Une fourmi sur un tétraèdre régulier

Année 2022– 2023

Félix Pietruczanis , Paul Lasalle, élèves de classe Terminale

Établissement : Lycée Honoré d'Estienne d'Orves de Carquefou, jumelé avec le lycée Grand Air de La Baule

Enseignante : Sandrine Bulliard

Chercheur : Antoine Meddane, Université de Nantes.

1. Présentation du sujet

Une fourmi se déplace sur un tétraèdre régulier en partant d'un sommet de référence. La distance entre deux sommets vaut 1.
Combien de chemins de longueurs 7 terminent à la position initiale ?
Combien de chemins de longueurs 7 terminent à un sommet adjacent ?
Combien de chemins de longueurs 2022 terminent à la position initiale ?
Combien de chemins de longueur 2022 terminent à un sommet adjacent ?

2. Résultats

Le nombre de chemins de longueur n allant de A à A sur le tétraèdre peut être calculé par la suite
(Un) = pour n pair $\sum_{k=0}^{\frac{(n-2)}{2}}(3^{2k+1}-3^{2k})+1$ et pour n impair $\sum_{k=1}^{\frac{(n-1)}{2}}(3^{2k}-3^{2k-1})$
On peut généraliser le résultat pour toute figure à deux ou trois dimensions en utilisant les matrices d'adjacences.

3. Texte de l'article

En cherchant à la main, on se rend compte que pour que la fourmi arrive en A, elle doit venir de n'importe quel sommet autre que A, or il y a 3^n chemins totaux(1). On trouve alors rapidement la suite suivante pour le tétraèdre régulier : $U_{n+1}=3^n-U_n$ et $U_1=0$.
On peut trouver la formule explicite de cette suite, démontrée par récurrence(2) :

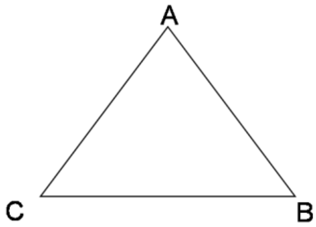
- Pour n pair : $\sum_{k=0}^{\frac{(n-2)}{2}}(3^{2k+1}-3^{2k})+1$
- Pour n impair : $\sum_{k=1}^{\frac{(n-1)}{2}}(3^{2k}-3^{2k-1})$

Il y a donc 546 chemins de longueur 7 partant de A et terminant en A et 1641 qui terminent en un sommet adjacent, c'est-à-dire B, C, ou D (3).

On obtient de la même manière le nombre de chemins de longueur 2022 terminant en A ou à un sommet adjacent à A.

Ce type de problème se prête également à l'utilisation des graphes et des matrices d'adjacences. En effet, le tétraèdre peut être modélisé par un graphe, et le nombre de chemins de longueur n partant d'un sommet et arrivant à un autre peut être calculé par sa matrice d'adjacence.
La matrice d'adjacence d'un graphe est la matrice carrée dont chaque terme à la ligne i et à la colonne j correspond au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.
On peut ainsi étudier le déplacement de la fourmi sur différentes formes :

1 – Pour un triangle équilatéral, la matrice d'adjacence est la suivante :



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

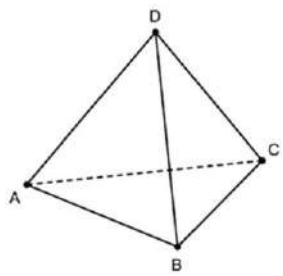
On peut trouver le nombre de chemins de longueur n partant d'un sommet et terminant en un autre en mettant cette matrice à la puissance n (voir la démonstration dans le paragraphe 5).
Pour $n = 7$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 42 & 43 & 43 \\ 43 & 42 & 43 \\ 43 & 43 & 42 \end{pmatrix}$$

Il y a donc 42 chemins de longueur 7 partant en A et terminant en A et $43 + 43 = 86$ chemins partant de A et terminant en un somment adjacent à A, c'est-à-dire B ou C.

Avec $n = 2022$, on trouve ce nombre :
16052030559038622826692897423441187521042477423804742113813929472130862444076881256300807700317558379813391944230545570201734482820079188096070365302984060406998235666404662575200298304552660438813794473004374687014416962187796710015256253052987739677519423689462892732465056524446142618163204391362235141556419101054305008262736089421592438963480877893828512260356448918248726026569038785571981764268963096899759572604527998644907450254908028197489031957205775991691711388384709859751242946449384750659107438018250812061153847609138984798498712562714734343460998006380215090833762525819218232330459283595810 2

2 – Pour un tétraèdre régulier :



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut donc trouver le nombre de chemins de longueur n partant d'un sommet et terminant en un autre en mettant cette matrice à la puissance n.

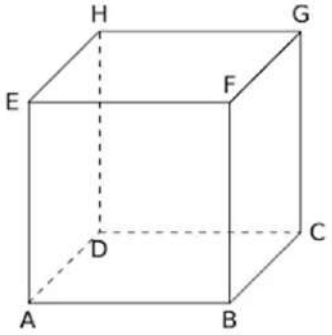
Pour $n = 7$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 546 & 547 & 547 & 547 \\ 547 & 546 & 547 & 547 \\ 547 & 547 & 546 & 547 \\ 547 & 547 & 547 & 546 \end{pmatrix}$$

Il y a donc 546 chemins de longueur 7 partant en A et terminant en A et $547 + 547 + 547 = 1641$ chemins partant de A et terminant en un somment adjacent à A, c'est-à-dire B, C ou D.

Avec $n = 2022$, on trouve ce nombre :
1371251298479149352456986593635832178750611464627236610040180398686591043591894391778019452176013502761000864694241924278900662323967760774271120044065416044983753234050940966240536675621945007819196011989576660830139672581124875174734805886865192045890101046009849220846876052073034498409582160914791712532885044543615609312865647995109006669088863739250862124518813499464951214827105074014626946043250433934355293175605526126037845612403085599968290953229393551169752905454905620196532737468785126223500765452959436898259358467989881221994917612231562326295927994663813816622381457517069041616536233992261318571875551150372332625892862264382593801965983376184829651660241486589803015247108680294665488316596580567334463372260766685137518600094340062325074870924565465331120915744119239814036440508332025323326047010655863558921471001769816969063666078523287174979800994655748825008316228689578072342597664651674715636609197359782224700743691735542992853514975490

3 – Pour un cube :



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut donc trouver le nombre de chemins de longueur n partant d'un sommet et terminant en un autre en mettant cette matrice à la puissance n.
Pour $n = 7$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 0 & 547 & 0 & 547 & 547 & 0 & 546 & 0 \\ 547 & 0 & 547 & 0 & 0 & 547 & 0 & 546 \\ 0 & 547 & 0 & 547 & 546 & 0 & 547 & 0 \\ 547 & 0 & 547 & 0 & 0 & 546 & 0 & 547 \\ 547 & 0 & 546 & 0 & 0 & 547 & 0 & 547 \\ 0 & 547 & 0 & 546 & 547 & 0 & 547 & 0 \\ 546 & 0 & 547 & 0 & 0 & 547 & 0 & 547 \\ 0 & 546 & 0 & 547 & 547 & 0 & 547 & 0 \end{pmatrix}$$

Il n'y a donc aucun chemin de longueur 7 partant en A et terminant en A mais $547 + 547 + 547 + 546 = 2187$ chemins partant de A et terminant en un somment adjacent à A, c'est-à-dire B, D, E ou G.

Avec $n = 2022$, on trouve ce nombre :
1371251298479149352456986593635832178750611464627236610040180398686591043591894391778019452176013502761000864694241924278900662323967760774271120044065416044983753234050940966240536675621945007819196011989576660830139672581124875174734805886865192045890101046009849220846876052073034498409582160914791712532885044543615609312865647995109006669088863739250862124518813499464951214827105074014626946043250433934355293175605526126037845612403085599968290953229393551169752905454905620196532737468785126223500765452959436898259358467989881221994917612231562326295927994663813816622381457517069041616536233992261318571875551150372332625892862264382593801965983376184829651660241486589803015247108680294665488316596580567334463372260766685137518600094340062325074870924565465331120915744119239814036440508332025323326047010655863558921471001769816969063666078523287174979800994655748825008316228689578072342597664651674715636609197359782224700743691735542992853514975490

4. Conclusion

En utilisant dans un premier temps les suites et dans un deuxième temps les matrices d'adjacences, nous sommes parvenus à déterminer les réponses au problème et à le généraliser pour n'importe quelle longueur de chemin et pour n'importe quel graphe et en particulier n'importe quel polyèdre.

5. Démonstration [4]

Soit n l'ordre de la matrice d'adjacence M (donc aussi de M^k) et du graphe associé.
M^k_{ij} est le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne de M^k

On cherche à montrer par récurrence la propriété
$P(k)$: " M^k_{ij} est le nombre de chaînes de longueur k reliant i à j "

Initialisation :
$P(1)$: $M^1_{ij} = M_{ij}$ soit le nombre d'arêtes reliant i à j, et donc le nombre de chaînes de longueur 1 reliant i à j
$P(1)$ est vraie

Hérédité :
On suppose qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $P(k)$ soit vraie.
Un chemin de longueur $k+1$ reliant i à j peut être décomposé en un chemin de longueur k reliant i à un sommet S et une arête reliant S à j
Ainsi, le nombre de chemins de longueur $k+1$ reliant i à j peut s'écrire $\sum_{s=1}^{n} M^k_{is} \times M_{sj}$

Or cette somme revient au produit de matrices suivant :

$$\begin{pmatrix} M^k_{i1} & M^k_{i2} & M^k_{i3} & \cdots & M^k_{in} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_{1j} \\ M_{2j} \\ M_{sj} \\ \vdots \\ M_{nj} \end{pmatrix} = M^{k+1}_{ij}$$

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Conclusion :
$P(1)$ est vraie et $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ donc $P(k)$ est vraie $\forall k \in \mathbb{N}$

Notes d'édition

(1) Les chemins de longueurs n partant de A sont des n-uplets choisis parmi trois sommets à chaque fois. Pour mieux comprendre, tracer un arbre pour $n = 2$. Il part de A.

(2) La récurrence est ici un peu complexe. Il y a deux hypothèses à poser : le cas où n est pair et le cas où n est impair.

(3) Les chemins se terminant sur les sommets adjacents sont les chemins de longueur 7 auxquels on enlève ceux qui terminent en A : $3^7 - u_7$.

(4) La notation des coefficients de la matrice M^k peut ici poser problème. Ces coefficients ne sont pas les coefficients de la matrice M mis à la puissance k.

Dans la conclusion, k appartient à $\mathbb{N}^*$ et non à $\mathbb{N}$.