la totalité en réalité).

Comment choisir les 3 cases qui nous permettront de gagner ?

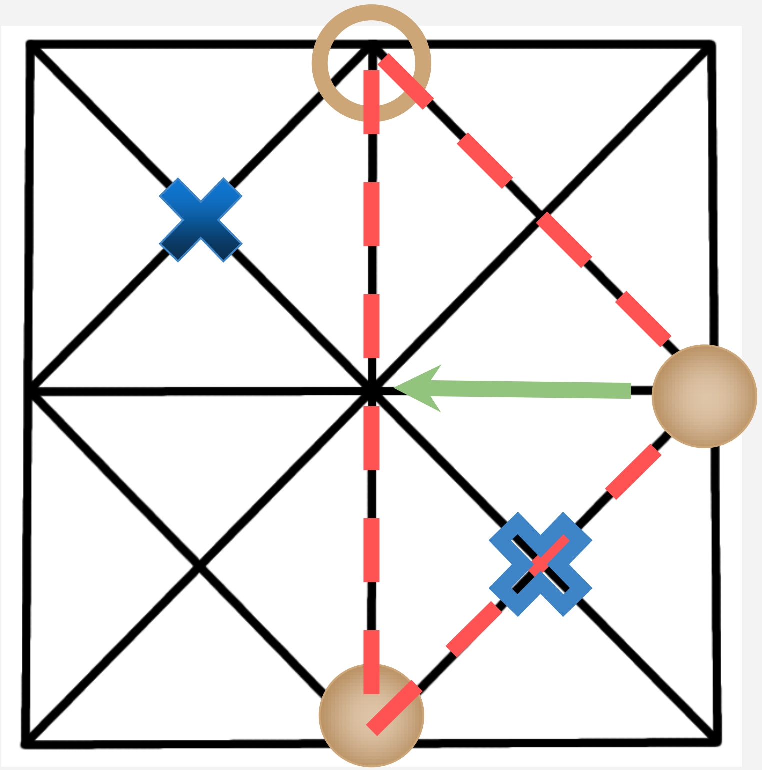
II. Repérer un ensemble de 3 points (qui forment 3 lignes)



Il faut repérer un ensemble de 3 points qui forment 3 lignes, dont aucune des lignes ne passent par une case de l'adversaire. De plus, il faut que l'un des pions puisse être déplacé pour former une ligne (alignement de 3 pions).
Ici, le pion qui va être déplacée est le pion située au milieu à droite.

Comment choisir les 3 cases qui nous permettront de gagner ?

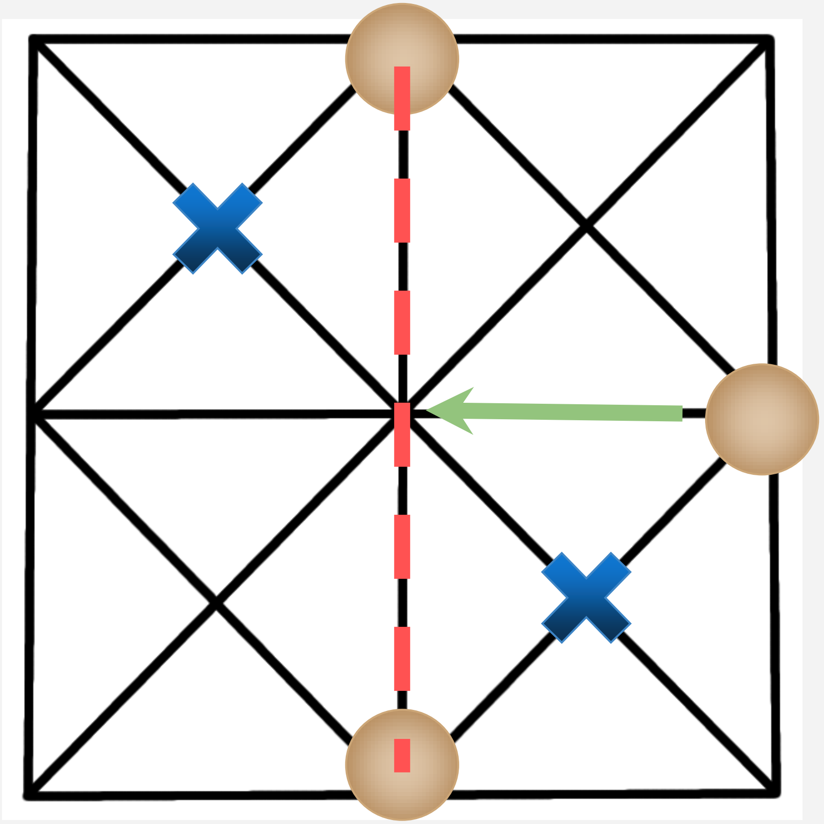
III. Repérer la case sur laquelle on va d'abord jouer



Il faut s'assurer que l'adversaire sera obligé de nous bloquer après avoir placé le pion.
Par ailleurs, il faut aussi s'assurer que la case où l'on prévoit de jouer ne renforce pas une des lignes de l'adversaire (comme pour le morpion).
Ici, on est obligé de jouer sur la case de droite (si on jouait en haut l'adversaire n'aurait pas à nous bloquer).

Comment choisir les 3 cases qui nous permettront de gagner ?

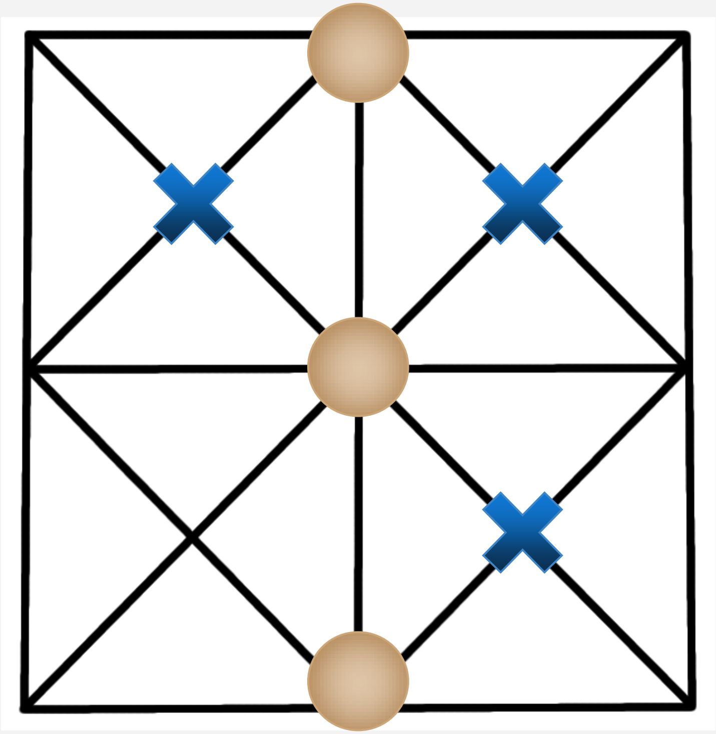
IV. Placez le troisième pion pour compléter l’ensemble de cases



Comme prévu l’adversaire nous a bloqué (sinon il a perdu). On peut compléter l’ensemble de 3 cases.
Désormais, peu importe où joue l’adversaire, il ne nous reste plus qu’à déplacer le dernier pion pour aligner les 3 pions.

Comment choisir les 3 cases qui nous permettront de gagner ?

V. Contemplez votre victoire !



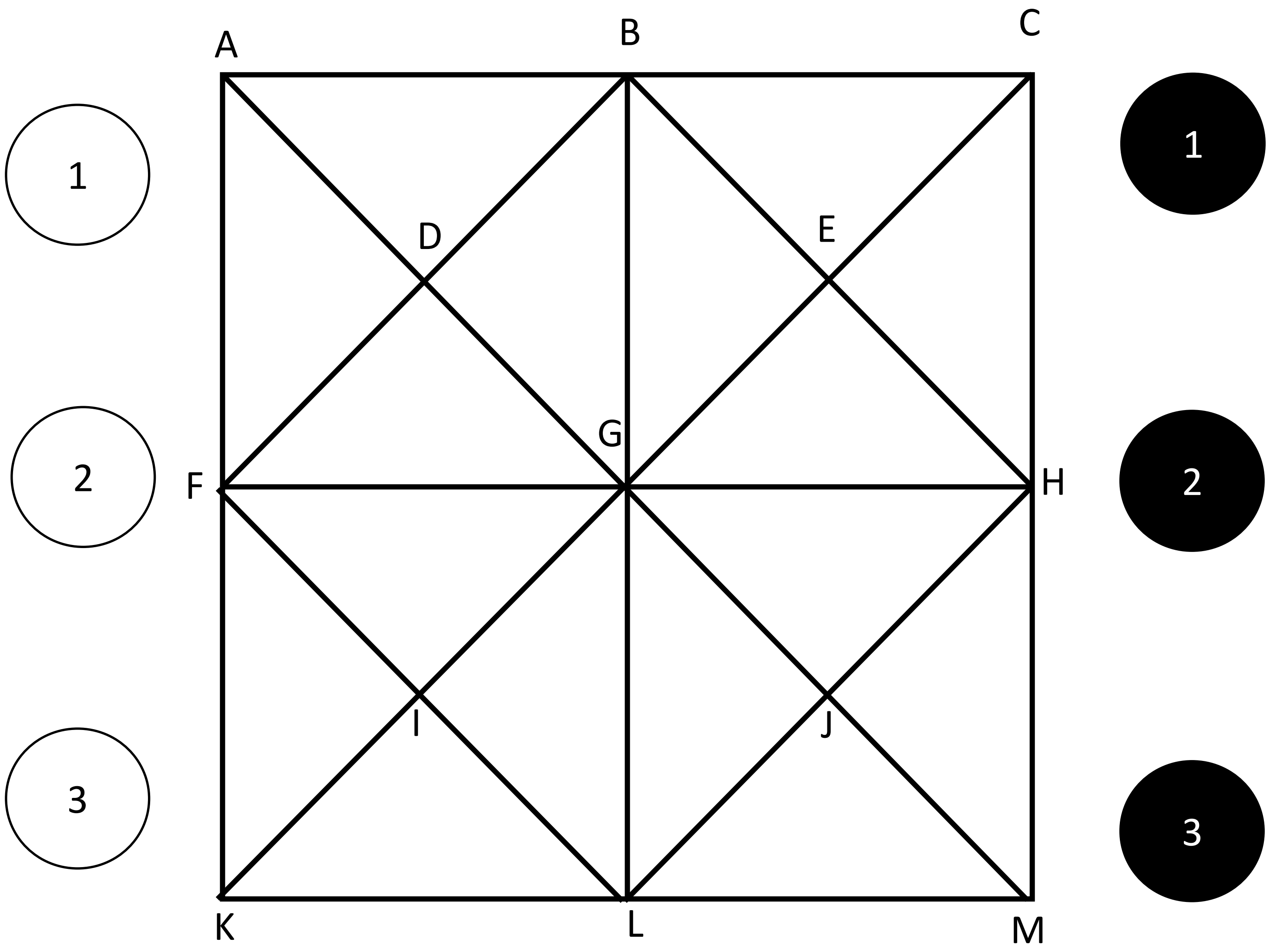
On a remporté la victoire. Peu importe où joue l’adversaire au début, si on joue sur le milieu d’un des côtés, il existe forcément une configuration de pions qui permet de gagner au Picaria (d’après nos recherches), contrairement au morpion. Ainsi, on peut garantir nos chances de victoires !

Deuxième approche

Explanations:

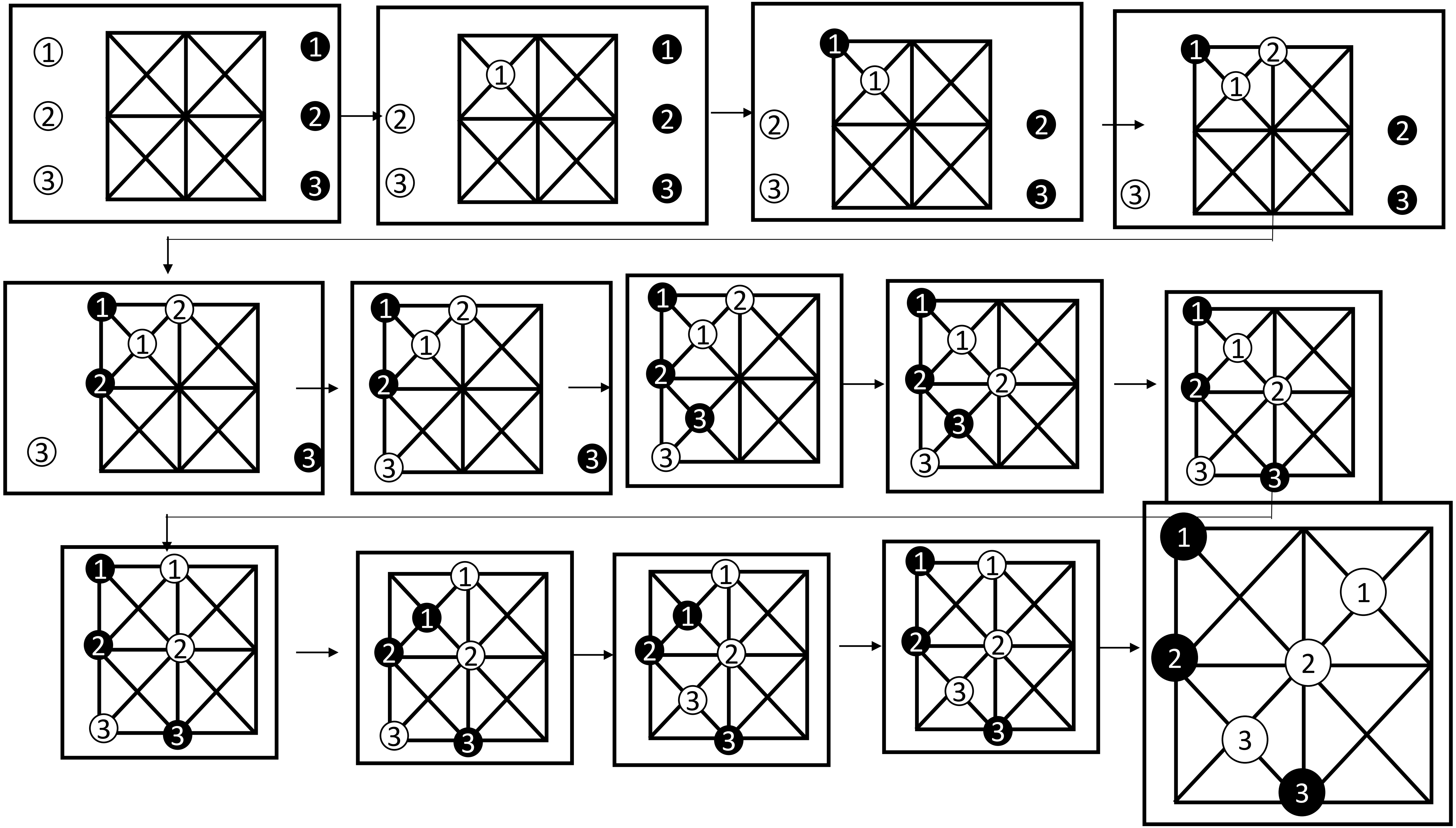
We have developed a method in which the first player will always win. With the following few slides we will try to explain how we came to this conclusion by every step we took.

For the first player the main goal is staying close to the middle as this will make it easy to win in one move.
The second player must therefore try to lure the first away from the middle. The first player is represented by white tiles and the second by black. The numbers represent the order in which they are placed and the letters are how we decided to label the different positions.


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
1
2
3
1
2
3

Explanations:

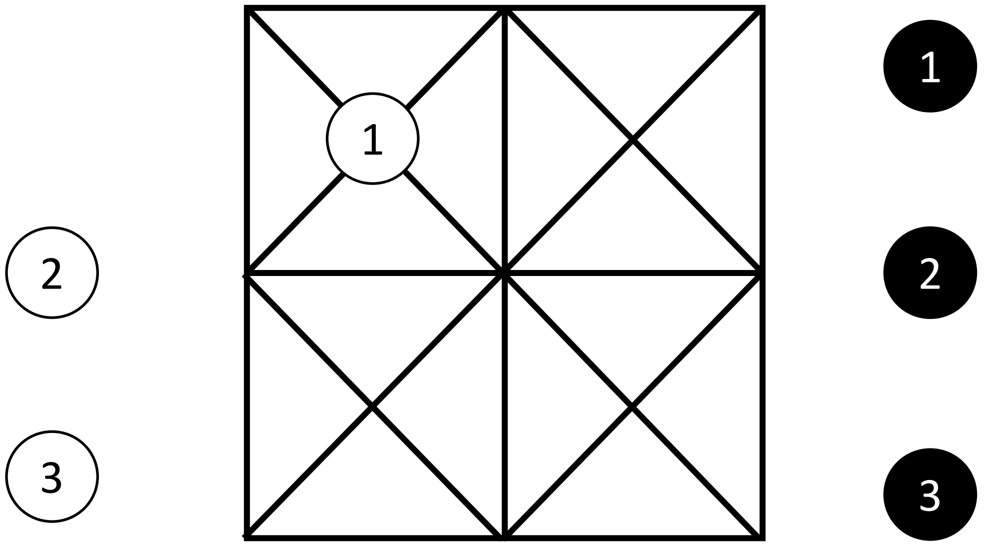
We will show why we placed each tile accordingly and the reasoning behind the movements.

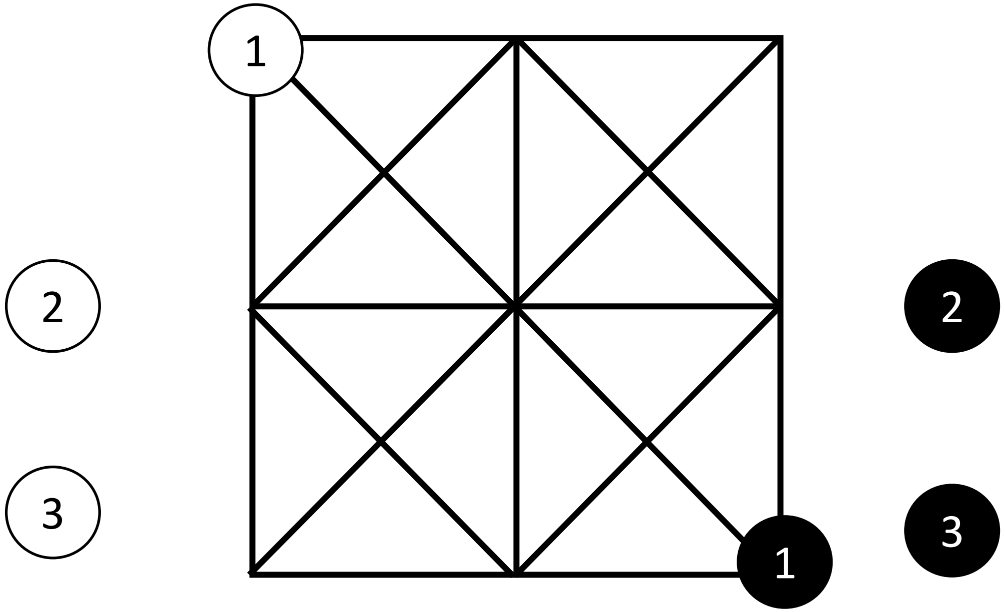


Explanations:

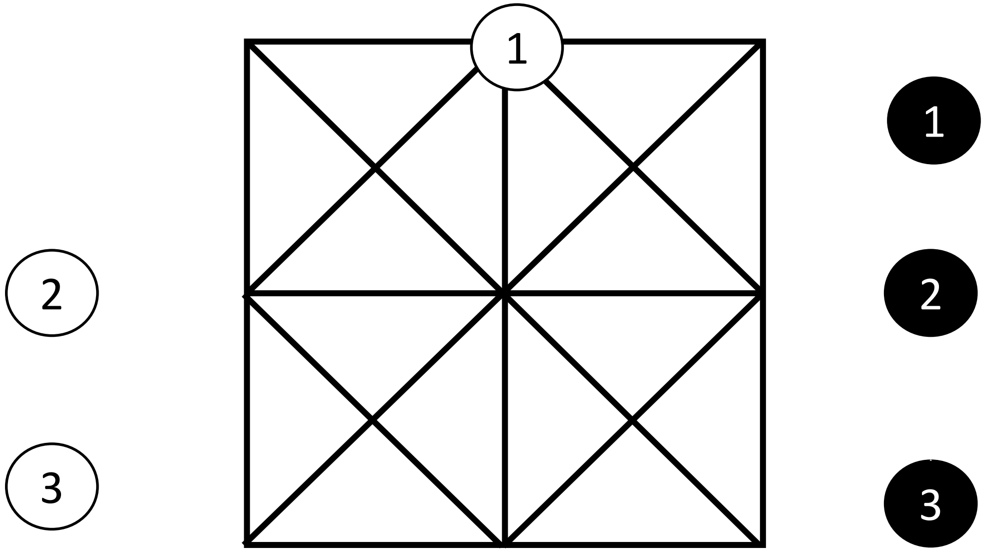
For the placement of the first tile there are 12 options, however due to the symmetry of the board ultimately there are 3. Those would be the outer corners (ACKM), the middle of the outer lines (BHFL) and the inner part of the board (DEIJ). We have chosen A B and D to show our method.

1st tile





12 options for first tile in total
Due to symmetry ultimately
there are three



Explanations:

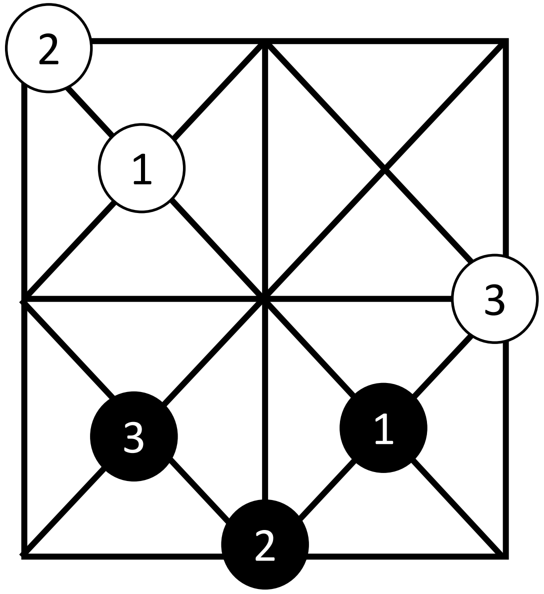
Instead of showing why each of the other first places wouldn't work we have decided to simply illustrate how placing in the inner part of the board (DEIJ) is the most efficient for winning the game.

The second player, keeping the symmetry of the board in mind, has 7 options. Unless the player places in one of the corners player one is guaranteed to win.
As you can see in the top two diagrams the first player would have the option to place in the corner behind the first tile, corner A. That way no matter what player 2 does, the third white tile can go on either B,F,I,L,J,H or E allowing the player to win with a simple move to the middle, G.

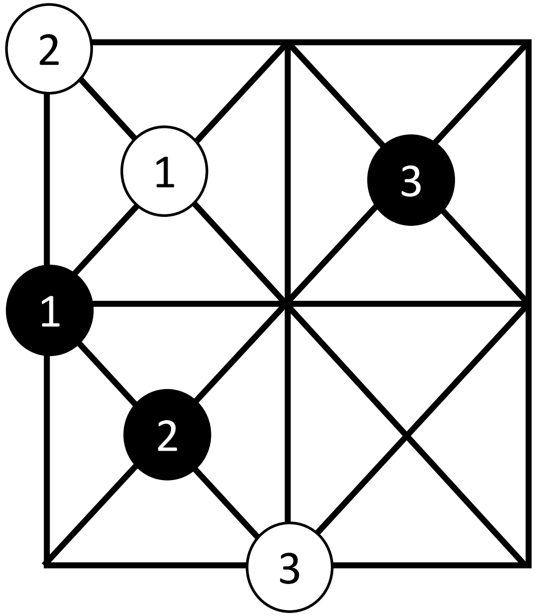
The only difference is if player two places in one of the corners. Here there is either the option of placing on K,C or M. If you look at diagram 3, given that the first player places A with the second tile, player two can easily win by forcing white to block in the third move and creating a perfect win meaning by either moving the second or first tile black would win. This approach can however be blocked in the way that is illustrated in diagram 4.
Therefore we reached the conclusion that the second player has the highest chance of winning by placing A.

1^{st} and 2^{nd} tile

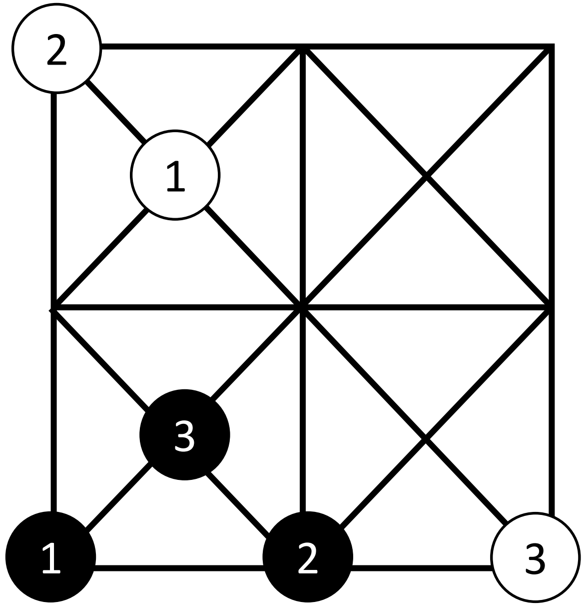
1



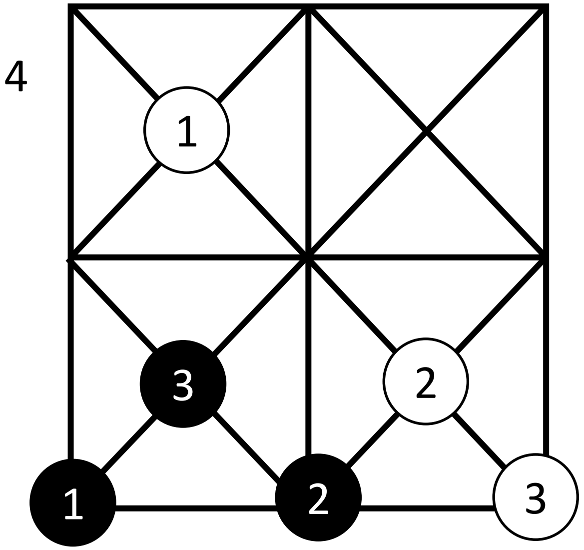
2



3

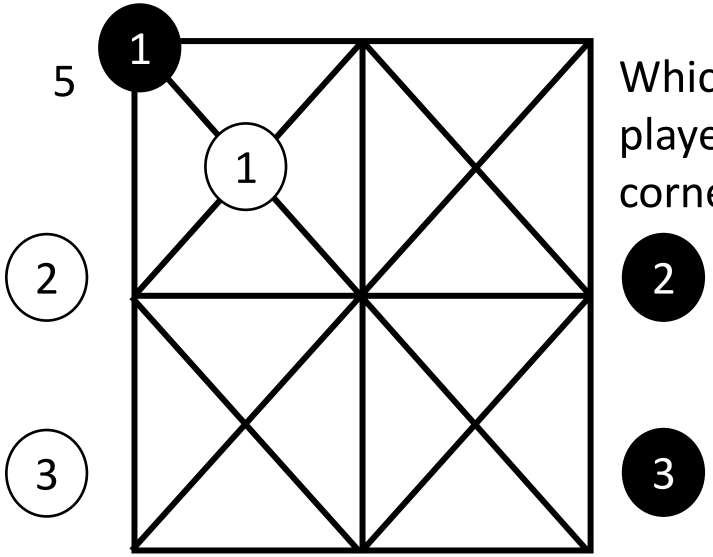


4



Placing on the 4^{th} spot is the best option

5

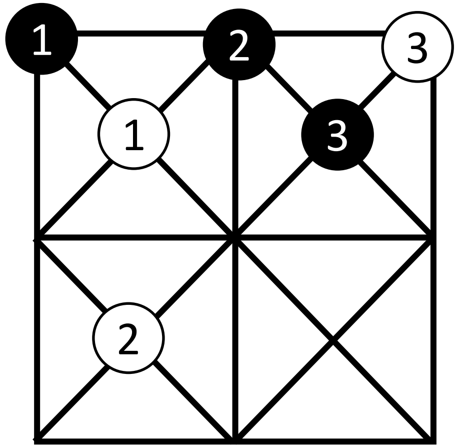


Which means that the second player must place in the top corner

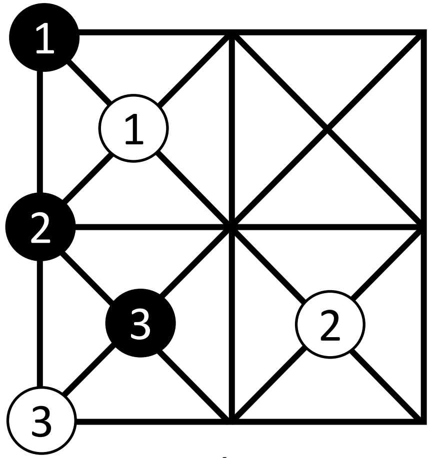
Explanations:

Given the symmetry there are six options for the second white tile:

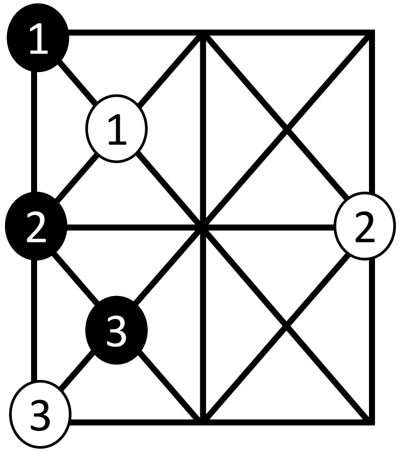
Either on the inside I and E or J. These would both drive white away from the middle and therefore drag out the game.
The third option is L and H. This would have a similar effect as it would spread out the tiles over the board dragging it out unnecessarily.
The fourth and fifth options are placing on corners. Either M or K and C. Again the game would last longer than needed. This only leaves the most efficient way, as close to the action as possible: F or B.



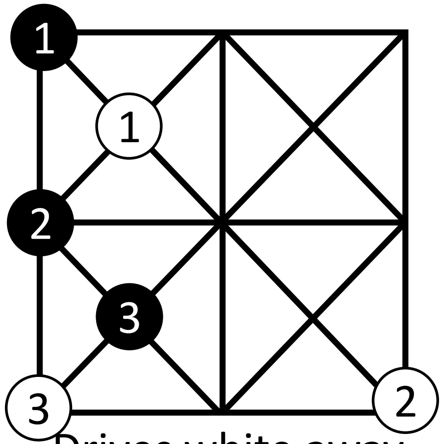
Drags out the game unnecessarily



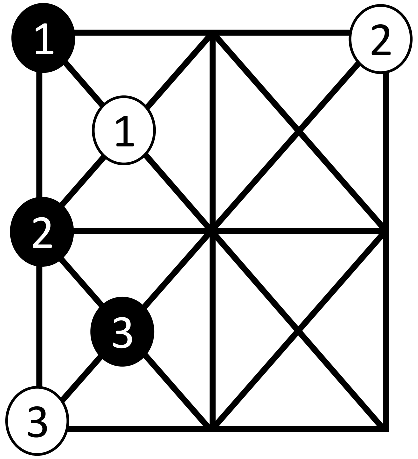
Drives white away from middle



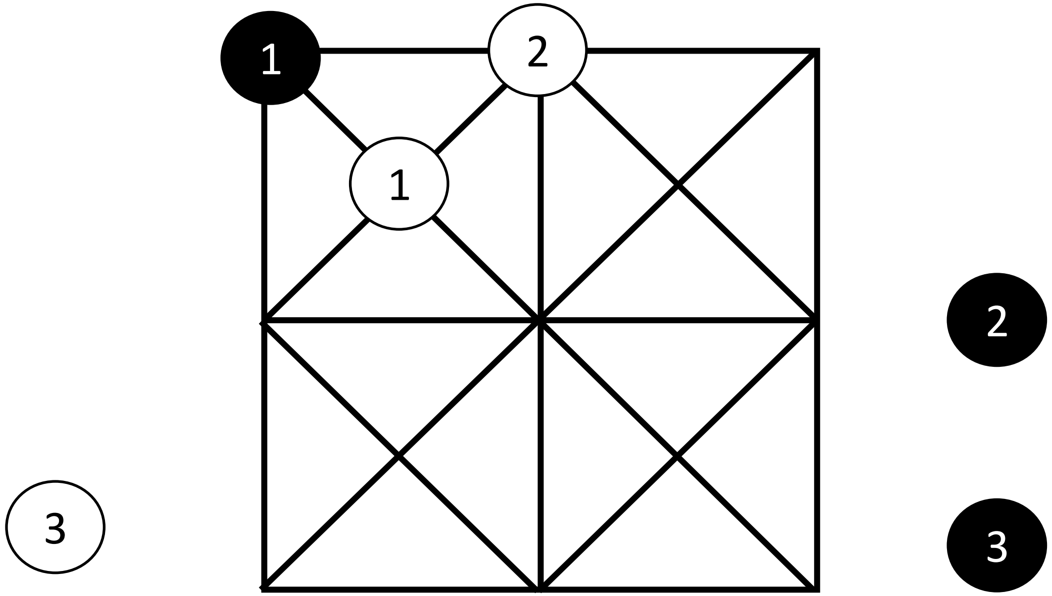
Drives white away from middle



Drives white away from middle



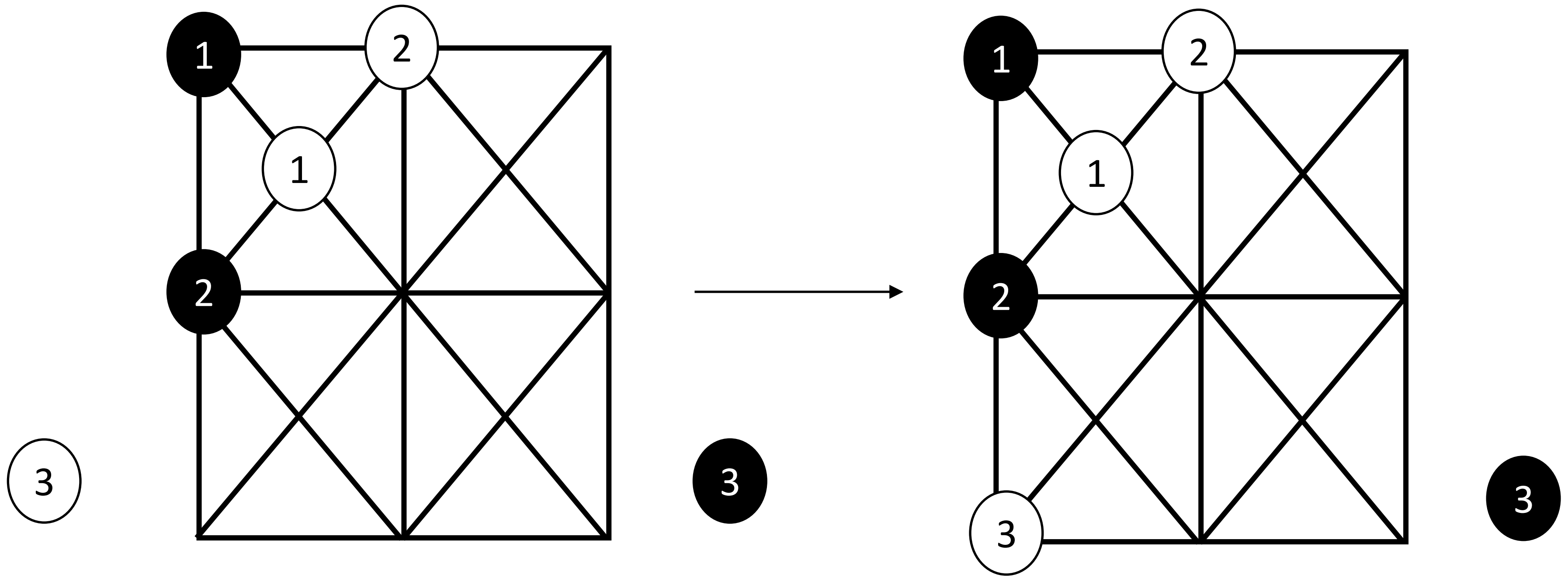
Drives white away from middle



Explanations:

Placing B would make the following two moves mandatory blocks since the game would end without them. Black would have to block by placing F and in turn white would have to block by placing K.

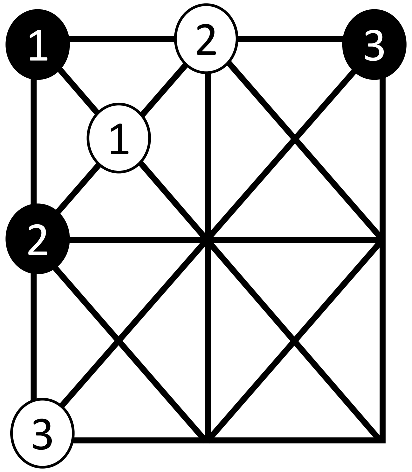
4th and 5th tile

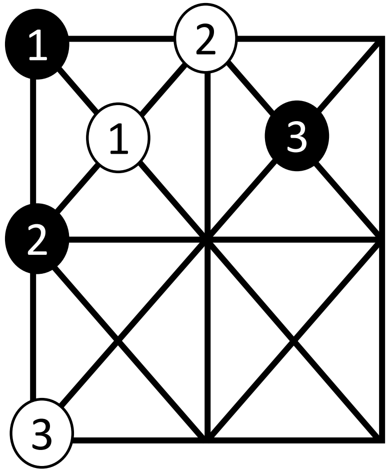


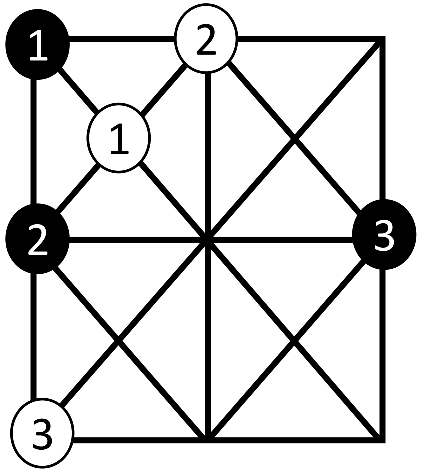
Explanations:

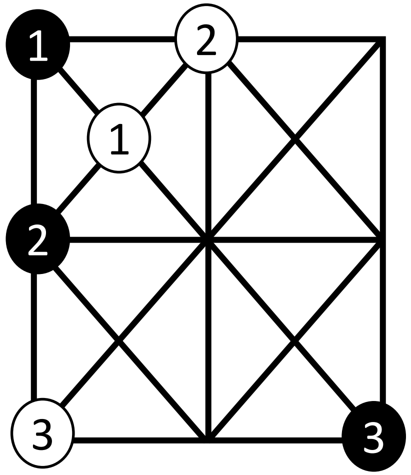
This brings us to the placement of the final tile.
There are seven options. We will now show what each of them will result in.

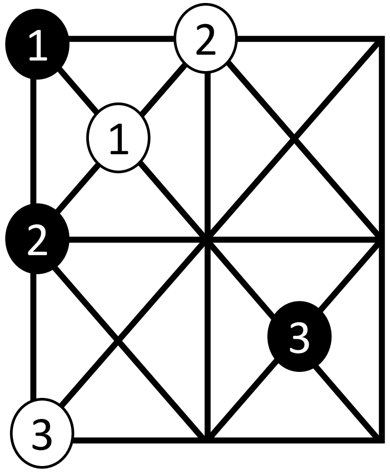
Last tile

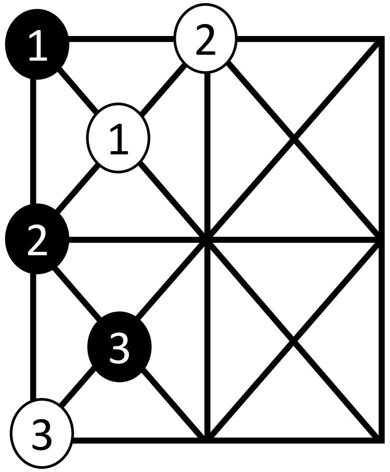


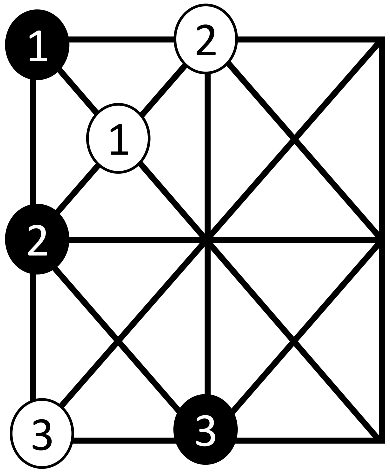








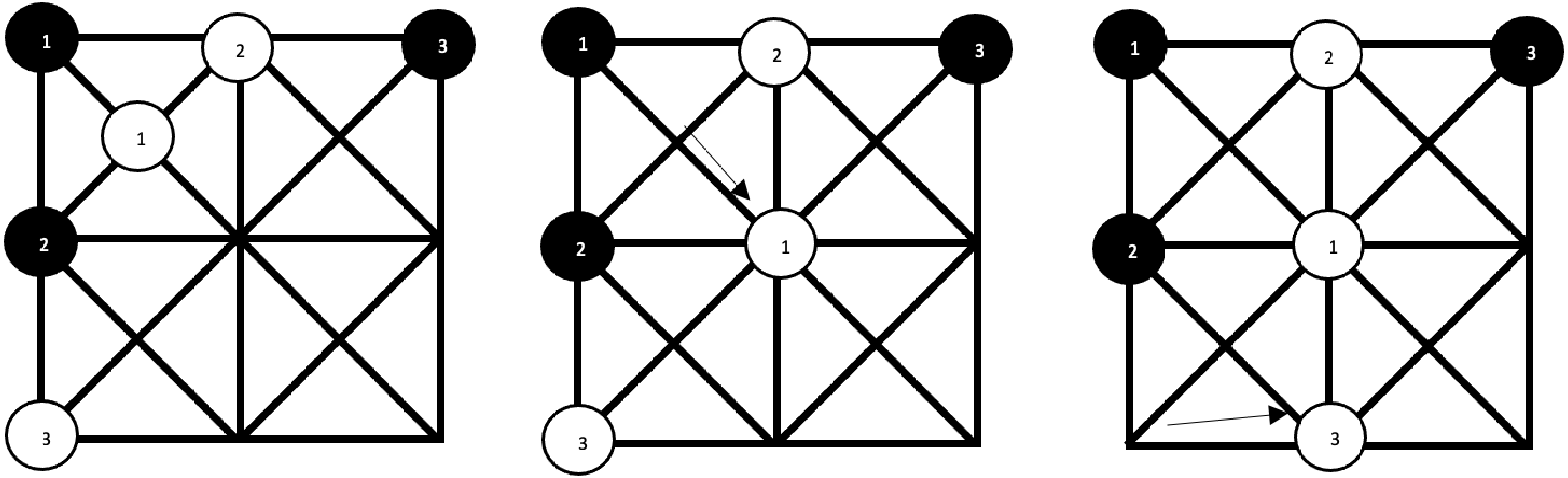




Explanations:

Placing in the top right corner would allow white to win in 2 moves.
Placing on E or H would give white the same opportunity. This leaves J M I or L. J and M would have the following results. Ultimately so would placing on I. They all end up in the same position as placing on L would leave them making that the most efficient.

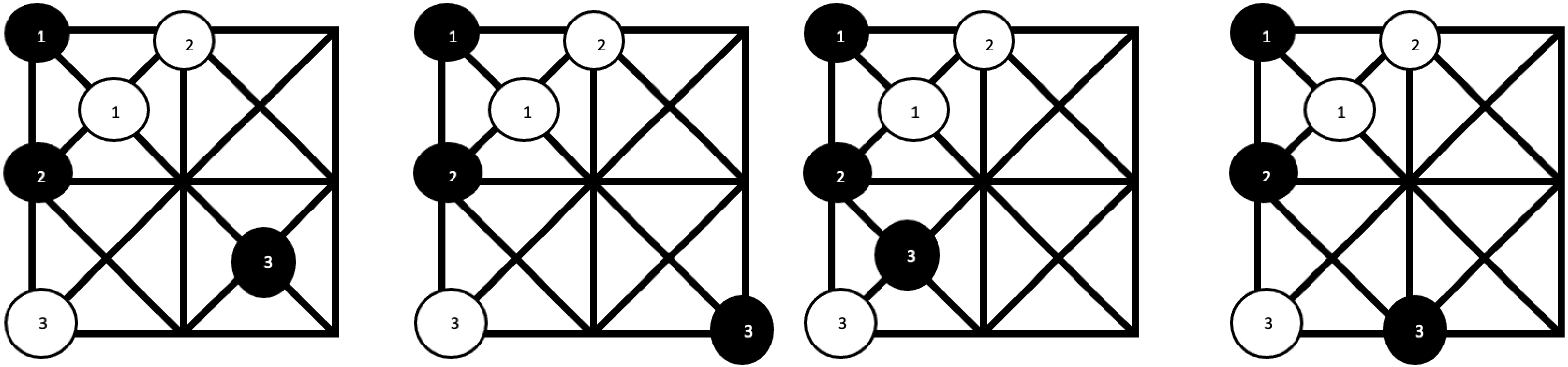
Last tile



Explanations:

Placing on most of the remaining positions would give white the same opportunity. This leaves four places shown in the diagrams. Ultimately all of these would end in a similar position (fifth diagram) meaning the most efficient placement is the middle of the bottom line (fourth diagram) as this is the one to make the final placement with the least moves.

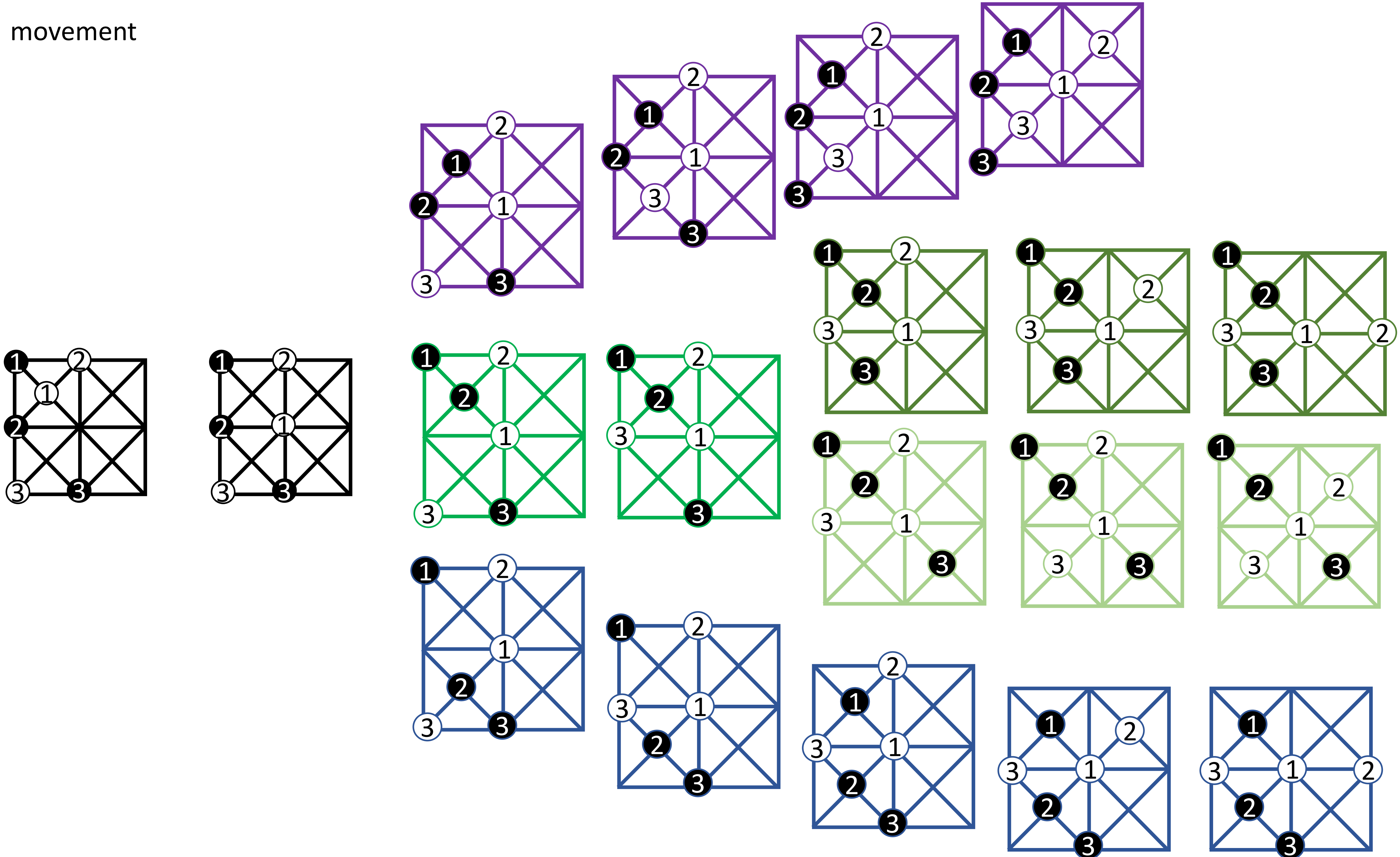
Last tile



Explanations:

To show you how this placement would play out we have created the below tree diagram. The second player has the option of moving their first or second tile given it three possible movements. The purple branch shows how moving the first tile would end, the green in the middle shows how moving the second tile upwards would end and blue show the way movement of the second tile downward would result. As you can see player one always wins.

movement

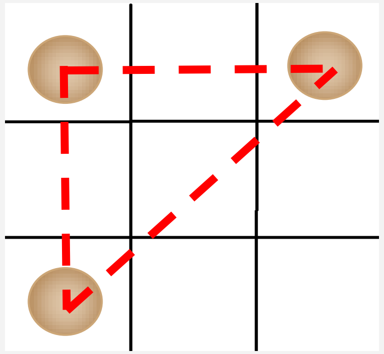


Explanations:

This method has shown the most efficient way we have found. In this case, player one wins. Realistically player two would want to drag this game out making less efficient moves, giving white more opportunities to make mistakes and therefore leaving an opening for the second player to win.

Conclusion

Morpion

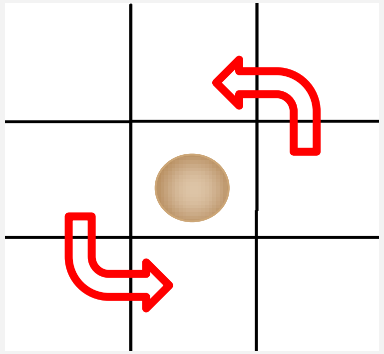


On a su maximiser nos chances de gagner !

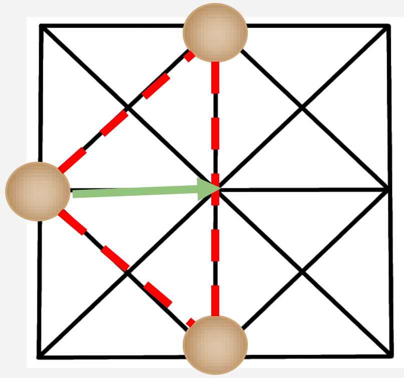
On observe que plus le jeu est complexe, plus les méthodes pour gagner sont efficaces.

Pour le morpion, le jeu le plus simple, on a seulement pu maximiser nos possibilités de gagner.

Achi



Picaria



On a établi des méthodes qui permettent de garantir notre victoire !

Pour le Achi et le Picaria, on a établi des méthodes qui permettent de gagner à coup sûr.

Les algorithmes

Play Tic Tac Toe

```python
from bot import botmove

won=0
board=[
    [' ', ' ', ' '],
    [' ', ' ', ' '],
    [' ', ' ', ' '],
    ]

def show(board):
    print(f"""-------
|{board[0][0]}|{board[0][1]}|{board[0][2]}|
-------
|{board[1][0]}|{board[1][1]}|{board[1][2]}|
-------
|{board[2][0]}|{board[2][1]}|{board[2][2]}|
-------\n""")
    return

def check_win(board, player):
    if board[0][1]==player and board[1][1]==player and board[2][1]==player:
        return True
    if board[0][2]==player and board[1][1]==player and board[2][0]==player:
        return True
    if board[1][0]==player and board[1][1]==player and board[1][2]==player:
        return True
    if board[0][0]==player and board[1][1]==player and board[2][2]==player:
        return True
    if board[0][0]==player and board[1][0]==player and board[2][0]==player:
        return True
    if board[0][2]==player and board[1][2]==player and board[2][2]==player:
        return True
    if board[0][0]==player and board[0][1]==player and board[0][2]==player:
        return True
    if board[2][0]==player and board[2][1]==player and board[2][2]==player:
        return True
    return False


while not won:
    #p1
    move=input('-> ')
    move=move.split()
    move.extend([move.pop(), move.pop()])
    move[0]=int(move[0])
    move[1]=int(move[1])
    if move[0]<0 or move[0]>2 or move[1]<0 or move[1]>2:
        print('not a valid move')
        continue
```


        print('not a valid move')
        continue


```python
    if board[move[0]][move[1]]!=' ':
        print('already a piece there')
        continue
    board[move[0]][move[1]]='O'
    show(board)
    if check_win(board, 'O'):
        print('O WINS!')
        win=1
        break

    #bot
    move=botmove(board)
    move=move.split()
    move.extend([move.pop(), move.pop()])
    move[0]=int(move[0])
    move[1]=int(move[1])
    if move[0]<0 or move[0]>2 or move[1]<0 or move[1]>2:
        print('not a valid move')
        continue
    if board[move[0]][move[1]]!=' ':
        print('already a piece there')
        continue
    board[move[0]][move[1]]='X'
    show(board)
    if check_win(board, 'X'):
        print('X WINS!')
        win=1
        break
```

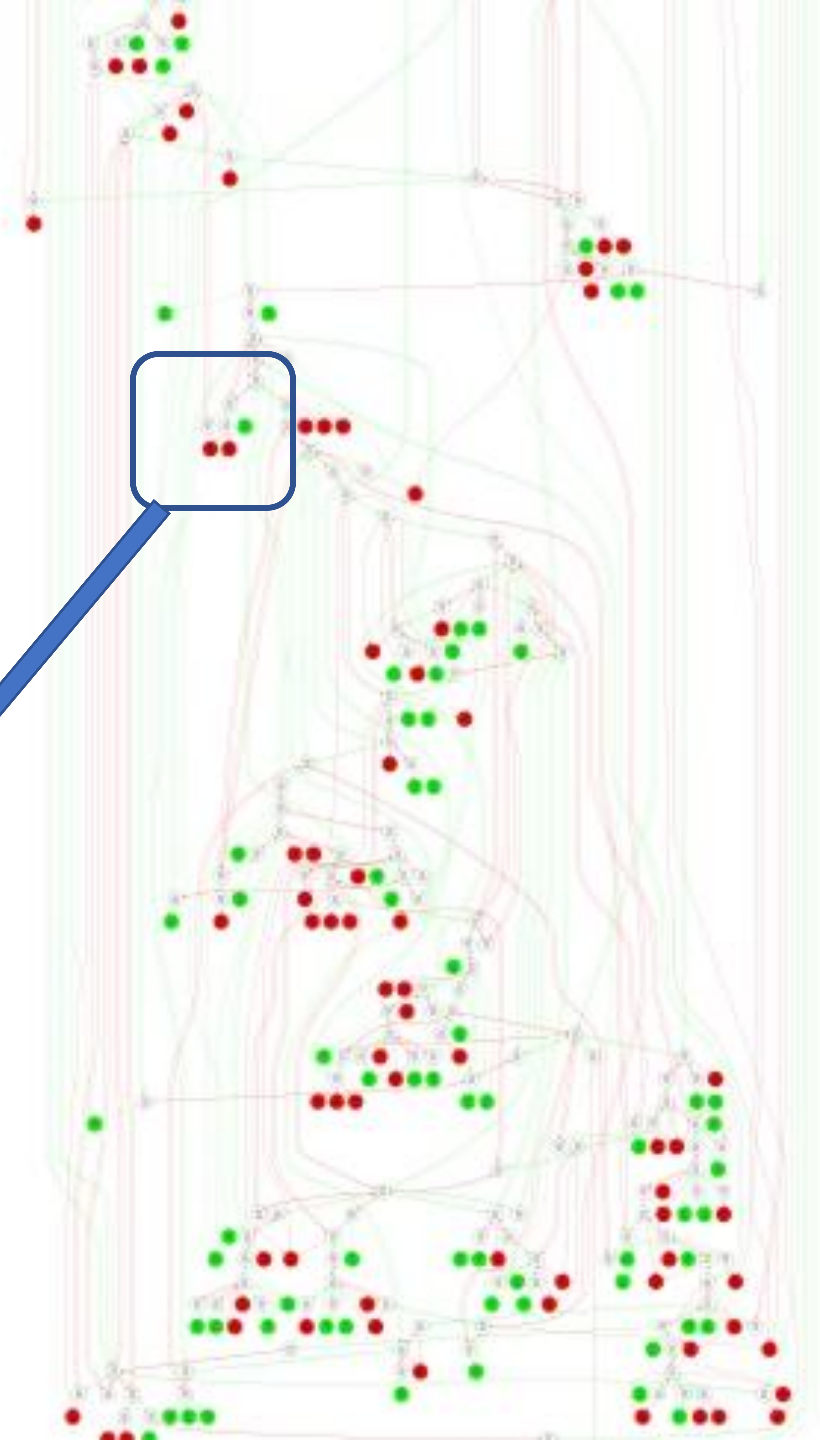
Explanations:

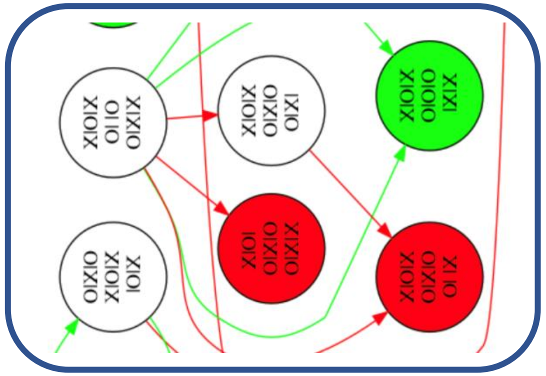
I made a code to play TicTacToe. The first part is to make the board. Then the second is a function to check if somebody won. Then this is the game so the players can place their tile.

Arbre de décision Achi

Arbre de decision Achi

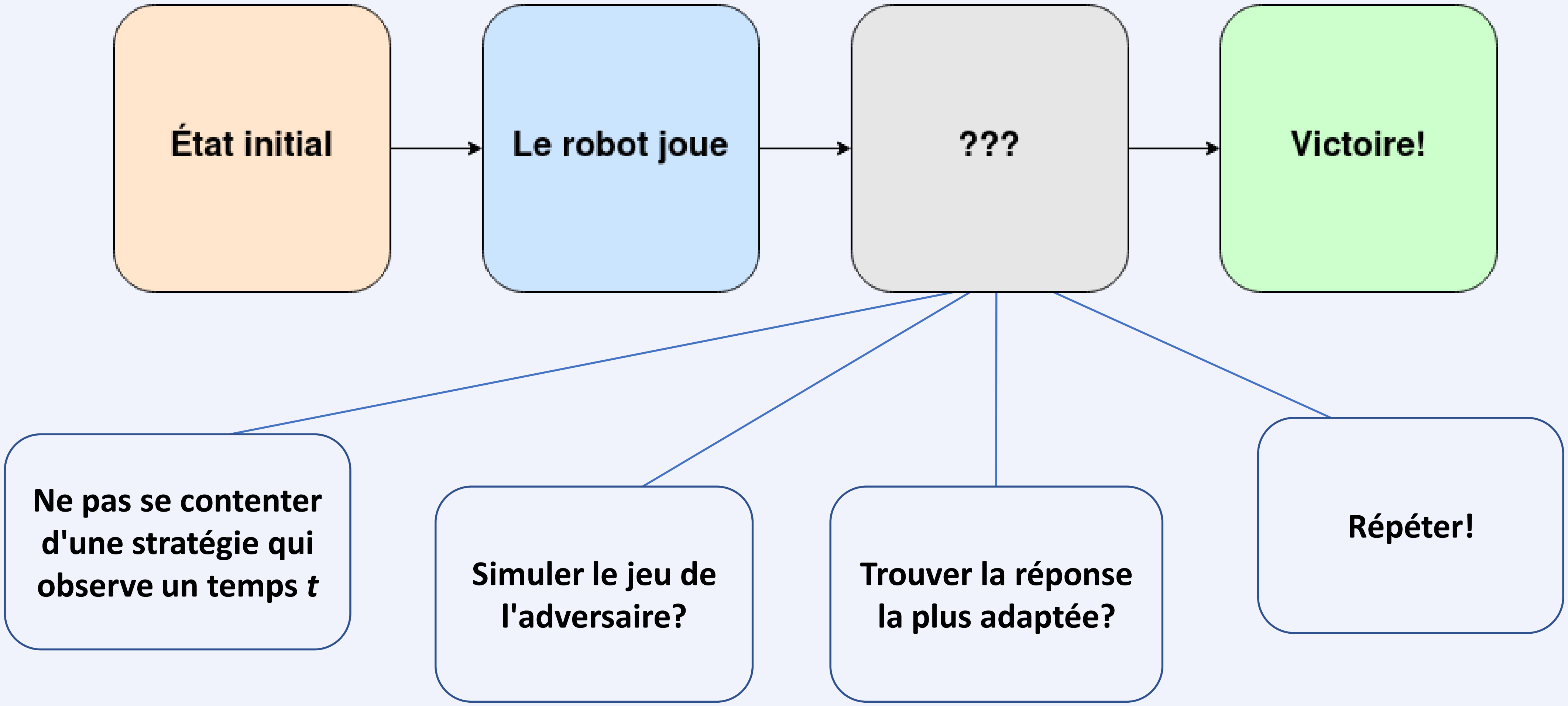
Une autre possibilité est d'utiliser un arbre de décision. Il se présente sous forme de graphe, chaque nœud étant reliés aux motifs de jeux avec lesquelles il peut se raccrocher.
Tous les nœuds contiennent un motif de jeu, les nœuds verts représentent les victoires du premier joueur, et les nœuds rouges, les victoires du second. Il y a également des nœuds blancs, ils sont neutres.
Les liens sur le graphe sont colorés selon le joueur qui peut permettre la transition d'un nœud a l'autre. Le joueur rouge ne pourra que suivre les liens de couleurs rouges.
Ainsi il est possible de déterminer toutes les fins possibles.





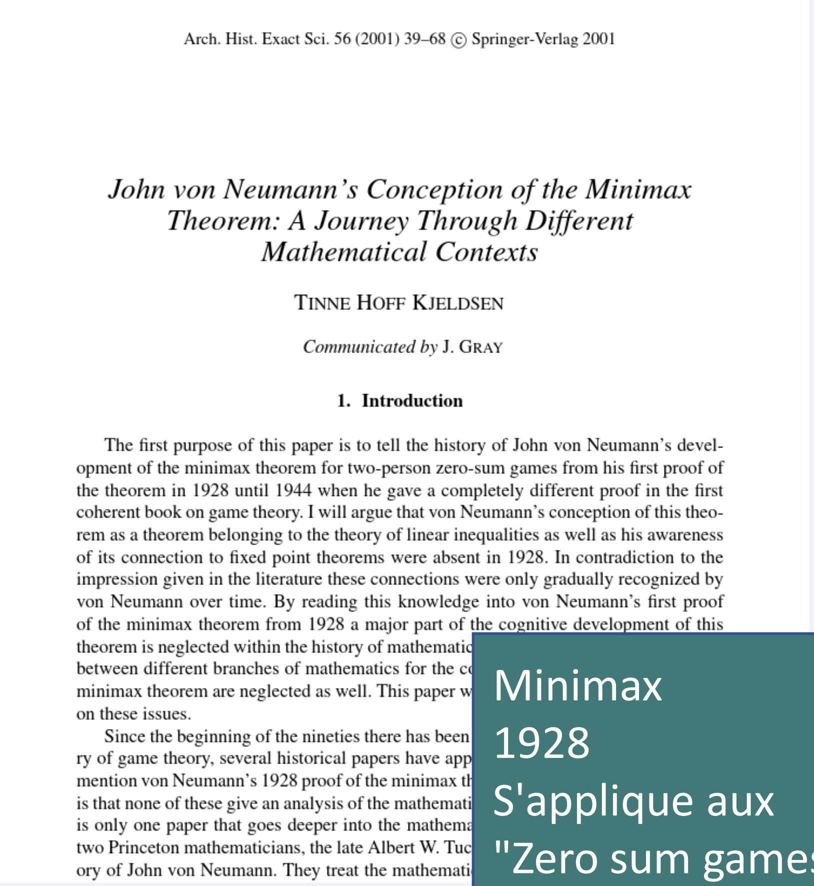
Une solution générale?

Raisonnement



Histoire de l'algorithme

John von Neumann
1903-1957
Hongro-Américain
Mathématicien et physicien
"Père de la théorie des jeux"



Arch. Hist. Exact Sci. 56 (2001) 39–68 © Springer-Verlag 2001

John von Neumann's Conception of the Minimax Theorem: A Journey Through Different Mathematical Contexts

TINNE HOFF KJELDSEN

Communicated by J. GRAY

1. Introduction

The first purpose of this paper is to tell the history of John von Neumann's development of the minimax theorem for two-person zero-sum games from his first proof of the theorem in 1928 until 1944 when he gave a completely different proof in the first coherent book on game theory. I will argue that von Neumann's conception of this theorem as a theorem belonging to the theory of linear inequalities as well as his awareness of its connection to fixed point theorems were absent in 1928. In contradiction to the impression given in the literature these connections were only gradually recognized by von Neumann over time. By reading this knowledge into von Neumann's first proof of the minimax theorem from 1928 a major part of the cognitive development of this theorem is neglected within the history of mathematic[...] between different branches of mathematics for the c[...] minimax theorem are neglected as well. This paper w[...] on these issues.

Since the beginning of the nineties there has been [...] ry of game theory, several historical papers have app[...] mention von Neumann's 1928 proof of the minimax th[...] is that none of these give an analysis of the mathemati[...] is only one paper that goes deeper into the mathema[...] two Princeton mathematicians, the late Albert W. Tuc[...] ory of John von Neumann. They treat the mathemati[...]

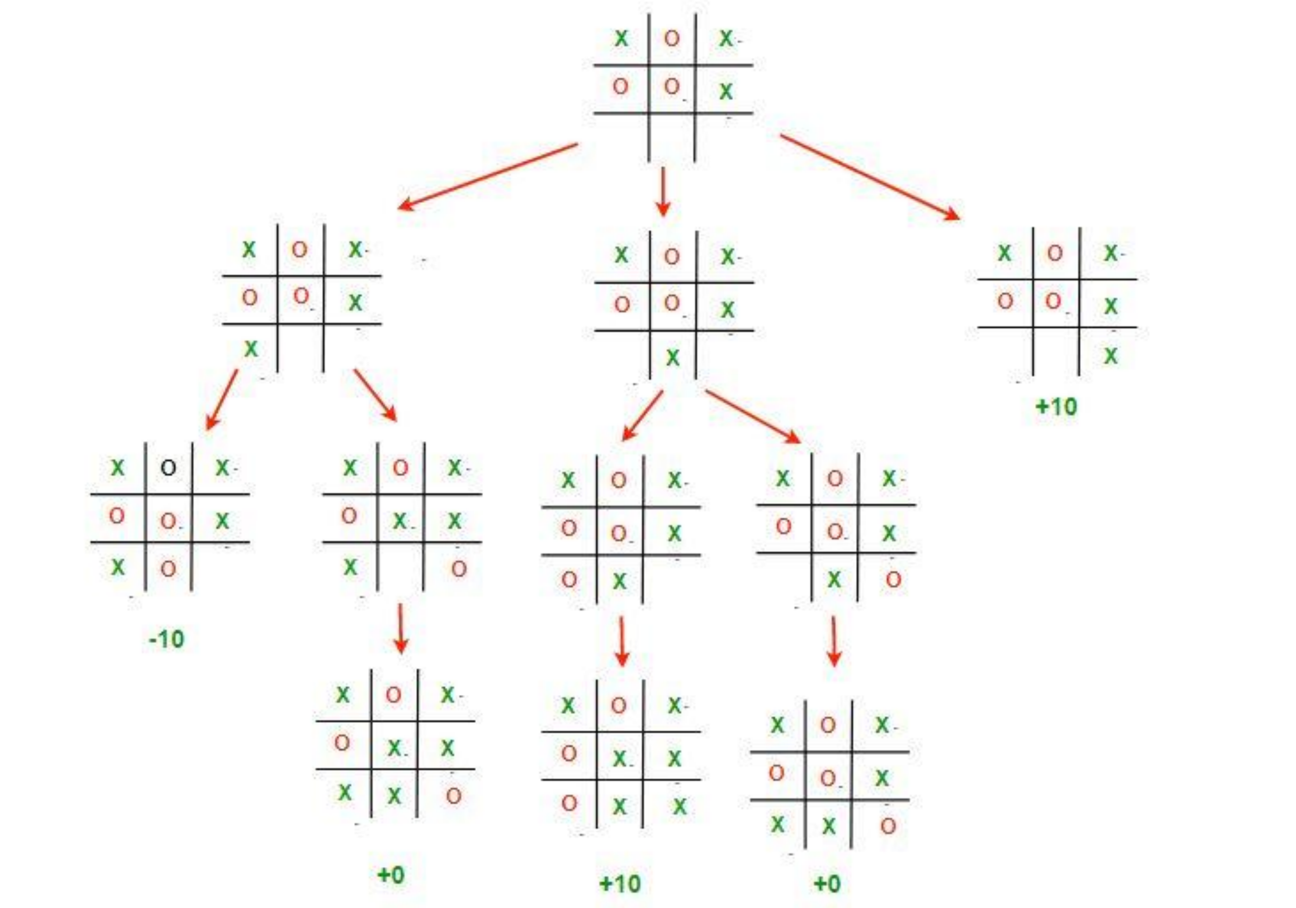
Minimax
1928
S'applique aux
"Zero sum games"

By LANL - http://www.lanl.gov/history/atomicbomb/images/NeumannL.GIF (archive copy), Attribution, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3429594

https://web.math.ucsb.edu/~crandall/math201b/vnminimax.pdf

Fonctionnement

1. Vérifier si le jeu est fini
2. Si oui, renvoyer un score à l'état actuel
3. Si non, essayer tous les coups disponibles
4. Appeler récursivement la fonction avec le nouvel état du jeu
5. À la fin, jouer le coup qui rapporte le plus de points



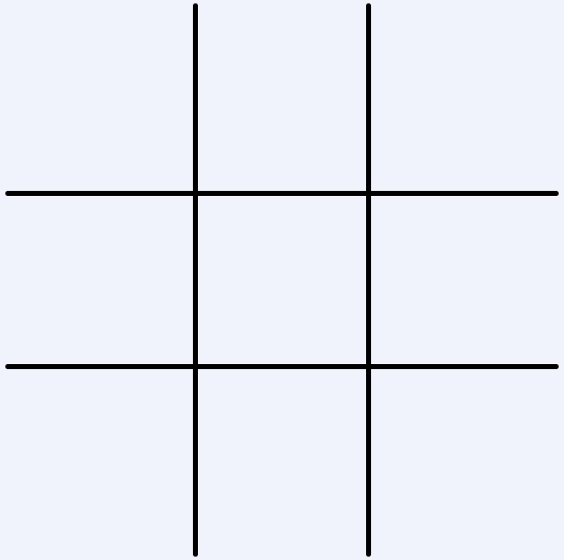
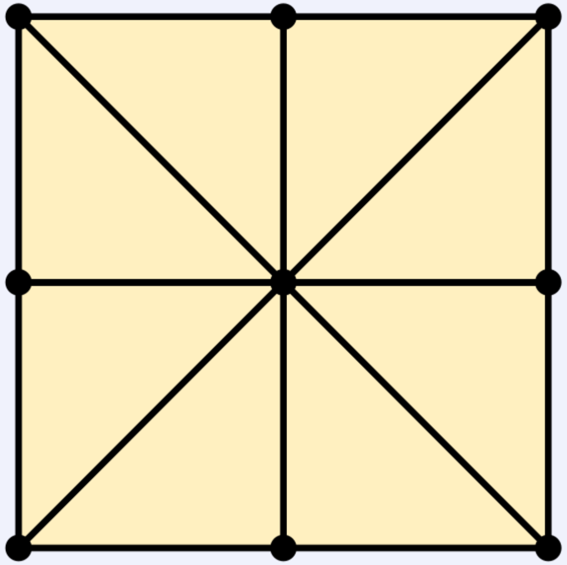
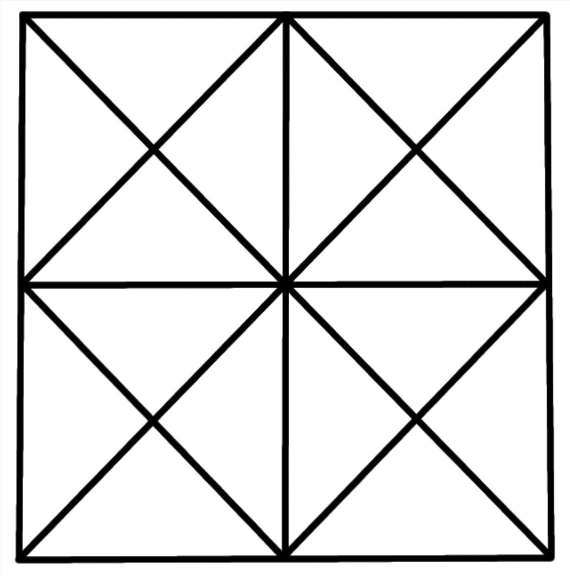
Comment le contrôler?

Adapter la notation

Système de récompense et punition: enlever des points pour un coup mauvais, en rajouter pour un bon coup

Modifier la profondeur de recherche

Résultats

Tic-tac-toe	Achi	Picaria
		
Égalité	Joueur 1 gagne	Joueur 1 gagne

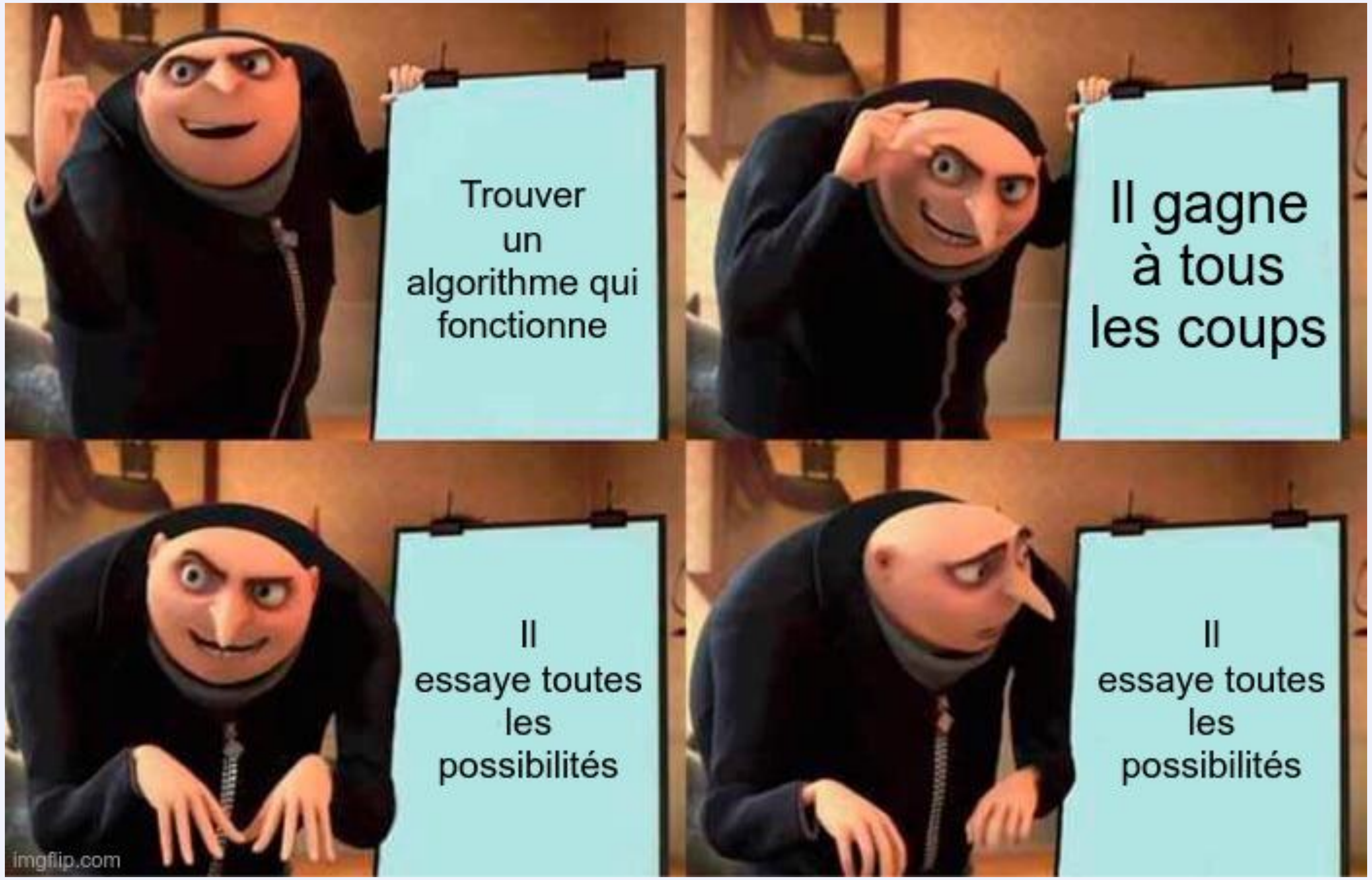
Avantages et inconvénients

Avantages:

- Généralisable
- Concept plutôt intuitif
- Solution optimale

Désavantages:

- Lent pour des jeux plus "ouvert"
- Gourmand en mémoire



L'implémentation en Python

```python
class MinimaxPlayer(Player):
    SEARCH_DEPTH = 6

    def get_score(self, state, depth):
        winner = state.has_won()
        if winner == self.piece:
            return 1000 + depth
        elif winner == self.opponent:
            return -1000 - depth
        else:
            # Score for the position of the pieces
            # Depends on the game, so we leave the
            # implementation inside the game logic
            return state.get_score()

    def minimax(self, state, maximizer, depth):
        moves = state.get_available_moves(self.piece if maximizer else self.opponent)
        if depth == 0 or state.game_over():
            return self.get_score(state, depth)
        if maximizer:
            score = -inf
            for move in moves:
                state.play(self.piece, move)
                score = max(self.minimax(state, False, depth - 1), score)
                state.unplay(move)
        else:
            score = inf
            for move in moves:
                state.play(self.opponent, move)
                score = min(self.minimax(state, True, depth - 1), score)
                state.unplay(move)
        return score
```

```python
    def get_next_move(self, state):
        moves = state.get_available_moves(self.piece)

        # Emulate 1 round of minimax to save the best move
        max_score = -inf
        best_move = moves[0]
        for i, move in enumerate(moves):
            state.play(self.piece, move)
            score = self.minimax(state, False, self.SEARCH_DEPTH)
            state.unplay(move)
            if score > max_score:
                max_score = score
                best_move = [move]
            elif score == max_score:
                # Save all moves with the same score
                best_move.append(move)
        # Chose 1 move from all of the best moves (more fun!)
        return random.choice(best_move)
```

Code source:
https://github.com/TomVdt/math-en-jeans

MERCI
THANK YOU